

# 一类复杂系统模型的动力特性及广义控制\*

李 银<sup>1,2</sup>, 位瑞英<sup>1</sup>

(1. 韶关学院数学与信息科学学院, 广东 韶关 512005;  
2. 中山大学数学与计算机学院, 广东 广州 510275)

**摘要:** 利用广义控制方法设计并实现了一类复杂系统模型射影控制。给出并证明了误差系统全局稳定的条件。数值模拟验证其方法的有效性和可行性。

**关键词:** 系统模型; 广义控制; 稳定理论

**中图分类号:** O175   **文献标志码:** A   **文章编号:** 0529-6579 (2013) 06-0048-05

## Dynamic Characteristic and Generalized Control of a Complex System Model

LI Yin<sup>1,2</sup>, WEI Ruiying<sup>1</sup>

(1. School of Mathematics and Informing Science, Shaoguan University, Shaoguan 512005, China;  
2. Department of Mathematics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

**Abstract:** The projective control of the complex system model by using the generalized control method is investigated, and it proves the globally stable condition of the error system. Numerical simulation verifies the feasibility and effectiveness of the method.

**Key words:** complex system model; generalized control; stability

复杂系统在保密通信、激光物理、化学反应等领域有巨大应用潜力<sup>[1-6]</sup>。人们不断发现新的复杂系统, 研究其分叉、混沌现象、混沌吸引子结构和混沌产生的条件等动力特性与控制问题。如同步控制、模糊控制、反馈控制等<sup>[7-13]</sup>。

本文针对复杂系统模型的动力特性作进一步探讨, 利用射影同步控制方法实现该系统的广义同步控制, 并利用 Maple 数值仿真试验, 得到有效非线性控制器, 验证了其方法的有效性。

### 1 一类复杂系统模型及其动力特性分析

考虑复杂系统模型<sup>[7]</sup>:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x + yz) \\ \dot{y} = 5ax - xz \\ \dot{z} = y^2 + xy + cz \end{cases} \quad (1)$$

$(x, y, z)^T \in \mathbf{R}^3$  为系统的状态变量, 当选取  $a = 6, c$

$= -4$  时, 系统处于混沌状态。

#### 1.1 复杂动力性

系统在变换  $(x, y, z) \rightarrow (-x, -y, z)$  下, 对所有的参数值保持不变性, 具有对称性。系统模型振荡的复杂性和随机性演化时序图如图 1。

图 1 (a), (b), (c) 分别表示初值  $(x(0), y(0), z(0)) = (3, -4, 2)$  时,  $x, y$  和  $z$  是随时间变化的曲线。由图可知, 系统变量具有复杂性和随机敏感性。

#### 1.2 耗散性

对于系统 (1), 计算向量场的散度

$$\frac{1}{V} \frac{dV}{dt} = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} = -a + c = -10 < 0$$

故系统 (1) 是耗散的。体积元  $V(0)$  在时间  $t$  时收缩为体积元  $V(0)e^{-10t}$ , 当  $t \rightarrow \infty$  时, 包含系

\* 收稿日期: 2013-01-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (10871214); 韶关市科技计划资助项目

