

一个新超混沌系统及其线性反馈同步*

高智中

(安徽科技学院理学院, 安徽 凤阳 233100)

摘要: 构造了一个新的四维超混沌系统, 用数值模拟方法研究了该系统的相图、分岔图、Lyapunov 指数谱等动力学行为。分析结果表明新系统随新引入的参数变化时呈现周期、拟周期和超混沌动力学行为, 而且超混沌的参数范围较大。基于 Lyapunov 稳定性定理, 设计了一种线性牵制控制器实现了该超混沌系统的混沌同步, 结果表明该方法正确有效。

关键词: 新超混沌系统; 相图; 分岔图; Lyapunov 指数谱; 线性反馈同步

中图分类号: N941.7 文献标志码: A 文章编号: 0529-6579(2012)06-0030-05

A Novel Hyperchaotic System and Its Linear Feedback Synchronization

GAO Zhizhong

(College of Science, Anhui Science and Technology University, Fengyang 233100, China)

Abstract: A novel four-dimensional hyperchaotic system is reported. The phase diagram, bifurcation diagram and Lyapunov exponents spectrum diagram of the system are analyzed by means of numerical simulations. Results show the new system takes on periodic, quasi-periodic and hyperchaotic dynamical behaviors as the new introduced parameter varies. And the range of hyperchaos is wider. Based on the Lyapunov stability theorem, a linear pinning controller is designed to achieve the synchronization of the new hyperchaotic system. Results demonstrate that the method is correct and effective.

Key words: novel hyperchaotic system; phase diagram; bifurcation diagram; Lyapunov exponents spectrum; linear feedback synchronization

随着基于混沌的保密通信领域的技术研究和发
展, 对混沌系统的复杂性提出了更高要求。混沌反
控制的目的之一就是产生更复杂的混沌信号, 包括
更复杂的吸引子拓扑结构和超混沌的动力学特性。
对超混沌系统及其同步的研究将是信息工程领域
中混沌应用的一个重要课题。设计超混沌系统的方法
主要是采用仿真计算来发现和验证超混沌吸引子
的存在。近几年, 能产生超混沌吸引子的系统屡见
报道, 受到了广大科研工作者的普遍关注并取得了
大量成果^[1-10]。目前对混沌同步的研究主要有以
下几个方面: 混沌系统完全同步、相同步、广义同
步、滞后同步和投影同步等, 控制器的设计大多采

用非线性控制器, 且为每个子状态设计了控制
器^[11]。本文在一个新三维自治混沌系统基础上,
通过引入非线性控制器, 构造了一个可产生超混沌
现象的四维系统, 分析了该四维系统的动力学行
为, 包括平衡点性质、吸引子的存在性与有界性、
对称性、Lyapunov 指数谱和分岔图等, 系统超混沌
的存在性通过 Lyapunov 指数谱得到验证。与以往
的超混沌系统相比, 该系统的结构较简单, 且超混
沌的参数范围较大。对该系统的某一状态变量设计
了一种线性牵制控制器, 实现了该系统的线性反馈
同步, 结果表明该方法正确有效。

* 收稿日期: 2012-02-20

基金项目: 安徽省高校省级优秀青年人才基金资助项目(2012SQRL146)

作者简介: 高智中(1979年生), 男, 讲师; E-mail: gaozhizhong2005@126.com

1 超混沌模型及其超混沌吸引子

2006 年 Liu 等^[12] 提出了 1 个新的混沌系统，其动力学方程为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = bx + xz \\ \dot{z} = -xy - cz \end{cases}$$

当 $a = 10, b = 35, c = 1.4$ 时，系统处于混沌状态。

在系统的第二个方程中引入非线性控制器 u ，令 u 的变化率为 $\dot{u} = mx$ ，则产生的新超混沌系统为

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x) \\ \dot{y} = xz + bx - u \\ \dot{z} = -xy - cz \\ \dot{u} = mx \end{cases}$$

