第 52 卷　第 3 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 52　No. 3
2013 年　5 月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　May　2013

不变子空间在周期解析信号中的应用*

谭立辉，张志刚
（广东工业大学应用数学学院，广东 广州 510006）

摘　要： 利用后移不变子空间，给出了周期解析信号与共轭周期解析信号的乘积仍为周期解析信号的充要条件。特别地，当周期解析信号对应的 Z 变换过圆周解析时，其对应的共轭周期解析信号为有理函数且有理函数的极点恰为周期解析信号对应的 Z 变换的零点。作为上述结论的应用，考虑了具有长度为 n 的 Fourier 级数的周期解析信号保持幅度不变的条件。

关键词： 周期解析信号；共轭周期解析信号；后移不变子空间；幅度不变

中图分类号： O236　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 0529－6579（2013）03－0063－05

Applications of the Backward Shift Invariant Subspace to Circular Analytic Signals

TAN Lihui, *ZHANG Zhigang*
(School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510006, China)

Abstract: By use of the backward shift invariant subspace, a necessary and sufficient condition under which a product of a circular analytic signal and a conjugate circular analytic signal is still circular analytic is presented. Particularly, if the Z-transform of the circular analytic signal is holomorphic across the unit circle, the conjugate circular analytic signal is a rational function whose poles are the zeros of the Z-transform of the circular analytic signal. As applications of the above results, the conditions under which two circular analytic signals with length n Fourier series have the same amplitude are discussed.

Key words: circular analytic signals; conjugate circular analytic signals; backward shift invariant subspace; amplitude preservation

1936 年，Armstrong[1] 发现在通信信号对正弦信号进行调制，可以有效抑制噪声，人们随之对调频信号中的“频率”这一物理量展开研究。1937 年，Carson 等人[2] 在电路理论中推广了频率的定义，使之成为随时间变化的函数。如果实信号 $f(t)$ 被描述成 $\rho(t)\cos\theta(t)$ 的形式，那么把瞬时频率定义为相位的导数是很自然的，因为它在时间范围内的平均值就是瞬时频率。但我们知道，对于给定的实信号 $f(t)$，可以写出很多种形如 $\rho(t)\cos\theta(t)$ 的形式，因此如何选取合适 $[\rho(t),\theta(t)]$ 用来定义瞬时频率是当时困扰科学家的一个问题。这个问题直到 1946 年，才由 Gabor[3] 引入的解析信号方法得到解决。在此研究的基础上，Ville[4] 在 1948 年给出了一种统一的瞬时频率的定义：

$$\omega_f(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}}[\arg(f_a(t))]$$

其中 $f_a(t)$ 是实信号 $f(t)=\rho(t)\cos\theta(t)$ 对应的解析信号。令 $L^p[0,2\pi]$ 表示所有以 2π 为周期且满足 $\left(\int_0^{2\pi}|f(\mathrm{e}^{it})|^p\,\mathrm{d}t\right)^{1/p}<\infty$ 的函数 $f(\mathrm{e}^{it})$ 的集合，$1\leqslant p<\infty$。如果 $f(\mathrm{e}^{it})\in L^p[0,2\pi]$，那么周期

* 收稿日期：2012－12－27
基金项目：广东省自然科学基金资助项目（s201104000389）
作者简介：谭立辉（1980 年生），女，讲师；E-mail：lihuitan@ymail.com。

解析信号被定义为：

$$f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) + \mathrm{i}\tilde{H}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$$

其中 $\tilde{H}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ 表示 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ 的周期 Hilbert 变换。从其表达式，我们知道周期解析信号存在唯一的幅度相位对 $[\rho(t),\theta(t)]$ 使得 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \rho(t)\cos\theta(t)$ 和 $f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \rho(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta(t)}$，其中

$$\rho(t) = \sqrt{|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|^2 + |\tilde{H}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|^2},$$

$$\theta(t) = \arctan\left(\frac{\tilde{H}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}{f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})}\right)$$

在信号处理中，我们把 $\rho(t)$，$\theta(t)$ 分别称为信号的幅度和相位，$\omega_f(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[\theta(t)]$ 称为信号的瞬时频率，而 $f_{da}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) := f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - \mathrm{i}\tilde{H}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ 称之为共轭周期解析信号。