作者简介: 李银 (1980 年生), 男; 研究方向: 非线性; E-mail: liyin2009521@163.com

统轨线的每个小体积元以指数速率 10 收缩到 0，这就意味着系统的动力学行为最终趋向于一个吸引子，该奇怪吸引子形成过程如图 2。

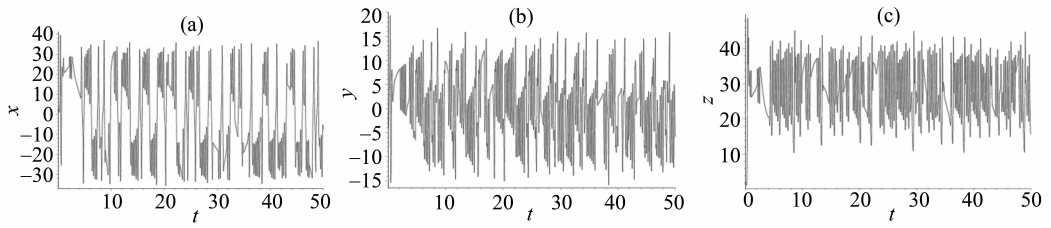


图 1 复杂性和随机性

Fig. 1 Complex complexity and randomness

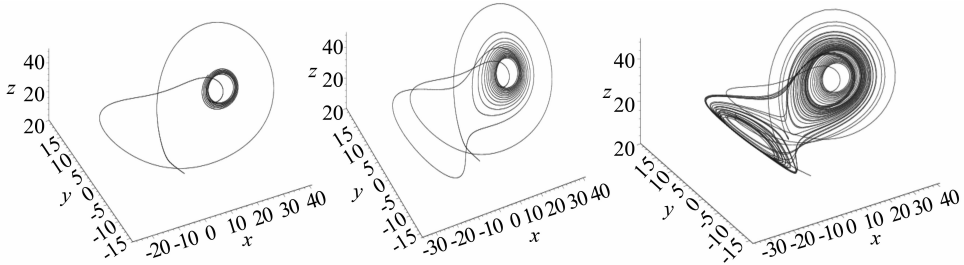


图 2 系统模型 (1) 奇怪吸引子形成的渐进过程

Fig. 2 System model (1) strange attractor formation of gradual process

### 1.3 李雅普诺夫指数与分形维数

李雅普诺夫指数刻画了动力系统轨线的分离与排斥情况，表征了系统的运动特征。利用 Wolf 方法计算得到模型 (1) 的李雅普指数为  $\lambda_1 = 0.899, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = -3.63$ ，由 Kaplan-Yorke 猜想公式，系统模型 (1) 在初值 (5, 3, 4) 的李雅普指数为  $D_{ky} = j + \frac{1}{|\lambda_{j+1}|} \sum_{i=1}^j \lambda_i = 2 + \frac{0.899487}{|-3.63135|} = 2.2477$ 。系统 (1) 吸引子的维数是分数维的，故确定系统在所选参数下的确处于混沌状态。

## 2 平衡点及其稳定性

当  $a=6, c=-4$  时，系统 (1) 有平衡点  $O$ ， $B(\pm \frac{12\sqrt{210}}{7}, \pm \frac{2\sqrt{210}}{7}, 30)$ ， $C(0, \pm 2i\sqrt{6}, -6)$ 。

**定理 1** (Routh-Hurwitz 定理) 特征方程： $|\lambda I - A| = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$ ，其中  $I \in \mathbf{R}^{n \times n}$  单位矩阵， $A$  为的实矩阵，若系数满足  $\Delta_i > 0 (i = 1, 2, \dots, n)$ ：

$$\Delta_k = \begin{bmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2k-1} & a_{2k-2} & \dots & a_k \end{bmatrix}$$

那么特征方程的所有特征值都具有负实部。

**命题 1** 当参数满足  $a=6, c=-4$  时，系统 (1) 的平衡点  $O(0,0,0)$  是不稳定的。

**证明** 系统 (1) 在平衡点  $O(0,0,0)$  的 Jacobi 矩阵为

$$J_0 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 5a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}, \text{ 其相应的特征方程:}$$

$$|\lambda I - J_0| = (\lambda - c)(\lambda^2 + \lambda a - 5a^2) = 0$$

而  $\lambda_1 = c, \lambda_{2,3} = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}a$ 。当  $a=6,$

$c=-4$  时，可知  $\lambda_{2,3} = -3 \pm 3\sqrt{21}$ 。根据 Routh-Hurwitz 定理，易知平衡点  $O(0,0,0)$  是不稳定的。下面控制系统 (1) 的不稳定平衡点  $O$ ，在系统 (1) 的第二个方程加上线性控制器  $k_1 y$ ：

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x + yz) \\ \dot{y} = 5ax - xz + k_1 y \\ \dot{z} = y^2 + xy + cz \end{cases}$$

$$J = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ 5a & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \quad (2)$$

$J$  的特征方程为  $|\lambda I - J| = (\lambda - c)(\lambda^2 + (a - k_1)\lambda - a(k_1 + 5a)) = 0$ 。从而解得  $\lambda_1 = c, \lambda_{2,3} = \frac{k_1 - a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$ 。故系数满足  $c < 0, k_1 < a, \Delta = (a -$