该四维系统保证了吸引子相空间的维数为 4，且含有非线性乘积项，满足了产生超混沌的必要条件^[13]。选取典型参数 $a = 10, b = 35, c = 1.4, m = 13$ ，初始值 $(10, 10, 10, 10)$ ，利用 Jacobi 方法计算系统的 Lyapunov 指数为 $LE_1 = 0.4001, LE_2 = 0.1739, LE_3 = 0, LE_4 = -11.9576$ ，其中有两个正的 Lyapunov 指数，并且所有 Lyapunov 指数之和小于零，其 Lyapunov 维数为 3.048，充分说明系统

处于超混沌运动，对应的超混沌吸引子在各平面上的投影如图 1 所示。

2 新超混沌系统的动力学分析

2.1 对称性

显然系统存在一个对称变换 $S: (x, y, z, u) \rightarrow (-x, -y, z, -u)$ ，在变换 S 的作用下具有不变性，即系统关于 z 轴对称，并且这种对称性对所有的系统参数均成立。

2.2 平衡点及其稳定性

令系统的每一个方程等于零，得系统的唯一平衡点 $O(0, 0, 0, 0)$ ，它与系统参数的取值无关。系统在平衡点 $O(0, 0, 0, 0)$ 处的 Jacobi 矩阵为

$$J = \begin{pmatrix} -10 & 10 & 0 & 0 \\ 35 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1.4 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

其特征方程 $(\lambda + 1.4)(\lambda^3 + 10\lambda^2 - 350\lambda + 130) = 0$ ，四个特征根分别是 $\lambda_1 = -1.4, \lambda_2 = -24.5014, \lambda_3 = 14.1258, \lambda_4 = 0.3756$ 都为实根，其中两个为正值，两个为负值，所以此平衡点是不稳定的鞍点，这从理论上证明了该系统存在超混沌的可能性。

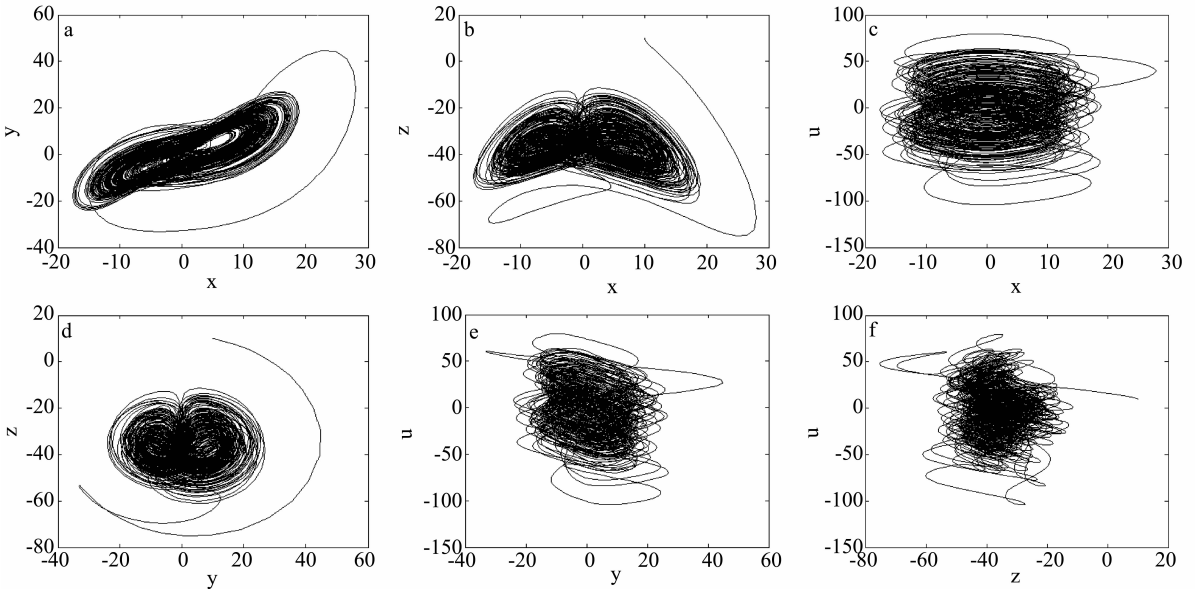


图 1 系统的超混沌吸引子在各平面上的投影

Fig. 1 Phase portraits of hyperchaotic attractors of system

(a) x - y plane; (b) x - z plane; (c) x - u plane; (d) y - z plane; (e) y - u plane; (f) z - u plane

