

5 类图完美匹配的计数*

唐保祥¹, 任 韩²

(1. 天水师范学院数学与统计学院, 甘肃 天水 741001;

2. 华东师范大学数学系, 上海 200062)

摘要: 匹配计数理论是图论的核心内容之一, 由于得到应用领域的支持, 并与其他理论课题发生密切联系, 受到众多学者的关注, 产生出许多含义丰富而深刻的理论成果。但是, 一般图的完美匹配计数问题却是 NP -困难的。用划分、求和、再递推的方法给出了 5 类图完美匹配数目的显式表达式。所给出的方法, 可以计算出许多二分图的所有完美匹配的数目。

关键词: 完美匹配; 线性递推式; 棋盘

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2012) 04-0031-07

The Number of Perfect Matchings in Five Types of Graphs

TANG Baoxiang¹, REN Han²

(1. School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui 741001, China;

2. Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai 200062, China)

Abstract: Matching counting theory is the core of graph theory. Since it has important applications and is in connection with other theoretic problems closely, it has been studied extensively. And many celebrated results have been established. But the problem of counting the number of perfect matchings for general graphs is NP -hard. By applying differentiation, summation and re-recursion calculation, several counting formulas of the perfect matchings for five specific types of graphs are given. The number of all perfect matchings of many bipartite graphs can be calculated with this method.

Key words: perfect matching; linear recurrence relation; chessboard

匹配理论是图论研究的重要内容之一, 是一个有生机活力的研究领域, 它不仅具有很强的应用背景, 而且在过去的几十年中, 它是快速发展的组合论中许多重要思想的源泉。图的完美匹配计数理论又是匹配理论的研究内容之一。图的完美匹配计数理论已经在多个领域得到应用^[1-5], 也引起了众多数学家, 物理学家和化学家的广泛关注^[6-10]。遗憾的是, Valiant 在 1979 年证明了: 一个图 (即使是偶图) 的完美匹配计数是 NP -难问题。因此, 要得到一般图的完美匹配数的计算公式是困难的。目前, 已有一些文献对一些特殊图的完美匹配计数作了相关的研究^[11-19]。本文给出了 5 类图完美匹

配数目的计算公式, 所给方法, 适合相同结构重复出现的很多偶图完美匹配数的求解。

1 基本概念

定义 1 设 $m + 1$ 条长为 n 的路 $P_i = u_{i1}u_{i2}u_{i3}\cdots u_{i,n+1}$ ($i = 1, 2, \dots, m, m + 1$), 连接路 P_i 与 P_{i+1} 中的顶点 u_{ij} 与 $u_{i+1,j}$ ($i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n, n + 1$) 所得的图, 称为 $m \times n$ 的棋盘。本文将 $m \times n$ 的棋盘记为 $Q_{m \times n}$ 。

定义 2 若图 G 的两个完美匹配 M_1 和 M_2 中有一条边不同, 则称 M_1 和 M_2 是 G 的两个不同完美匹配。

* 收稿日期: 2011-12-06

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11171114)

作者简介: 唐保祥 (1961 年生), 男, 副教授; E-mail: tbx0618@sina.com

2 结果及其证明

定理 1 棋盘 $Q_{3 \times 1}^i$ 的顶点集为 $V(Q_{3 \times 1}^i) = \{u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, u_{4i}, v_{1i}, v_{2i}, v_{3i}, v_{4i}\}$, $i = 1, 2, \dots, n$ 。分别连接棋盘 $Q_{3 \times 1}^i$ 和 $Q_{3 \times 1}^{i+1}$ 的顶点 v_{1i} 和 $u_{1,i+1}$, v_{4i} 和 $u_{4,i+1}$ ($i = 1, 2, \dots, n-1$) 所得到的图记为 $2-a-nQ_{3 \times 1}$, 如图所示 1。 $f(n)$ 表示图 $2-a-nQ_{3 \times 1}$ 的完美匹配的数目, 则

$$f(n) = \frac{13 + 3\sqrt{13}}{26} \cdot \left(\frac{7 + \sqrt{13}}{2}\right)^n + \frac{13 - 3\sqrt{13}}{26} \cdot \left(\frac{7 - \sqrt{13}}{2}\right)^n$$

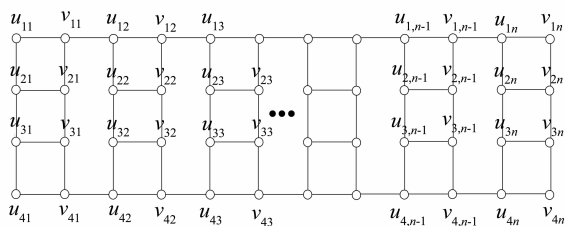


图 1 $2-a-nQ_{3 \times 1}$ 图

Fig. 1 Figure of $2-a-nQ_{3 \times 1}$

证明 为了求 $f(n)$, 先定义一个图 G_1 , 并求其完美匹配的数目。将长为 3 的路 $v_1v_2v_3v_4$ 的端点 v_1 和 v_4 分别与图 $2-a-nQ_{3 \times 1}$ 的顶点 u_{11} 和 u_{41} 各连接一条边; 再将长为 1 的路 u_1u_2 的端点 u_1 和 u_2 分别与路 $v_1v_2v_3v_4$ 的顶点 v_2 和 v_3 各连接一条边, 这样得到的图记为 G_1 , 如图 2 所示。易知图 G_1 有完美匹配。 $\sigma(n)$ 表示图 G_1 的完美匹配的数目。设图 G_1 完美匹配的集合为 \mathcal{M} , 图 G_1 的含边 u_1v_2, u_1u_2 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 。则 $\mathcal{M}_i \neq \emptyset, i = 1, 2; \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$ 。所以 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2, \sigma(n) = |\mathcal{M}| = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|$ 。