用解析信号的方法求幅度、相位和瞬时频率已经被广泛地应用于通信和系统鉴定等领域，但用此方法求得的幅度、相位和瞬时频率也存在一些无法合理解释的物理现象，比如说，用解析信号的方法求得的瞬时频率可以不是频谱中的频率之一，解析信号的频谱对于负频率为零，但瞬时频率却可以是负的[5-6]。因此，我们希望求得的相位幅度对 $[\rho(t),\theta(t)]$ 不仅满足等式 $\tilde{H}[\rho(t)\cos\theta(t)] = \rho(t)\sin\theta(t)$，而且还能进一步满足 Bedrosian 等式[7]

$$\tilde{H}[\rho(t)\cos\theta(t)] = \rho(t)\tilde{H}\cos\theta(t)$$

通过对 Bedrosian 等式的研究，我们发现这个等式成立的一个条件就是周期解析信号与共轭周期解析信号的乘积必须是周期解析信号[8-9]。因此在本文中，我们将利用后移不变子空间的结论，给出周期解析信号与共轭周期解析信号的乘积仍为周期解析信号的充要条件。特别地，当周期解析信号对应的 Z 变换过圆周解析时，其对应的共轭周期解析信号是有理函数且此有理函数的极点恰为周期解析信号对应的 Z 变换的零点。作为上述结论的应用，我们研究了具有长度为 n 的 Fourier 级数的周期解析信号保持幅度不变的条件。

1 若干引理

令 $H^2[0,2\pi] := \{f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) + \mathrm{i}\tilde{H}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \mid f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \in L^2[0,2\pi]\}$ 表示所有周期解析信号的集合，$\overline{H^2[0,2\pi]} := \{f_{da}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) - \mathrm{i}\tilde{H}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \mid f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \in L^2[0,2\pi]\}$ 表示所有共轭周期解析信号的集合。对于 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \in L^2[0,2\pi]$，它可以作如下 Fourier 级数展开：

$$f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$$

其中 $c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}kt}\mathrm{d}t$ 表示其对应的第 k 个 Fourier 系数。那么，其对应的周期 Hilbert 变换 $\tilde{H}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ 可被定义为

$$\tilde{H}f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \sim \sum_{k=-\infty}^{+\infty} -\mathrm{i}\,\mathrm{sgn}(k)c_k(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$$

其中 sgn 表示符号函数，当 $k \neq 0$，$\mathrm{sgn}(k) = k/|k|$；当 $k = 0$，$\mathrm{sgn}(k) = 0$。自然周期解析信号具有下面 Fourier 级数展开形式：

$$f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \sim c_0(f) + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)\mathrm{e}^{\mathrm{i}kt}$$

因此，$f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \in H^2[0,2\pi]$ 当且仅当 $f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \in L^2[0,2\pi]$ 且对于 $n < 0$，有 $c_n(f) = 0$。根据 F. 和 M. Riesz 定理[10]，我们有 $f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \in H^2[0,2\pi]$ 当且仅当其对应 Z 变换 $f_a(z) \sim c_0(f) + 2\sum_{k=1}^{\infty} c_k(f)z^k$ 属于 Hardy 空间 $H^2(D)$ 中函数且 $f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = \lim_{r\to 1^-} f_a(z), z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}t} \in D$，其中 $H^p(D)$ 表示在单位圆 D 内解析且满足 $\sup_{0\leqslant r<1}\left(\int_0^{2\pi} |f(z)|^p\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$ 的函数 $f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})$ 的集合，$1 \leqslant p < \infty$。对于 $f_a(z) \in H^p(D)$，我们有下面的分解定理成立：

引理 1[10] 假设不恒等于零的函数 $f_a(z) \in H^p(D)$，$1 \leqslant p < \infty$。那么对于 $z \in D$，$f_a(z)$ 有唯一的分解：$f_a(z) = O_{f_a}(z)I_{f_a}(z)$，其中 $O_{f_a}(z) \in H^p(D)$ 是 $f_a(z)$ 对应的外部函数，它能表示成下面的形式

$$O_{f_a}(z) = c\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}+z}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}-z}\ln|f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|\,\mathrm{d}t\right\} \quad (1)$$