2.3 吸引子的存在性与有界性

对于新系统有 $\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{u}}{\partial u} = -a - c = -11.4 < 0$, 系统是耗散的, 说明当选取上述参数时系统的状态变化时有界的, 并以指数形式 $\frac{dV}{dt} = e^{-11.4}$ 收敛。当 $t \rightarrow \infty$ 时, 包含系统轨线的每个小体积元以指数速率 -11.4 收缩到零, 所有系统的轨线最终会被限制在一个体积为零的极限子集上, 其渐近运动将被固定在一个吸引子上, 由此表明了吸引子的存在性与有界性。

2.4 动力学行为演化

在已有的混沌分析方法中, 只有 Lyapunov 指数法可以区分系统是处于混沌状态还是超混沌状态, 其它方法均不能区分系统是处于混沌状态还是超混沌状态^[14]。当固定 $a = 10, b = 35, c = 1.4$, 变量 x 随新引入的参数 m 在 $[0, 40]$ 变化的分岔图和 Lyapunov 指数谱图 (这里略去了第四根 Lyapunov

指数曲线) 如图 2 (a) 和 (b) 所示。利用 Lyapunov 指数谱分析时, 对于平衡点有 $LE_4 < LE_3 < LE_2 < LE_1 < 0$; 周期轨有 $LE_1 = 0, LE_4 < LE_3 < LE_2 < 0$; 拟周期轨有 $LE_1 = LE_2 = 0, LE_4 < LE_3 < 0$; 混沌有 $LE_1 > 0, LE_2 = 0, LE_4 < LE_3 < 0, LE_1 + LE_2 + LE_3 + LE_4 < 0$; 而对于超混沌则有 $LE_1 > LE_2 > 0, LE_3 = 0, LE_4 < 0, LE_1 + LE_2 + LE_3 + LE_4 < 0$ 。从图 2 (b) 可以看出, 当 $m \in [0, 23.4]$ 时, 存在两个正的 Lyapunov 指数, 显然系统处于超混沌状态; 而 $m \in [23.4, 30]$ 时系统的 $LE_1 = 0, LE_4 < LE_3 < LE_2 < 0$, 表明系统处于周期状态; $m \in [30, 34.6]$ 时, 系统的 $LE_1 = LE_2 = 0, LE_4 < LE_3 < 0$, 表明系统处于拟周期状态; $m \in [34.6, 40]$ 时, 系统的 $LE_1 = 0, LE_4 < LE_3 < LE_2 < 0$, 表明系统处于周期状态。可见随着 m 的增加系统由超混沌演化到周期状态, 拟周期状态, 最后演化到周期一状态, 这与分岔图 (a) 是吻合的。