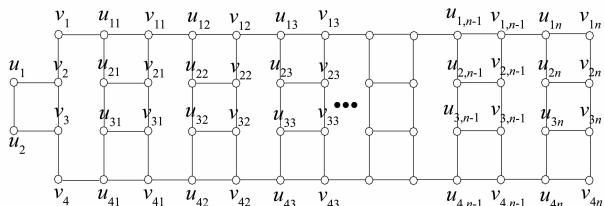


图 2 G_1 图

Fig. 2 Figure of G_1

$v_1u_{11}, v_4u_{41} \in M_1$ 。由 $\sigma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_1| = \sigma(n-1)$ 。

求 $|\mathcal{M}_2|$

情形 1: $\mathcal{M}_{21} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{21} \in \mathcal{M}_{21}, u_1u_2, v_2v_3, v_1u_{11}, v_4u_{41} \in M_{21}$ 。由 $\sigma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{21}| = \sigma(n-1)$ 。

情形 2: $\mathcal{M}_{22} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{22} \in \mathcal{M}_{22}, u_1u_2, v_1v_2, v_3v_4 \in M_{22}$ 。由 $f(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{22}| = f(n)$ 。易知 $\mathcal{M}_{21} \cap \mathcal{M}_{22} = \emptyset, \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{21} \cup \mathcal{M}_{22}$ 。故 $|\mathcal{M}_2| = \sigma(n-1) + f(n)$ 。

综上所述,

$$\sigma(n) = 2\sigma(n-1) + f(n) \tag{1}$$

再求 $f(n)$ 。易知图 $2-a-nQ_{3 \times 1}$ 有完美匹配。设图 $2-a-nQ_{3 \times 1}$ 的完美匹配的集合为 \mathcal{M} , 图 $2-a-nQ_{3 \times 1}$ 的含边 $u_{11}v_{11}, u_{11}u_{21}$ 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 。则 $\mathcal{M}_i \neq \emptyset, i = 1, 2; \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$ 。所以 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2, f(n) = |\mathcal{M}| = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|$ 。

求 $|\mathcal{M}_1|$ 。

情形 1: $\mathcal{M}_{11} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{11} \in \mathcal{M}_{11}, u_{11}v_{11}, u_{21}v_{21}, u_{31}v_{31}, u_{41}v_{41} \in M_{11}$ 。由 $f(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{11}| = f(n-1)$ 。

情形 2: $\mathcal{M}_{12} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{12} \in \mathcal{M}_{12}, u_{11}v_{11}, u_{21}v_{21}, u_{31}u_{41}, v_{31}v_{41} \in M_{12}$ 。由 $f(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{12}| = f(n-1)$ 。

情形 3: $\mathcal{M}_{13} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{13} \in \mathcal{M}_{13}, u_{11}v_{11}, u_{21}u_{31}, v_{21}v_{31}, u_{41}v_{41} \in M_{13}$ 。由 $f(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{13}| = f(n-1)$ 。

易知 $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_{11} \cup \mathcal{M}_{12} \cup \mathcal{M}_{13}, \mathcal{M}_{1i} \cap \mathcal{M}_{1j} = \emptyset, i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3$ 。综上所述, $|\mathcal{M}_1| = 3f(n-1)$ 。

求 $|\mathcal{M}_2|$ 。

情形 1: $\mathcal{M}_{21} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{21} \in \mathcal{M}_{21}, u_{11}u_{21}, v_{11}v_{21}, u_{31}v_{31}, u_{41}v_{41} \in M_{21}$ 。由 $f(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{21}| = f(n-1)$ 。

情形 2: $\mathcal{M}_{22} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{22} \in \mathcal{M}_{22}, u_{11}u_{21}, v_{11}v_{21}, u_{31}u_{41}, v_{31}v_{41} \in M_{22}$ 。由 $f(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{22}| = f(n-1)$ 。

情形 3: $\mathcal{M}_{23} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{23} \in \mathcal{M}_{23}, u_{11}u_{21}, u_{31}u_{41}, v_{21}v_{31}, v_{11}u_{12}, v_{41}u_{42} \in M_{23}$ 。由 $\sigma(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{23}| = \sigma(n-2)$ 。

易知 $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{21} \cup \mathcal{M}_{22} \cup \mathcal{M}_{23}, \mathcal{M}_{2i} \cap \mathcal{M}_{2j} = \emptyset, i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3$ 。综上所述, $|\mathcal{M}_2| = |\mathcal{M}_{21}| + |\mathcal{M}_{22}| + |\mathcal{M}_{23}|, |\mathcal{M}_2| = 2f(n-1) + \sigma(n-2)$ 。故

求 $|\mathcal{M}_1|$ 。

$\forall M_1 \in \mathcal{M}_1$, 因为 $u_1v_2 \in M_1$, 所以 u_2v_3 ,

$$f(n) = 5f(n - 1) + \sigma(n - 2) \quad (2)$$

由 (1) 式和 (2) 式, 有

$$f(n) = 5f(n - 1) + f(n - 2) + 2\sigma(n - 3) \quad (3)$$

$$f(n - 1) = 5f(n - 2) + \sigma(n - 3) \quad (4)$$

由 (3) 式 $-2 \times (4)$ 式, 得

$$f(n) = 7f(n - 1) - 9f(n - 2) \quad (5)$$

易知 $f(1) = 5, f(2) = 26$ 。解线性递推式 (5), 得

$$f(n) = \frac{13 + 3\sqrt{13}}{26} \cdot \left(\frac{7 + \sqrt{13}}{2}\right)^n + \frac{13 - 3\sqrt{13}}{26} \cdot \left(\frac{7 - \sqrt{13}}{2}\right)^n$$