其中 c 是模为 1 的复常数；$I_{f_a}(z)$ 是其对应的内部函数，它能进一步分解为 $I_{f_a}(z) = B_{f_a}(z)S_{f_a}(z)$，其中 $B_{f_a}(z)$ 是由 $f_a(z)$ 的零点构成的 Blaschke 积，它可表示为：

$$B_{f_a}(z) = z^m\prod_{z_i\neq 0}\frac{|z_i|}{z_i}\frac{z_i - z}{1 - z\bar{z}_i} \quad (2)$$

其中 $\{z_i\}$ 是 $f_a(z)$ 在单位圆 D 上的零点序列（其重点按重数计算），m 表示 $f_a(z)$ 在 $z = 0$ 处的重点数，而 $\bar{z}_k$ 表示 z_k 的共轭；$S_{f_a}(z)$ 是奇异内函数。

显然，对于几乎处处的 $t \in [0,2\pi]$，周期解析信号 $f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) \in H^2[0,2\pi]$ 可分解为

$$f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = c\mathrm{e}^{\ln|f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})| + \mathrm{i}\tilde{H}\ln|f_a(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|}I_{f_a}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}) = c\mathrm{e}^{\ln|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})| + \mathrm{i}\tilde{H}\ln|f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t})|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}[\theta_{B_{f_a}}(t) + \theta_{S_{f_a}}(t)]}$$

其中 $\theta_{B_{f_a}}(t)$ 表示边值 Blaschke 积 $B_{f_a}(e^{it})$ 对应的相位，而 $\theta_{s_{f_a}}(t)$ 表示边值奇异内函数 $S_{f_a}(e^{it})$ 对应的相位（参见文献［11］）。为了便于求信号的瞬时频率，我们通常假设周期解析信号 $f_a(e^{it})$ 对应的 Z 变换 $f_a(z)$ 是过圆周解析的。在这种特殊情况下，根据 Hardy 函数的分解定理，我们有：

引理 2[11]　假设非零周期解析信号 $f_a(e^{it}) = \rho(t)e^{i\theta(t)} \in H^2[0,2\pi]$。如果其对应的 Z 变换 $f_a(z)$ 是过圆周解析的，那么 $f_a(e^{it}) = O_{f_a}(e^{it})B_n(e^{it}) = ce^{\ln\rho(t)+i\tilde{H}\ln\rho(t)}\prod\limits_{k=1}^{n}\frac{e^{it}-z_k}{1-e^{it}\overline{z_k}}$，其中 c 是模为 1 的复常数，$\{z_1,\cdots,z_n\}$ 为 $f_a(z)$ 在单位圆内零点序列（其重点按重数排列）。

2　主要结论

在信号处理中，我们称 $O_{f_a}(e^{it}) = ce^{\ln\rho(t)+i\tilde{H}\ln\rho(t)}$ 为极少相位信号。从其表达式可以看出，极少相位信号能在一个常数因子范围内被其相位或者幅度唯一重构出来。而 $B_n(e^{it}) = \prod\limits_{k=1}^{n}\frac{e^{it}-z_k}{1-e^{it}\overline{z_k}}$ 称之为全相位信号，它的幅度为 1 且具有非负的瞬时频率[12]。根据上面的分解定理，我们可以给出周期解析信号与共轭周期解析信号的乘积仍然为周期解析信号的刻画：

定理 1　假设非零周期解析信号 $f_a(e^{it}) \in H^2[0,2\pi]$，共轭周期解析信号 $g_{da}(e^{it}) \in \overline{H^2[0,2\pi]}$。那么对于 $n<0$，有 $c_n(f_ag_{da})=0$ 当且仅当 $\overline{g_{da}(e^{it})} \in H^2[0,2\pi] \cap I_{f_a}(e^{it})\overline{H^2[0,2\pi]}$，其中 $I_{f_a}(e^{it})$ 是 $f_a(e^{it})$ 对应的边值内函数。