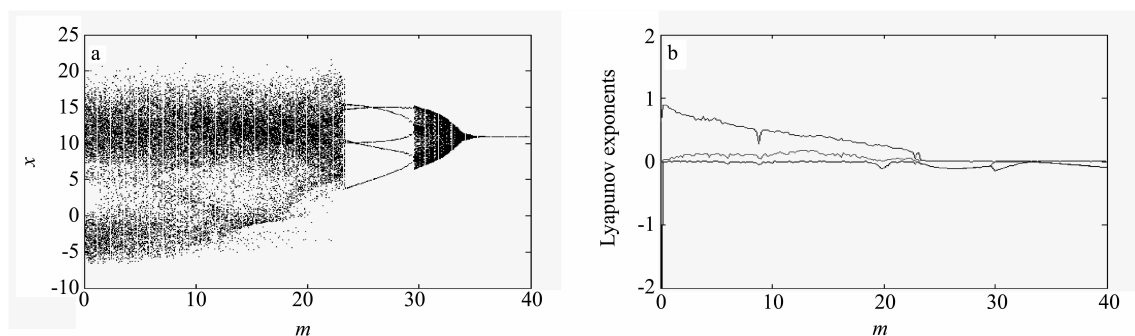


图 2 (a) 系统的分岔图, (b) 系统的 Lyapunov 指数谱图

Fig. 2 (a) Bifurcation diagram of the system, (b) Lyapunov exponents spectrum of the system

为了说明系统中周期和拟周期轨迹的特点, 本文分别对典型参数 $m = 25, 31, 40$ 这些 m 值上的相轨迹进行数值仿真, 经计算当 $m = 25$ 时系统的 Lyapunov 指数为 $0, -0.091, -0.099, -11.2046$, 系统处于周期状态; 当 $m = 31$ 时系统的 Lyapunov 指数为 $0, 0, -0.0893, -11.3076$, 系统处于拟周

期状态; 当 $m = 40$ 时系统的 Lyapunov 指数为 $0, -0.0942, -0.0916, -11.2142$, 系统处于周期状态。图 3 和图 4 分别给出了系统在 $z-u$ 平面上和 $x-u$ 平面上的相轨迹图, 由图可见系统的各状态在不同平面上的相轨迹具有不同的形状。

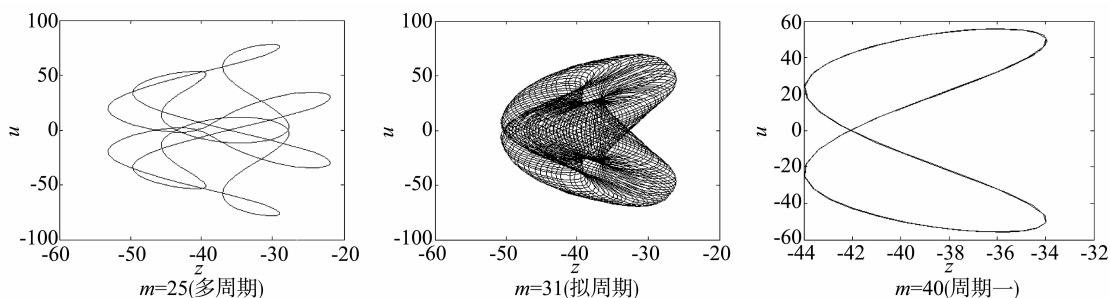


图 3 系统的相轨迹在 $z-u$ 平面上的投影

Fig. 3 Phase portraits of system in $z-u$ plane

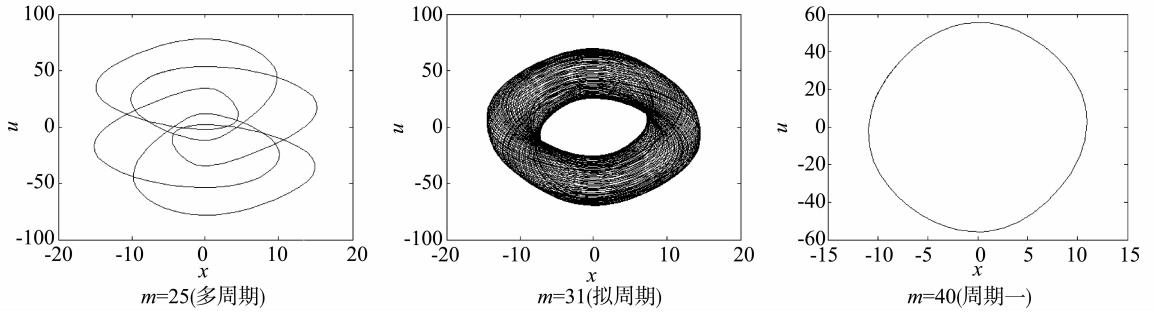


图 4 系统的相轨迹在 $x-u$ 平面上的投影

Fig. 4 Phase portraits of system in $x-u$ plane

3 新超混沌系统的线性反馈同步

设驱动系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 10(x_2 - x_1) \\ \dot{x}_2 = x_1x_3 + 35x_1 - x_4 \\ \dot{x}_3 = -x_1x_2 - 1.4x_3 \\ \dot{x}_4 = 13x_1 \end{cases}$$