$k_1)^2 + 4a(k_1 + 5a)$ , 则方程有负实部的特征根。因此系统在  $O(0,0,0)$  是渐进稳定的。取  $a = 6, c = -4$ ,

$k_1 = 4, (x, y, z) = (3, -4, 2)$ 。图 3 (a-c) 为被控系统的动力学行为, 控制器也可取其它函数等<sup>[6]</sup>。

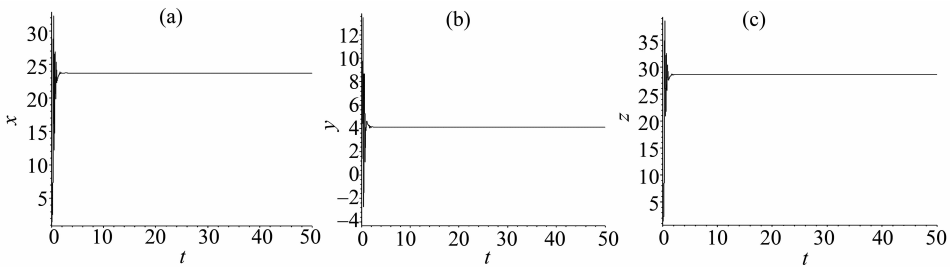


图 3 (a)  $(x, t)$  轨迹; (b)  $(y, t)$  轨迹; (c)  $(z, t)$  轨迹

Fig. 3 (a)  $(x, t)$  orbit; (b)  $(y, t)$  orbit; (c)  $(z, t)$  orbit

### 3 系统模型 (1) 的广义控制

**定义 1** 考虑系统:  $\dot{x} = f(x), x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n, f(x)$  为连续的标量函数。被控的系统如:  $\dot{y} = Ay + Bg(y) + u, y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbf{R}^n, A$  和  $B$  为系统矩阵,  $g(y)$  是连续的向量函数,  $u$  是控制器,  $g(y)$  是全局 Lipschitz 连续。若存在可逆矩阵  $M$  使得  $\lim_{t \rightarrow \infty} e = \lim_{t \rightarrow \infty} x - My = 0$ , 则称广义同步控制,  $M$  是缩放矩阵, 其元素可以是相同的实常数和不同的实常数, 函数、多项式等。

**定理 2** 若定义 1 中  $g(y)$  满足 Lipschitz 连续条件, 控制器被设计

$$u = M^{-1}f(x) - M^{-1}(A - \alpha)e -$$

$$M^{-1}B[g(x) - g(\tilde{y})] - Ay - Bg(y) \quad (3)$$

而  $\alpha = \text{diag}(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ , 且满足  $\min(\alpha_i) > (LB + A)$ , 则 (1) 和 (2) 广义同步控制。

**证明** 误差系统:  $e(t) = x - My$ 。由定义 1 和 (3) 式知

$$\dot{e} = \dot{x} - M\dot{y} = (A - \alpha)e + B[g(x) - g(\tilde{y})],$$

$$g(\tilde{y}) = My.$$

$V(t) = \frac{1}{2}e^T e$ , 易知是非负定函数。

$$\dot{V}(t) = e^T(A - \alpha)e + e^T B[g(x) - g(\tilde{y})] \leq$$

$$Ae^2 - \min(\alpha_i)e^2 + eB(g(x) - g(\tilde{y})) \leq$$

$$(A + LB - \min(\alpha_i))e^2 \quad (4)$$

显然  $V(t) \leq 0, V(t)$  是一光滑连续的函数。令  $K = \min(\alpha_i) - (A + LB), V(t) \leq -Ke^2, K > 0$ 。因此得到  $V(t) \leq V(0)e^{-2Kt}$ , 从而  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t V(t) dt$  是有界的。

根据 Barbalat lemma<sup>[5]</sup> 知  $\lim_{t \rightarrow \infty} V(t) = 0$ , 既是  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 。换句话说系统实现广义同步控制。

由于复杂系统对初值的敏感性, 即使结构相同的 2 个复杂系统, 因初值不同, 运动轨迹也会产生很大的差别。以下设计并实现同步控制。系统 (1) 写成如下:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(y_1 - x_1 + y_1 z_1) \\ \dot{y}_1 = 5ax_1 - x_1 z_1 \\ \dot{z}_1 = y_1^2 + x_1 y_1 + cz_1 \end{cases} \quad (5)$$