证毕。

定理 2 棋盘 $Q_{3 \times 1}^i$ 的顶点集为 $V(Q_{3 \times 1}^i) = \{u_{1i}, u_{2i}, u_{3i}, u_{4i}, v_{1i}, v_{2i}, v_{3i}, v_{4i}\}, i = 1, 2, \dots, n$ 。分别连接棋盘 $Q_{3 \times 1}^i$ 和 $Q_{3 \times 1}^{i+1}$ 的顶点 v_{2i} 和 $u_{2,i+1}, v_{3i}$ 和 $u_{3,i+1} (i = 1, 2, \dots, n - 1)$ 所得到的图记为 $2 - b - nQ_{3 \times 1}$, 如图所示 3。 $g(n)$ 表示图 $2 - b - nQ_{3 \times 1}$ 的完美匹配的数目, 则

$$g(n) = \frac{5 + 2\sqrt{5}}{10} \cdot (3 + \sqrt{5})^n + \frac{5 - 2\sqrt{5}}{10} \cdot (3 - \sqrt{5})^n$$

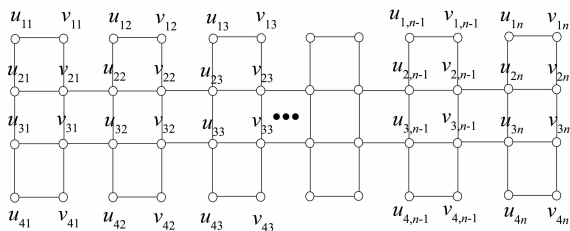


图 3 $2 - b - nQ_{3 \times 1}$ 图

Fig. 3 Figure of $2 - b - nQ_{3 \times 1}$

证明 为了求 $g(n)$, 先定义一个图 G_2 , 并求其完美匹配的数目。将长为 1 的路 $u_1 u_2$ 的端点 u_1 和 u_2 分别与图 $2 - b - nQ_{3 \times 1}$ 的顶点 u_{21} 和 u_{31} 各连接一条边得到的图记为 G_2 , 如图 4 所示。易知图 G_2 有完美匹配。 $\tau(n)$ 表示图 G_2 的完美匹配的数目。设图 G_2 完美匹配的集合为 \mathcal{M} , G_2 含边 $u_1 u_{21}$, $u_1 u_2$ 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 。则 $\mathcal{M}_i \neq \emptyset, i = 1, 2; \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$ 。所以 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2, \tau(n) = |\mathcal{M}| = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|$ 。

求 $|\mathcal{M}_1|$: $\forall M_1 \in \mathcal{M}_1$, 因为 $u_1 u_{21} \in M_1$, 所以 $u_2 u_{31}, u_{11} v_{11}, u_{41} v_{41} \in M_1$ 。故由 $\tau(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_1| = \tau(n - 1)$ 。

求 $|\mathcal{M}_2|$: $\forall M_2 \in \mathcal{M}_2$, 因为 $u_1 u_2 \in M_2$, 所

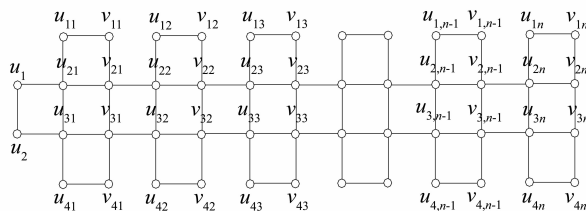


图 4 G_2 图

Fig. 4 Figure of G_2

以由 $g(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_2| = g(n)$ 。

故

$$\tau(n) = g(n) + \tau(n - 1) \quad (6)$$

求 $g(n)$ 的值。易知图 $2 - b - nQ_{3 \times 1}$ 有完美匹配。设图 $2 - b - nQ_{3 \times 1}$ 的完美匹配的集合为 \mathcal{M} , 图 $2 - b - nQ_{3 \times 1}$ 含边 $u_{11} v_{11}, u_{11} u_{21}$ 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 。则 $\mathcal{M}_i \neq \emptyset, i = 1, 2; \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$ 。所以 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2, g(n) = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|$ 。

求 $|\mathcal{M}_1|$ 。

情形 1: $\mathcal{M}_{11} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{11} \in \mathcal{M}_{11}, u_{11} v_{11}, u_{21} v_{21}, u_{31} v_{31}, u_{41} v_{41} \in M_{11}$ 。由 $g(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{11}| = g(n - 1)$ 。

情形 2: $\mathcal{M}_{12} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{12} \in \mathcal{M}_{12}, u_{11} v_{11}, u_{21} v_{21}, u_{31} u_{41}, v_{31} v_{41} \in M_{12}$ 。由 $g(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{12}| = g(n - 1)$ 。

情形 3: $\mathcal{M}_{13} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{13} \in \mathcal{M}_{13}, u_{11} v_{11}, u_{21} u_{31}, v_{21} v_{31}, u_{41} v_{41} \in M_{13}$ 。由 $g(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{13}| = g(n - 1)$ 。

情形 4: $\mathcal{M}_{14} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{14} \in \mathcal{M}_{14}, u_{11} v_{11}, u_{21} u_{31}, u_{41} v_{41}, v_{21} u_{22}, v_{31} u_{32}, u_{12} v_{12}, u_{42} v_{42} \in M_{14}$ 。由 $\tau(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{14}| = \tau(n - 2)$ 。