证明　令 $h_a(e^{it}) := f_a(e^{it})g_{da}(e^{it})$。根据 Holder 不等式我们知 $h_a(e^{it}) \in L^1[0,2\pi]$。如果对于 $n<0$，有 $c_n(f_ag_{da})=0$，由 F. 和 M. Reize 定理[10]，我们知 $h_a(e^{it})$ 对应的 Z 变换 $h_a(z) \in H^1(D)$ 且 $h_a(e^{it}) = \lim\limits_{r\to1^-}h_a(z)$，$z=re^{it}\in D$。再根据 Hardy 函数的分解定理，我们知 $h_a(z)\in H^1(D)$ 对应的外部函数可表示为 $O_{f_a}(z) = c\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+z}{e^{it}-z}\ln|f_a(e^{it})g_{da}(e^{it})|\,dt\right\}$，其中 c 是模为 1 的常数。注意到

$$\ln|f_a(e^{it})g_{da}(e^{it})| = \ln|f_a(e^{it})| + \ln|\overline{g_{da}(e^{it})}|,$$

$$f_a(e^{it}) \in H^2[0,2\pi],\ \overline{g_{da}(e^{it})} \in H^2[0,2\pi]$$

那么，对于几乎处处的 $t\in[0,2\pi]$，有

$$O_h(e^{it}) = \lim_{r\to1^-}O_{h_a}(z) = \lim_{r\to1^-}O_{f_a}(z)O_{\overline{g_{da}}}(z) = O_{f_a}(e^{it})O_{\overline{g_{da}}}(e^{it}),\ z=re^{it}\in D$$

因此，对于几乎处处的 $t\in[0,2\pi]$，有下面的等式成立

$$h_a(e^{it}) = O_{h_a}(e^{it})I_{h_a}(e^{it}) = O_{f_a}(e^{it})O_{\overline{g_{da}}}(e^{it})I_{h_a}(e^{it}) = \overline{I_{f_a}(e^{it})}f_a(e^{it})O_{\overline{g_{da}}}(e^{it})I_{h_a}(e^{it})$$

因为 $f_a(e^{it}) \neq 0$，所以 $\overline{g_{da}(e^{it})} = I_{f_a}(e^{it})\overline{O_{\overline{g_{da}}}(e^{it})I_{h_a}(e^{it})} \in I_{f_a}(e^{it})\overline{H^2[0,2\pi]} \cap H^2[0,2\pi]$。反之，如果 $\overline{g_{da}(e^{it})} \in I_{f_a}(e^{it})\overline{H^2[0,2\pi]} \cap H^2[0,2\pi]$，那么存在 $h(e^{it}) \in H^2[0,2\pi]$ 使得 $\overline{g_{da}(e^{it})} = I_{f_a}(e^{it})\overline{h(e^{it})} \in H^2[0,2\pi]$。

自然，我们有

$$f_a(e^{it})g_{da}(e^{it}) = O_{f_a}(e^{it})I_{f_a}(e^{it})\overline{I_{f_a}(e^{it})}h(e^{it}) = O_{f_a}(e^{it})h(e^{it})$$

又因为 $O_{f_a}(e^{it}) \in H^2[0,2\pi]$，$h(e^{it}) \in H^2[0,2\pi]$，根据 Holder 不等式和 F. 和 M. Reize 定理[10]，所以我们有当 $n<0$ 时，有 $c_n(f_ag_{da})=0$。

事实上，上述结论已经被我们运用到对 Bedrosian 等式的刻画中去了[11]。作为上述结果的进一步应用，我们将用它来刻画长度为 n 的 Fourier 级数的周期解析信号保持幅度不变的条件。

记 $\mathrm{Supp}f = [\inf\{n, c_n(f)\neq0\}, \sup\{n, c_n(f)\neq0\}]$ 表示 $f(e^{it}) \in L^2[0,2\pi]$ 的 Fourier 级数支集，令 $P_{m,n}[0,2\pi]$ 表示所有满足 $f(e^{it}) \in L^2[0,2\pi]$ 且其支集满足 $\mathrm{Supp}[f(e^{it})] := [\inf\{n,c_n(f)\neq0\}, \sup\{n,c_n(f)\neq0\}] \subseteq [m,n]$ 的函数 $f(e^{it})$ 的集合，其中 m,n 为有限整数。对于 $P_{m,n}[0,2\pi]$ 中的函数，通过简单的计算，我们有以下引理：