假设系统 (5) 为驱动系统, 构造响应系统

$$\begin{cases} \dot{x}_2 = a(y_2 - x_2 + y_2 z_2) + u_1 \\ \dot{y}_2 = 5ax_2 - x_2 z_2 + u_2 \\ \dot{z}_2 = y_2^2 + x_2 y_2 + cz_2 + u_3 \end{cases} \quad (6)$$

$u_1, u_2, u_3$  为所要设计的控制器。令  $e_1 = x_1 + \alpha_1 x_2, e_2 = y_1 + \alpha_2 y_2, e_3 = z_1 + \alpha_3 z_2$ , 得到误差

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(y_1 - x_1) + y_1 z_1 + \alpha_1(a(y_2 - x_2) + y_2 z_2 + u_1) \\ \dot{e}_2 = 5ax_1 - x_1 z_1 + \alpha_2(5ax_2 - x_2 z_2 + u_2) \\ \dot{e}_3 = y_1^2 + y_1 x_1 + cz_1 + \alpha_3(y_2^2 + y_2 x_2 + cz_2 + u_3) \end{cases} \quad (7)$$

根据 (3) 式设计如下控制器函数

$$\begin{cases} u_1 = \frac{-ay_1 + ax_1 - y_1 z_1 - \alpha_2 ay_2 + \alpha_1 ax_2 - \alpha_1 y_2 z_2}{\alpha_1} + k_1(x_1 + \alpha_1 x_2) \\ u_2 = -\frac{5ax_1 - x_1 z_1 + 5\alpha_2 ax_2 - \alpha_2 x_2 z_2}{\alpha_2} + k_2(y_1 + \alpha_2 y_2) \\ u_3 = -\frac{y_1^2 + y_1 x_1 + cz_1 + \alpha_3 y_2^2 + \alpha_3 y_2 x_2 + \alpha_3 cz_2}{\alpha_3} + k_3(z_1 + \alpha_3 z_2) \end{cases} \quad (8)$$

将式 (8) 代入系统 (7), 原误差系统简化为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -k_1(x_1 + \alpha_1 x_2) = -k_1 e_1 \\ \dot{e}_2 = -k_2(y_1 + \alpha_2 y_2) = -k_2 e_2 \\ \dot{e}_3 = -k_3(z_1 + \alpha_3 z_2) = -k_3 e_3 \end{cases} \quad (9)$$

由  $V = \frac{1}{2}(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2) > 0$ , 则  $\dot{V} = \dot{e}_1 e_1 + \dot{e}_2 e_2 + \dot{e}_3 e_3 = -k_1 e_1^2 - k_2 e_2^2 - k_3 e_3^2$ .

显然  $\dot{V} < 0$ , 即  $\dot{V}$  负定。由稳定性定理, 可知误差系统(9)的零解是渐近稳定的, 即  $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ , 从而可使系统 (5) 和 (6) 全局广义控制。取系统

(5) 和 (6) 的初始值分别为  $(x_1(0), y_1(0), z_1(0)) = (3, -4, 2)$  与  $(x_2(0), y_2(0), z_2(0)) = (-2, 1, -1)$ 。数值模拟如图 4。