易知 $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_{11} \cup \mathcal{M}_{12} \cup \mathcal{M}_{13} \cup \mathcal{M}_{14}, \mathcal{M}_{1i} \cap \mathcal{M}_{1j} = \emptyset, i \neq j, 1 \leq i, j \leq 4$ 。

综上所述, 有 $|\mathcal{M}_1| = 3g(n - 1) + \tau(n - 2)$ 。

求 $|\mathcal{M}_2|$ 。

情形 1: $\mathcal{M}_{21} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{21} \in \mathcal{M}_{21}, u_{11} u_{21}, v_{11} v_{21}, u_{31} v_{31}, u_{41} v_{41} \in M_{21}$ 。由 $g(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{21}| = g(n - 1)$ 。

情形 2: $\mathcal{M}_{22} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{22} \in \mathcal{M}_{22}, u_{11} u_{21}, u_{31} u_{41}, v_{11} v_{21}, v_{31} v_{41} \in M_{22}$ 。由 $g(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{22}| = g(n - 1)$ 。显然 $\mathcal{M}_{21} \cap \mathcal{M}_{22} = \emptyset, \mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{21} \cup \mathcal{M}_{22}, |\mathcal{M}_2| = |\mathcal{M}_{21}| + |\mathcal{M}_{22}|$, 故 $|\mathcal{M}_2| = 2g(n - 1)$ 。

综上所述,

$$g(n) = 5g(n - 1) + \tau(n - 2) \quad (7)$$

由 (6) 式和 (7) 式, 得

$$g(n) = 5g(n-1) + g(n-2) + \tau(n-3) \quad (8)$$

再由 (7) 式, 得

$$g(n-1) = 5g(n-2) + \tau(n-3) \quad (9)$$

又由 (8) 式 - (9) 式, 得

$$g(n) = 6g(n-1) - 4g(n-2) \quad (10)$$

易知 $g(1) = 5, g(2) = 26$ 。解线性递推式 (10), 得

$$g(n) = \frac{5+2\sqrt{5}}{10} \cdot (3+\sqrt{5})^n + \frac{5-2\sqrt{5}}{10} \cdot (3-\sqrt{5})^n$$

证毕。

定理 3 设 5 圈 C_5^i 的顶点集为 $V(C_5^i) = \{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}, u_{i5}\}, i = 1, 2, \dots, 2n$ 。圈 C_5^i 与 C_5^{i+1} 的顶点 u_{i1} 与 $u_{i+1,1}, u_{i2}$ 与 $u_{i+1,5}, u_{i3}$ 与 $u_{i+1,4}$ 之间分别连接一条边 ($i = 1, 2, \dots, 2n-1$) 所得到的图记为 $3-2nC_5$, 如图 5 所示。 $\varphi(n)$ 表示图 $3-2nC_5$ 的完美匹配的数目, 则

$$\varphi(n) = \frac{7+2\sqrt{7}}{21} \cdot (4+\sqrt{7})^n + \frac{7-2\sqrt{7}}{21} \cdot (4-\sqrt{7})^n$$

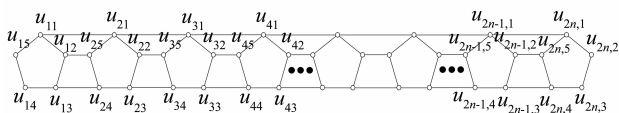


图 5 $3-2nC_5$ 图

Fig. 5 Figure of $3-2nC_5$

证明 为了求 $\varphi(n)$, 先定义图 G_3 和 G_4 如下: 将路 uv 的两端点 u, v 分别与图 $3-2nC_5$ 的顶点 u_{15}, u_{14} 各连接一条边, 得到的图记为 G_3 , 如图 6 所示。将路 uv 的两端点 u, v 分别与图 $3-2nC_5$ 的顶点 u_{11}, u_{15} 各连接一条边, 得到的图记为 G_4 , 如图 7 所示。

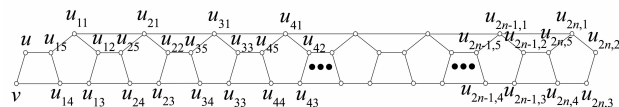


图 6 G_3 图

Fig. 6 Figure of G_3

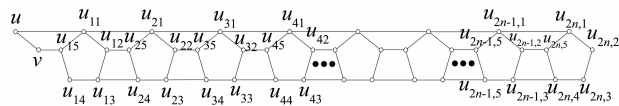


图 7 G_4 图

Fig. 7 Figure of G_4

易知图 $3-2nC_5, G_3, G_4$ 均有完美匹配。 $h(n), \theta(n)$ 分别表示图 G_3 和 G_4 的完美匹配的数目。

先求 $h(n)$ 。设图 G_3 完美匹配的集合为 \mathcal{M} , 图 G_3 含边 $uv, u_{15}u_{14}$ 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 。则 $\mathcal{M}_i \neq \emptyset, i = 1, 2; \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$ 。所以 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, 从而 $h(n) = |\mathcal{M}| = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|$ 。

求 $|\mathcal{M}_1|$: $\forall M_1 \in \mathcal{M}_1$, 因为 $uv \in M_1$, 所以由 $\varphi(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_1| = \varphi(n)$ 。

求 $|\mathcal{M}_2|$ 。

情形 1: $\mathcal{M}_{21} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{21} \in \mathcal{M}_{21}, u_{15}u_{14}, u_{11}u_{21}, u_{12}u_{25}, u_{13}u_{24} \in M_{21}$ 。由 $h(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{21}| = h(n-1)$ 。