构造响应系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 10(x_2 - y_1) \\ \dot{y}_2 = y_1y_3 + 35y_1 - y_4 \\ \dot{y}_3 = -y_1y_2 - 1.4y_3 \\ \dot{y}_4 = 13y_1 + p \end{cases}$$

其中 p 为待设计的线性反馈控制器。

令误差变量为

$$\begin{cases} e_1 = y_1 - x_1 \\ e_2 = y_2 - x_2 \\ e_3 = y_3 - x_3 \\ e_4 = y_4 - x_4 \end{cases}$$

则两系统的误差系统可化为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -10e_1 \\ \dot{e}_2 = 35e_1 - e_4 + y_1e_3 + x_3e_1 \\ \dot{e}_3 = -1.4e_3 - x_2e_1 - y_1e_2 \\ \dot{e}_4 = 13e_1 + p \end{cases}$$

选取线性控制器 $p = -13e_1 - 10e_4$ ，则误差系统可进一步化为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -10e_1 \\ \dot{e}_2 = 35e_1 - e_4 + y_1e_3 + x_3e_1 \\ \dot{e}_3 = -1.4e_3 - x_2e_1 - y_1e_2 \\ \dot{e}_4 = -10e_4 \end{cases}$$

对 e_1 构造正定的 Lyapunov 函数 $V = \frac{1}{2}e_1^2$ ，则 $\dot{V} = e_1\dot{e}_1 = -10e_1^2 < 0$ ，根据 Lyapunov 稳定性定理知 e_1 能够渐近稳定于零点，同理， e_4 也能渐近稳定于零点。由于混沌系统的状态变量的有界性，通过误差系统内部的自组织作用， e_2, e_3 也能渐近稳定于零点，所以整个误差系统就会被“牵制”到零点，从而驱动系统和响应系统同步。设驱动系统的初始值仍为 $(10, 10, 10, 10)$ ，响应系统的初始值为 $(1, 1, 1, 1)$ ，时间 t 的步长为 0.001，在线性控制器作用下同步误差曲线模拟结果如图 5 所示，由图 5 可以看出，经过一个暂态过程后误差变量 e_1, e_2, e_3, e_4 全部趋向于零，这表明驱动系统和响应系统达到了同步。

4 结 论

本文基于一个三维混沌系统构造了一个新的四维超混沌系统，简要地分析了系统的基本动力学行为，通过分岔图、Lyapunov 指数谱及相图的数值仿真研究了超混沌系统的运动规律。设计了一种线性牵制控制器，实现了该系统的线性反馈同步，结果表明该方法容易实现、同步速度快、同步结果稳定。所得结果为该超混沌系统在混沌保密通信中的应用提供了理论参考。