由图 4 知, (a), (b), (c) 展示了  $e_i (i = 1, 2, 3)$  的变化规律。图 5 为同步曲线。

图 6 分别是系统模型同步吸引子与相图。由图 5-6 可知, 在极短的时间内实现了复杂系统的广义同步控制, 达到系统变量快速跟踪。

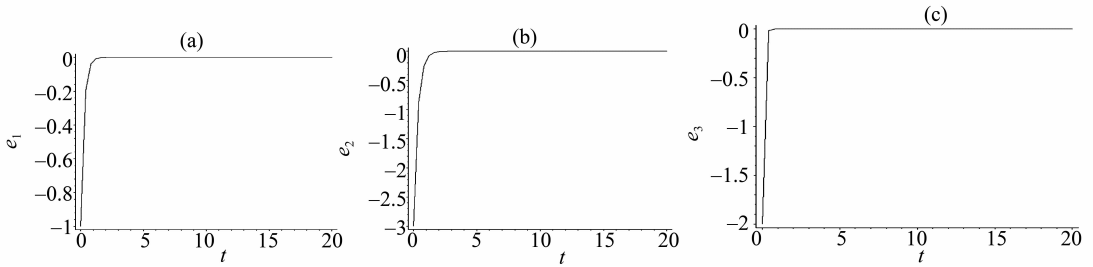


图 4 误差状态: (a)  $e_1 = x_1 + \alpha_1 x_2$ ; (b)  $e_2 = y_1 + \alpha_2 y_2$ ; (c)  $e_3 = z_1 + \alpha_3 z_2$

Fig. 4 The error states: (a)  $e_1 = x_1 + \alpha_1 x_2$ ; (b)  $e_2 = y_1 + \alpha_2 y_2$  (c)  $e_3 = z_1 + \alpha_3 z_2$

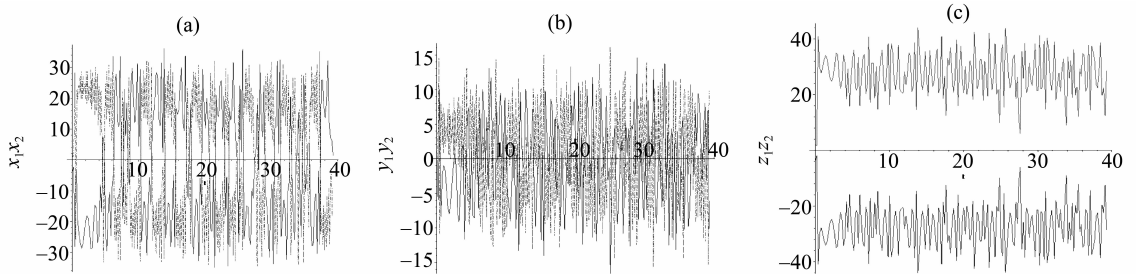


图 5 跟踪状态: (a) 红  $x_1$  与 蓝  $\alpha_1 x_2$  (b) 红  $y_1$  与 蓝  $\alpha_2 y_2$ ; (c) 红  $z_1$  与 蓝  $\alpha_3 z_2$

Fig. 5 Tracking states: (a) the red  $x_1$  and the blue  $\alpha_1 x_2$ ; (b) the red  $y_1$  and the blue  $\alpha_2 y_2$ ; (c) the red  $z_1$  and the blue  $\alpha_3 z_2$

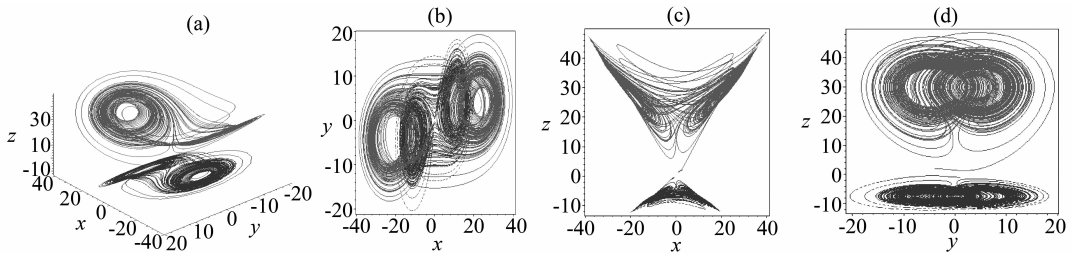


图 6 混沌吸引子和相图 (红驱动系统, 蓝响应系统) (a)  $(x, y, z)$  空间, (b)  $x-y$  平面; (c)  $x-z$  平面; (d)  $y-z$  平面

Fig. 6 Chaotic attractor and phase figure (the red is the drive, the blue is the response)

(a)  $(x, y, z)$  space; (b)  $(x, y)$  phase; (c)  $(x, z)$  phase; (d)  $(y, z)$  phase