情形 2: $\mathcal{M}_{22} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{22} \in \mathcal{M}_{22}, u_{15}u_{14}, u_{11}u_{21}, u_{12}u_{13}, u_{25}u_{24} \in M_{22}$ 。由 $h(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{22}| = h(n-1)$ 。

情形 3: $\mathcal{M}_{23} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{23} \in \mathcal{M}_{23}, u_{15}u_{14}, u_{11}u_{12}, u_{21}u_{25}, u_{13}u_{24} \in M_{23}$ 。由 $h(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{23}| = h(n-1)$ 。易知 $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{21} \cup \mathcal{M}_{22} \cup \mathcal{M}_{23}, \mathcal{M}_{2i} \cap \mathcal{M}_{2j} = \emptyset, i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3$ 。所以就有 $|\mathcal{M}_2| = |\mathcal{M}_{21}| + |\mathcal{M}_{22}| + |\mathcal{M}_{23}| = 3h(n-1)$ 。

综上所述,

$$h(n) = \varphi(n) + 3h(n-1) \quad (11)$$

再求 $\theta(n)$ 。设图 G_4 的完美匹配的集合为 \mathcal{M} , 图 G_4 含边 $uv, u_{11}u_{15}$ 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 。则 $\mathcal{M}_i \neq \emptyset, i = 1, 2; \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$ 。所以 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2, \theta(n) = |\mathcal{M}| = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|$ 。

求 $|\mathcal{M}_1|$: 因为 $\forall M_1 \in \mathcal{M}_1, uv \in M_1$, 所以由 $\varphi(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_1| = \varphi(n)$ 。

求 $|\mathcal{M}_2|$: $\forall M_2 \in \mathcal{M}_2$, 因为 $u_{11}u_{15} \in M_2$, 所以必有 $u_{14}u_{13}, u_{12}u_{25}, u_{24}u_{23} \in M_2$, 所以由 $\theta(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_2| = \theta(n-1)$ 。

综上所述,

$$\theta(n) = \varphi(n) + \theta(n-1) \quad (12)$$

最后求 $\varphi(n)$ 。设图 $3-2nC_5$ 的完美匹配的集合为 \mathcal{M} , 图 $3-2nC_5$ 含边 $u_{15}u_{11}, u_{15}u_{14}$ 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 。则 $\mathcal{M}_i \neq \emptyset, i = 1, 2; \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$ 。所以 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2, \varphi(n) = |\mathcal{M}| = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|$ 。

求 $|\mathcal{M}_1|$: $\forall M_1 \in \mathcal{M}_1$, 因为 $u_{15}u_{11} \in M_1$, 所以必有 $u_{14}u_{13}, u_{12}u_{25}, u_{24}u_{23} \in M_1$, 由 $h(n)$ 定义知, $|\mathcal{M}_1| = \theta(n-1)$ 。

求 $|\mathcal{M}_2|$ 。

情形 1: $\mathcal{M}_{21} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{21} \in \mathcal{M}_{21}, u_{15}u_{14}, u_{11}u_{21}, u_{12}u_{25}, u_{13}u_{24} \in M_{21}$ 。由 $\theta(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{21}| = h(n-1)$ 。

情形 2: $\mathcal{M}_{22} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{22} \in \mathcal{M}_{22}, u_{15}u_{14}, u_{11}u_{21}, u_{12}u_{13}, u_{25}u_{24} \in M_{22}$ 。由 $h(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{22}| = h(n-1)$ 。

情形 3: $\mathcal{M}_{23} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{23} \in \mathcal{M}_{23}, u_{15}u_{14}, u_{11}u_{12}, u_{21}u_{25}, u_{13}u_{24} \in M_{23}$ 。由 $h(n)$ 的定义知, $|\mathcal{M}_{23}| = h(n-1)$ 。

易知 $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{21} \cup \mathcal{M}_{22} \cup \mathcal{M}_{23}, \mathcal{M}_{2i} \cap \mathcal{M}_{2j} = \emptyset, i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3$ 。综上所述, $|\mathcal{M}_2| = |\mathcal{M}_{21}| + |\mathcal{M}_{22}| + |\mathcal{M}_{23}| = 3h(n-1)$ 。故

$$\varphi(n) = 3h(n-1) + \theta(n-1) \quad (13)$$

由 (11) 式、(12) 式和 (13) 式, 有

$$\varphi(n) = 4\varphi(n-1) + 9h(n-2) + \theta(n-2) \quad (14)$$

由 (13) 式, 得

$$\varphi(n-1) = 3h(n-2) + \theta(n-2) \quad (15)$$

再由 (14) 式 - 3 × (15) 式, 得

$$\varphi(n) = 7\varphi(n-1) - 2\theta(n-2) \quad (16)$$

由 (12) 式和 (16) 式, 得

$$\varphi(n) = 7\varphi(n-1) - 2\varphi(n-2) - 2\theta(n-3) \quad (17)$$

再由 (16) 式, 得

$$\varphi(n-1) = 7\varphi(n-2) - 2\theta(n-3) \quad (18)$$

又由 (17) 式 - (18) 式, 得

$$\varphi(n) = 8\varphi(n-1) - 9\varphi(n-2) \quad (19)$$

易知 $\varphi(1) = 4, h(1) = 7, \theta(1) = 5$, 所以由 (13) 式知, $\varphi(2) = 26$ 。解线性递推式 (19), 得

$$\varphi(n) = \frac{7+2\sqrt{7}}{21} \cdot (4+\sqrt{7})^n + \frac{7-2\sqrt{7}}{21} \cdot (4-\sqrt{7})^n$$