引理 3　假设非零函数 $f(e^{it}) \in P_{m_1,n_1}[0,2\pi]$，$g(e^{it}) \in P_{m_2,n_2}[0,2\pi]$。那么 $\mathrm{Supp}[f(e^{it})g(e^{it})] \subseteq [m_1+m_2, n_1+n_2]$。

由引理 2，定理 1 和引理 3，我们有：

推论 1　假设非零周期解析信号 $f_a(e^{it}) \in H^2[0,2\pi]$，共轭周期解析信号 $g_{da}(e^{it}) \in \overline{H^2[0,2\pi]}$。

如果 $f_a(e^{it})$ 对应的 Z 变换 $f_a(z)$ 过圆周解析的，那么对于 $n<0$，有 $c_n(f_ag_{da})=0$ 当且仅当

$$\overline{g_{da}(e^{it})} = \frac{\sum\limits_{k=0}^{n}c_ke^{ikt}}{\prod\limits_{k=1}^{n}(1-e^{it}\overline{z_k})}$$

，其中 $\{z_1,\cdots,z_n\}$ 为 $f_a(z)$ 在单位圆内零点序列（其重点按重数排列），$\{c_0,c_1,\cdots,c_n\}$ 为任意的复常数序列。

证明 假设 $\{z_1,\cdots,z_n\}$ 为 $f_a(z)$ 在单位圆内零点序列（其重点按重数排列）。由引理2，有 $f_a(z)$ 对应的内函数为 $B_n(z)=\prod_{k=1}^{n}\frac{e^{it}-z_k}{1-e^{it}\bar{z}_k}$。再根据定理1，知道 $\overline{g_{da}(e^{it})}\in H^2[0,2\pi]\cap B_n(e^{it})\overline{H^2[0,2\pi]}$。

因此存在 $h(e^{it})\in H^2[0,2\pi]$ 使得

$$\overline{g_{da}(e^{it})}\prod_{j=1}^{k}(1-\bar{z}_j e^{it})=\overline{h(e^{it})}\prod_{j=1}^{k}(e^{it}-z_j) \tag{2}$$

因为 $\overline{g_{da}(e^{it})}\in H^2[0,2\pi]$，$h(e^{it})\in H^2[0,2\pi]$，根据其对应的 Fourier 级数展开式，我们知 $\mathrm{Supp}[\overline{g_{da}(e^{it})}\prod_{k=1}^{n}(1-\bar{z}_k e^{it})]\in[0,\infty]$，$\mathrm{Supp}[\overline{h(e^{it})}\prod_{k=1}^{n}(e^{it}-z_k)]\in(-\infty,n]$。故（2）成立当且仅当 $\overline{g_{da}(e^{it})}=\frac{\sum_{j=0}^{n}c_k z^k}{\prod_{j=1}^{k}(1-\bar{z}_j e^{it})}$，其中 $\{c_0,c_1,\cdots,c_n\}$ 为任意复常数序列。

显然地，如果 $f(e^{it})\in P_{m,n}[0,2\pi]$，$m<0<n$，我们知道其对应的解析信号 $f_a(e^{it})\in P_{0,n}[0,2\pi]$。下面，我们刻画具有有限长 Fourier 级数的周期解析信号保持幅度不变的条件：

定理2 假设非零周期解析信号 $f_a(e^{it})\in P_{0,n}[0,2\pi]$，共轭周期解析信号 $g_{da}(e^{it})=e^{i\theta(t)}\in\overline{H^2[0,2\pi]}$，其中 $c_n(f_a)\neq0$。那么 $f_a(e^{it})e^{i\theta(t)}\in P_{0,n}[0,2\pi]$ 当且仅当 $g_{da}(e^{it})=e^{i\theta(t)}=c\prod_{j=1}^{k}\frac{1-e^{it}\bar{z}'_j}{e^{it}-z'_j}$，其中 c 是模为1的复常数，$\{z'_1,\cdots,z'_k\}$ 为 $f_a(z)$ 在单位圆 D 内的零点序列 $\{z_1,\cdots,z_m\}$ 的子序列（其重点按重数排列且 $m\leqslant n$）。