## 4 结 语

本文将数值计算、稳定性分析及非线性控制三者相结合, 分析了一类复杂系统的动力特性。基于

稳定性和控制理论, 给出一类新控制器, 实现了该模型的全局控制, 而且实现同步的时间比较短, 是实现系统模型控制的有效方法。

## 参考文献:

- [1] 王光瑞,于熙龄,陈式刚. 混沌的控制、同步与利用 [M]. 北京:国防工业出版社, 2001.
- [2] 关新平等. 混沌控制及其在保密通信中的应用 [M]. 北京:国防工业出版社, 2002.
- [3] 陈红兵. 一类具有收获率互惠系统的稳定性及 Hopf 分岔 [J]. 中山大学学报:自然科学版, 2013, 52(1): 45-50.
- [4] GOPALSAMY K. Stability and oscillations in delay differential equations population. dynamics [M]. Kluwer Academic; Dordrecht, 1992; 22-33
- [5] PECORA L, CARROLL T. Synchronization in chaotic systems [J]. Phys Rev Lett, 1990, 64: 821-827.
- [6] LI Y, LI B. Chaos control and projective synchronization of a chaotic Chen-Lee system [J]. Chinese Journal of Physics, 2009, 47: 297-306.
- [7] XIE C, XU Y, Chaos control and synchronization of a complex chaotic system [J]. IWCFTA, 2010; 1: 71-76.
- [8] 王瑞萍. 基于分数阶 PD 控制器的永磁同步电动机控制 [J]. 中山大学学报:自然科学版, 2013, 52(3): 34-39.
- [9] LI Y, CHEN Y, LI B. Adaptive control and function projective synchronization in 2D discrete-time chaotic systems [J]. Commun Theor Phys, 2009, 51: 270-281.
- [10] LI Y, CHEN Y, LI B. Anticipated function synchronization with unknown parameters in discrete-time chaotic systems [J]. International Journal of Modern Physics C, 2009, 20: 597-608.
- [11] CHEN Y, AN H L, LI Z B. The function cascade synchronization approach with uncertain parameters or not for hyperchaotic systems [J]. Appl Math Computer, 2008, 197: 96-108.
- [12] LI X. Function projective synchronization of two identical new hyperchaotic systems [J]. Comm in theor Physics, 2007, 48: 864-873.
- [13] LI Y, ZHENG C L. The complex network synchronization via chaos control nodes [J]. Journal of Applied Mathematics, 2013, 63: 1-12.
- [6] LIU C J, CHEN G T, LI C Z. Integrability and linearizability of the Lotka-Volterra systems [J]. Journal of Differential Equations, 2004, 198(2): 301-320.
- [7] FERČEC B, CHEN X W, ROMANOVSKI V G. Integrability conditions for complex systems with homogeneous quintic nonlinearities [J]. Journal of Applied Analysis and Computation, 2011, 1(1): 9-20.
- [8] LIU C J, CHEN G T, CHEN G R. Integrability of Lotka-Volterra type systems of degree 4 [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2012, 388(2): 1107-1116.
- [9] GINÉ J, CHRISTOPHER C, PRESERN M, et al. The resonant center problem for a 2: -3 resonant cubic lotka-volterra system [C]. CASC, 2012: 129-142.
- [10] CHEN X W, GINÉ J, ROMANOVSKI V G, et al. The 1: -q resonant center problem for certain cubic Lotka-Volterra systems [J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218(23): 11620-11633.
- [11] HU Z P, ROMANOVSKI V G, SHAFER D S. 1: -3 resonant centers on  $C^2$  with homogeneous cubic nonlinearities [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2008, 56(8): 1927-1940.
- [12] 刘一戎, 李继彬. 平面向量场的若干经典问题 [M]. 北京: 科学出版社, 2010.
- [13] MATTEI J F, MOUSSU R. Holonomie et intégrales premières [J]. Ann Sci Ecole Normale Supérieure, 1980, 13(4): 469-523.
- [14] 杨路, 张景中, 侯晓荣. 非线性代数方程组与定理机器证明 [M]. 上海: 上海科技教育出版社, 1996.
- [15] 刘木兰. Gröbner 基理论及其应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [16] ZEIDLER E, GREUEL G M, PFISTER G. A singular introduction to commutative algebra [M]. Berlin: Springer-Verlag, 2002.
- [17] WANG P S, GUY M J T, DAVENPORT J H. P-adic reconstruction of rational numbers [J]. SIGSAM Bull, 1982, 16(2): 2-3.

(上接第 47 页)