证毕。

定理 4 $2n$ 个长为 5 的圈 C_5 的顶点集为 $V(C_5) = \{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}, u_{i5}\}$, 边集为 $E(C_5) = \{u_{i1}u_{i3}, u_{i3}u_{i5}, u_{i5}u_{i2}, u_{i2}u_{i4}, u_{i4}u_{i1}\}, i = 1, 2, \dots, 2n$ 。连结顶点 u_{j1} 和 $u_{j+1,1}, u_{j3}$ 和 $u_{j+1,4}, j = 1, 2, \dots, 2n-1$ 。这样得到的图记为 $2-2nS_5$, 如图 8 所示。 $\psi(n)$ 表示图 $2-2nS_5$ 的完美匹配数, 其中 $n = 1, 2, 3, \dots$ 。则

$$\psi(n) = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

证明 易知图 $2-2nS_5$ 有完美匹配。设图 $2-2nS_5$ 的完美匹配集合为 \mathcal{M} , 图 $2-2nS_5$ 含边 $u_{12}u_{15}, u_{13}u_{15}$ 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 。则 $\mathcal{M}_i \neq \emptyset, i = 1, 2; \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$, 所以 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup$

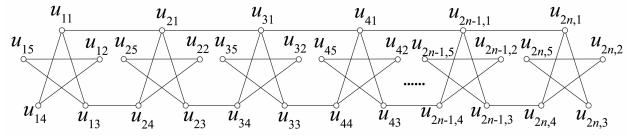


图 8 $2-2nS_5$

Fig. 8 Figure of $2-2nS_5$

\mathcal{M}_2 。故 $\psi(n) = |\mathcal{M}| = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|$ 。

求 $|\mathcal{M}_1|$: $\forall M_1 \in \mathcal{M}_1$ 。因为 $u_{12}u_{15} \in M_1$, 所以必有 $u_{11}u_{14}, u_{13}u_{24}, u_{22}u_{25} \in M_1$ 。若 $u_{21}u_{23} \in M_1$, 则 \mathcal{M}_1 中这类完美匹配数为 $\psi(n-2)$ 。若 $u_{21}u_{23} \notin M_1$, 则必有 $u_{21}u_{31}, u_{23}u_{34}, u_{32}u_{35}, u_{33}u_{44}, u_{42}u_{45} \in M_1$; 当 $u_{41}u_{43} \in M_1$ 时, \mathcal{M}_1 中这类完美匹配数也为 $\psi(n-2)$; 否则, 又有 $u_{41}u_{51}, u_{43}u_{54} \in M_1, \dots$, 如此分析下去就有 $|\mathcal{M}_1| = \sum_{i=1}^{n-1} \psi(i) + 1$ 。

求 $|\mathcal{M}_2|$: $\forall M_2 \in \mathcal{M}_2$, 因为 $u_{13}u_{15} \in M_2$, 所以必有 $u_{12}u_{14}, u_{11}u_{21}, u_{22}u_{24}, u_{23}u_{25} \in M_2$ 。故 $|\mathcal{M}_2| = \psi(n-1)$ 。

综上所述,

$$\psi(n) = \psi(n-1) + \sum_{i=1}^{n-1} \psi(i) + 1 \quad (20)$$

从而有

$$\psi(n-1) = \psi(n-2) + \sum_{i=1}^{n-2} \psi(i) + 1 \quad (21)$$

再由 (20) 式 - (21) 式, 得

$$\psi(n) = 3\psi(n-1) - \psi(n-2) \quad (22)$$

易知 $\psi(1) = 2, \psi(2) = 5$ 。解线性递推式 (22), 得

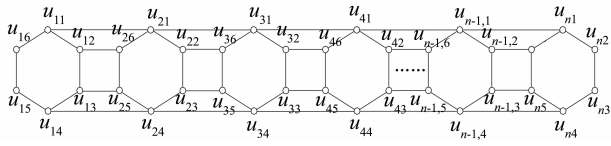
$$\psi(n) = \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

证毕。

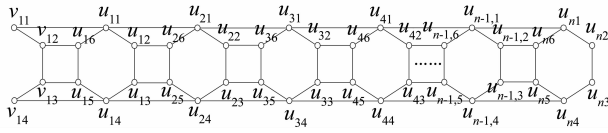
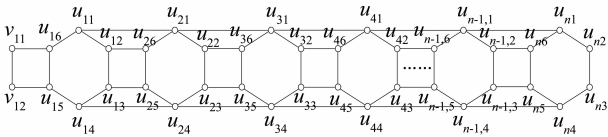
定理 5 设 6 圈 C_6^i 的顶点集为 $V(C_6^i) = \{u_{i1}, u_{i2}, u_{i3}, u_{i4}, u_{i5}, u_{i6}\}, i = 1, 2, \dots, n$ 。圈 C_6^i 与 C_6^{i+1} 的顶点 u_{i1} 与 $u_{i+1,1}, u_{i2}$ 与 $u_{i+1,6}, u_{i3}$ 与 $u_{i+1,5}, u_{i4}$ 与 $u_{i+1,4}$ 之间分别连接一条边 ($i = 1, 2, \dots, n-1$) 所得到的图记为 $4-nC_6$, 如图 9 所示。 $\lambda(n)$ 表示图 $4-nC_6$ 的完美匹配的数目, 则

$$\lambda(n) = \frac{50+13\sqrt{10}}{180} \cdot (1+\sqrt{10})^n + \frac{50-13\sqrt{10}}{180} \cdot (1-\sqrt{10})^n$$

证明 为了求 $\lambda(n)$, 先定义图 G_5 和 G_6 如下: 将长为 3 路 $v_{11}v_{12}v_{13}v_{14}$ 的顶点 $v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}$ 分别与图 $4-nC_6$ 的顶点 $u_{11}, u_{16}, u_{15}, u_{14}$ 各连接一条边, 得