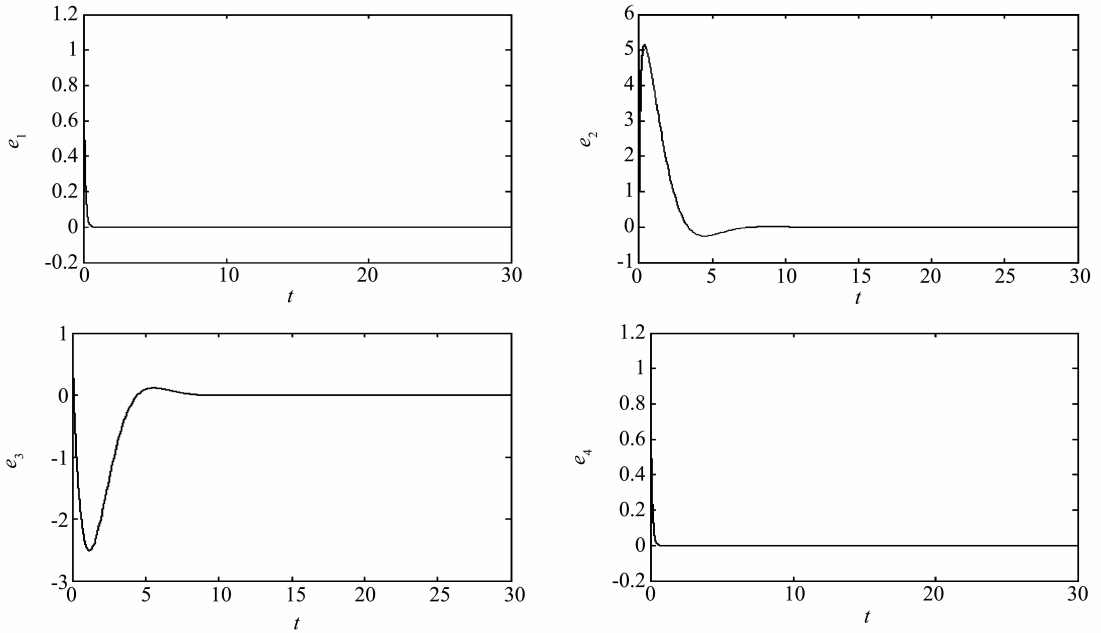


图 5 两系统的同步误差曲线

Fig. 5 Synchronization error curve of two systems

参考文献:

- [1] WANG G Y, LIU J B, ZHENG X. Analysis and implementation of a new hyperchaotic system [J]. Chinese Physics B, 2007, 16 (8) : 2278 - 2284.
- [2] LIU C X. A new hyperchaotic dynamical system [J]. Chinese Physics B, 2007, 16(11) : 3279 - 3284.
- [3] WANG J Z, CHEN Z Q, YUAN Z Z. The generation of a hyperchaotic system based on a three-dimensional autonomous chaotic system [J]. Chinese Physics B, 2006, 15 (6) : 1216 - 1225.
- [4] WANG G Y, BAO X L, WANG Z L. Design and FPGA implementation of a new hyper-chaotic system [J]. Chinese Physics B, 2008, 17(10) : 3596 - 3602.
- [5] WU W J, CHEN Z Q, YUAN Z Z. Local bifurcation analysis of a four-dimensional hyperchaotic system [J]. Chinese Physics, 2008, 17(07) : 2420 - 2432.
- [6] 刘扬正, 姜长生. 关联可切换超混沌系统的构建与特性分析[J]. 物理学报, 2009, 58(2) : 771 - 778.
- [7] 刘明华, 冯久超. 一个新的超混沌系统[J]. 物理学报, 2009, 58(7) : 4457 - 4462.
- [8] 高智中, 张程. 一个新超混沌系统[J]. 吉首大学学报, 2011, 32(5) : 65 - 68.
- [9] 唐良瑞, 李静, 樊冰. 一个新四维自治超混沌系统及其电路实现[J]. 物理学报, 2009, 58(3) : 1446 - 1455.
- [10] 仓诗建, 陈增强, 袁著祉. 一个新四维非自治超混沌系统的分析与电路实现[J]. 物理学报, 2008, 57 (3) : 1493 - 1501.
- [11] 杜洪越, 曾庆双, 王常虹, 等. 不同混沌系统的改进函数投影同步一般方法[J]. 系统仿真学报, 2011, 23 (3) : 558 - 561.
- [12] LIU L, SU Y C, LIU C X. A new reversed butterfly-shaped attractor [J]. Non Sci and Numer Simu, 2006 (7) : 182 - 188.
- [13] Rossler O E. An equation for hyperchaos [J]. Physics Letters A, 1979, 71 (2/3) : 155 - 157.
- [14] 陈关荣, 吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步[M]. 北京: 科学出版社, 2003.