图 9 $4-nC_6$ 图Fig. 9 Figure of $4-nC_6$

到的图记为 G_5 , 如图 10 所示。将路 $v_{11}v_{12}$ 的两端点 v_{11}, v_{12} 分别与图 $4-nC_6$ 的顶点 u_{16}, u_{15} 各连接一条边, 得到的图记为 G_6 , 如图 11 所示。易知图 $4-nC_6, G_5, G_6$ 均有完美匹配。 $\alpha(n), \beta(n)$ 分别表示图 G_5 和 G_6 的完美匹配的数目。

图 10 G_5 图Fig. 10 Figure of G_5 图 11 G_6 图Fig. 11 Figure of G_6

先求 $\alpha(n)$ 。设图 G_5 完美匹配的集合为 \mathcal{M} , 图 G_5 含边 $v_{11}u_{11}, v_{11}v_{12}$ 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 。则 $\mathcal{M}_i \neq \emptyset, i = 1, 2; \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$ 。所以 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, 从而 $\alpha(n) = |\mathcal{M}| = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|$ 。

求 $|\mathcal{M}_1|$ 。

情形 1: $\mathcal{M}_{11} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{11} \in \mathcal{M}_{11}, v_{11}u_{11}, v_{12}u_{16}, v_{13}v_{14}, u_{15}u_{14} \in M_{11}$ 。由 $\beta(n)$ 定义知, $|\mathcal{M}_{11}| = \beta(n-1)$ 。

情形 2: $\mathcal{M}_{12} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{12} \in \mathcal{M}_{12}, v_{11}u_{11}, v_{12}u_{16}, v_{13}u_{15}, v_{14}u_{14} \in M_{12}$ 。由 $\beta(n)$ 定义知, $|\mathcal{M}_{12}| = \beta(n-1)$ 。

情形 3: $\mathcal{M}_{13} \subseteq \mathcal{M}_1, \forall M_{13} \in \mathcal{M}_{13}, v_{11}u_{11}, v_{12}v_{13}, u_{16}u_{15}, v_{14}u_{14} \in M_{13}$ 。由 $\beta(n)$ 定义知, $|\mathcal{M}_{13}| = \beta(n-1)$ 。

易知 $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_{11} \cup \mathcal{M}_{12} \cup \mathcal{M}_{13}, \mathcal{M}_{1i} \cap \mathcal{M}_{1j} = \emptyset, i \neq j, 1 \leq i, j \leq 3$ 。综上所述, $|\mathcal{M}_1| = 3\beta(n-1)$ 。

求 $|\mathcal{M}_2|$ 。

情形 1: $\mathcal{M}_{21} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{21} \in \mathcal{M}_{21}, v_{11}v_{12}, v_{13}v_{14} \in M_{21}$ 。由 $\lambda(n)$ 定义知, $|\mathcal{M}_{21}| = \lambda(n)$ 。

情形 2: $\mathcal{M}_{22} \subseteq \mathcal{M}_2, \forall M_{22} \in \mathcal{M}_{22}, v_{11}v_{12}, v_{13}u_{15}, v_{14}u_{14}, u_{11}u_{16} \in M_{22}$ 。由 $\beta(n)$ 定义知, $|\mathcal{M}_{22}| = \beta(n-1)$ 。

易知 $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{21} \cup \mathcal{M}_{22}, \mathcal{M}_{21} \cap \mathcal{M}_{22} = \emptyset$ 。故 $|\mathcal{M}_2| = \lambda(n) + \beta(n-1)$ 。

综上所述,

$$\alpha(n) = \lambda(n) + 4\beta(n-1) \quad (23)$$

再求 $\beta(n)$ 。设图 G_6 的完美匹配的集合为 \mathcal{M} , 图 G_6 的含边 $v_{11}v_{12}, v_{11}u_{16}$ 的完美匹配集合的分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 。则 $\mathcal{M}_i \neq \emptyset, i = 1, 2; \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$ 。所以 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, 故 $\beta(n) = |\mathcal{M}| = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|$ 。

求 $|\mathcal{M}_1|$: $\forall M_1 \in \mathcal{M}_1$, 因为 $v_{11}v_{12} \in M_1$, 所以由 $\lambda(n)$ 定义知, $|\mathcal{M}_1| = \lambda(n)$ 。

求 $|\mathcal{M}_2|$: $\forall M_2 \in \mathcal{M}_2$, 因为 $v_{11}u_{16}, v_{12}u_{15} \in M_2$, 所以由 $\beta(n)$ 定义知, $|\mathcal{M}_2| = \alpha(n-1)$ 。

故

$$\beta(n) = \lambda(n) + \alpha(n-1) \quad (24)$$

最后求 $\lambda(n)$ 。设图 $4-nC_6$ 的完美匹配的集合为 \mathcal{M} , 图 $4-nC_6$ 的含边 $u_{11}u_{16}, u_{16}u_{15}$ 的完美匹配集合分别为 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$ 。则 $\mathcal{M}_i \neq \emptyset, i = 1, 2; \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_2 = \emptyset$ 。所以 $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$, 从而 $\lambda(n) = |\mathcal{M}| = |\mathcal{M}_1| + |\mathcal{M}_2|$ 。

求 $|\mathcal{M}_1|$: $\forall M_1 \in \mathcal{M}_1$, 因为 $u_{11}u_{16} \in M_1$, 所以 $u_{15}u_{14} \in M_1$ 。由 $\beta(n)$ 定义知, $|\mathcal{M}_1| = \beta(n-1)$ 。

求 $|\mathcal{M}_2|$: $\forall M_2 \in \mathcal{M}_2$, 因为 $u_{16}u_{15} \in M_2$, 所以由 $\alpha(n)$ 定义知, $|\mathcal{M}_2| = \alpha(n-1)$ 。

故

$$\lambda(n) = \alpha(n-1) + \beta(n-1) \quad (25)$$

由 (23) 式、(24) 式和 (25) 式, 得

$$\lambda(n) = 2\lambda(n-1) + 5\lambda(n-2) + 4[\beta(n-3) + \alpha(n-3)] \quad (26)$$

$$\lambda(n-2) = \alpha(n-3) + \beta(n-3) \quad (27)$$

由 (26) 式 $-4 \times (27)$ 式, 得

$$\lambda(n) = 2\lambda(n-1) + 9\lambda(n-2) \quad (28)$$

易知 $\lambda(1) = 2; \alpha(1) = 6, \beta(1) = 3$, 故由 (25) 式, 得 $\lambda(2) = 9$ 。解线性递推式 (28), 得

$$\lambda(n) = \frac{50 + 13\sqrt{10}}{180} \cdot (1 + \sqrt{10})^n + \frac{50 - 13\sqrt{10}}{180} \cdot (1 - \sqrt{10})^n$$

证毕。

参考文献:

- [1] HALL G G. A graphic model of a class of molecules [J]. *Int J Math Edu Sci*, 1973, 4: 233 – 240.
- [2] PAULING L. The nature of chemical bond, Cornell [M]. Ithaca: Univ Press, 1939.
- [3] CYVIN S J, GUTMAN I. Kekulé structures in Benzenoid hydrocarbons [M]. Berlin: Springer Press, 1988.
- [4] KASTELEYN P W. Graph theory and crystal physics [M]// Harary F. *Graph Theory and Theoretical Physics*. London: Academic Press, 1967: 43 – 110.
- [5] LOVÁSZ L, PLUMMER M. *Matching Theory* [M]. New York: North – Holland Press, 1986.
- [6] CIUCU M. Enumeration of perfect matchings in graphs with reflective symmetry [J]. *J Combin Theory Ser A*, 1997, 77: 87 – 97.
- [7] FISCHER I, LITTLE C H C. Even circuits of prescribed clockwise parity [J]. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 2003, 10(1): R45.
- [8] JOCKUSCH W. Perfect mathings and perfect squares [J]. *J Combin Theory Ser A*, 1994, 67: 100 – 115.
- [9] KASTELEYN P W. Dimmer statistics and phase transition [J]. *Math Phys*, 1963, 4: 287 – 293.
- [10] 于青林, 刘桂真. 图的因子和匹配可扩性 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2010.
- [11] BRIGHTWELL G R, WINKLER P, HARD C, et al. Adventures at the interface of combinatorics and statistical physics [J]. *ICM*, 2002, III: 605 – 624.
- [12] ZHANG H P. The connectivity of Z -transformation graphs of perfect matchings of polyominoes [J]. *Discrete Mathematics*, 1996, 158: 257 – 272.
- [13] ZHANG H P, ZHANG F J. Perfect matchings of polyomino graphs [J]. *Graphs and Combinatorics*, 1997, 13: 259 – 304.
- [14] 张莲珠. 渺位四角系统完美匹配数的计算 [J]. *厦门大学学报: 自然科学版*, 1998, 37(5): 629 – 633.
- [15] 林泓, 林晓霞. 若干四角系统完美匹配数的计算 [J]. *福州大学学报: 自然科学版*, 2005, 33(6): 704 – 710.
- [16] YAN W G, ZHANG F J. Enumeration of perfect matchings of a type of Cartesian products of graphs [J]. *Discrete Applied Mathematics*, 2006, 154: 145 – 157.
- [17] 唐保祥, 任韩. 几类图完美匹配的数目 [J]. *南京师大学报: 自然科学版*, 2010, 33(3): 1 – 6.
- [18] 唐保祥, 李刚, 任韩. 3 类图完美匹配的数目 [J]. *浙江大学学报: 理学版*, 2011, 38(4): 16 – 19.
- [19] 唐保祥, 任韩. 2 类图完美匹配的数目 [J]. *西南师范大学学报: 自然科学版*, 2011, 36(5): 16 – 21.

(上接第 30 页)

- [6] LI J, TIAN G. Virtual moduli cycles and Gromov-Witten invariants of general symplectic manifolds [G]. *Topics in Symplectic 4-manifolds* (Irvine, CA, 1996), *First Int Press Lect Ser*, I, Int Press, Cambridge, MA, 1998: 47 – 84.
- [7] RUAN Y. Virtual neighborhoods and pseudo-holomorphic curves [J]. *Tr J Mathematics*, 1999, 23: 161 – 231.
- [8] LERMAN E. Symplectic cuts [J]. *Math Res Lett*, 1995, 2: 247 – 258.
- [9] HU J. Gromov-Witten invariants of blowups along points and curves [J]. *Math Z*, 2000, 233: 709 – 739.
- [10] GATHMANN A. Gromov-Witten invariants of blow-ups [J]. *J Alg Geom*, 2001, 10: 399 – 432. arXiv: math/9804043v2
- [11] LI A, RUAN Y. Symplectic surgery and Gromov-Witten invariants of Calabi 3 – folds [J]. *Invent Math*, 2001, 145 (1): 151 – 218.
- [12] HU J, LI T, RUAN Y. Birational cobordism invariance of uniruled symplectic manifolds [J]. *Invent math*, 2008, 172: 231 – 275.