证明 因为 $f_a(z)=\sum_{k=0}^{n}a_k z^k$ 对应的内函数为有限 Blaschke 积，其可表示为 $B_m(z)=\prod_{k=1}^{m}\frac{e^{it}-z_k}{1-e^{it}\bar{z}_k}$，其中 $\{z_1,\cdots,z_m\}$ 为 $f_a(z)$ 在单位圆内的零点序列（其重点按重数排列且 $m\leqslant n$）。根据推论1，我们知 $g_{da}(e^{it})\in\overline{H^2[0,2\pi]}$ 可表示为 $\overline{g_{da}(e^{it})}=\frac{\sum_{k=0}^{m}a_k e^{ikt}}{\prod_{k=1}^{m}(1-\bar{z}_k e^{it})}\in H^2[0,2\pi]$，其中 $\{a_0,a_1,\cdots,a_m\}$ 为任意常数序列。又因为 $|\overline{g_{da}(e^{it})}|=1$，那么外部函数的表达式，我们知 $O_{\overline{g_{da}}}(e^{it})=c$，所以 $\overline{g_{da}(e^{it})}\in H^2[0,2\pi]$ 只可能为有限 Blaschke 积且其对应的极点必为 $f_a(z)$ 在单位圆内的零点。

当 $g_{da}(e^{it})=e^{i\theta(t)}$ 不要求属于 $\overline{H^2[0,2\pi]}$，我们可以给出更一般的具有有限长 Fourier 级数的周期解析信号保持幅度不变的条件：

定理3 假设非零解析信号 $f_a(e^{it})\in P_{0,n}[0,2\pi]$ 且 $c_n(f_a)\neq0$。那么 $f_a(e^{it})e^{i\theta(t)}\in P_{0,n}[0,2\pi]$ 当且仅当 $e^{i\theta(t)}=c\prod_{j=1}^{k}\frac{1-e^{it}\bar{z}'_j}{e^{it}-z'_j}$，其中 c 是模为1的复常数，$\{z'_1,\cdots,z'_k\}$ 为 $f_a(z)$ 的零点序列 $\{z_1,\cdots,z_n\}$ 的任意子序列（其重点按重数排列）。

证明 因为 $f_a(e^{it})\in P_{0,n}[0,2\pi]$，$f_a(e^{it})e^{i\theta(t)}\in P_{0,n}[0,2\pi]$，那么 $f_a(e^{it})$ 可表示为 $f_a(e^{it})=\sum_{k=0}^{n}a_k e^{ikt}$，$f_a(e^{it})e^{i\theta(t)}$ 可表示为 $p_m(e^{it}):=f_a(e^{it})e^{i\theta(t)}=\sum_{k=0}^{m}b_k e^{ikt}$，其中 $\{a_0,a_1,\cdots,a_n\}$ 和 $\{b_0,b_1,\cdots,b_m\}$ 为任意复常数序列，$a_n\neq0$，$b_m\neq0$ 且 $m\leqslant n$。又因为对任意的 $t\in[0,2\pi]$，有 $(\sum_{k=0}^{n}a_k e^{ikt})\overline{(\sum_{k=0}^{n}a_k e^{ikt})}=(\sum_{k=0}^{m}b_k e^{ikt})\overline{(\sum_{k=0}^{m}b_k e^{ikt})}$，故 $p_m(z)\overline{p_m(\frac{1}{\bar{z}})}=f_a(z)\overline{f_a(\frac{1}{\bar{z}})}$。因此，如果 $z_j\neq0$，那么 $f_a(z_j)=0$ 当且仅当 $p_m(\frac{1}{\bar{z}_j})=0$ 或者 $p_m(z_j)=0$；如果 $z_j=0$，则 $p_m(z_j)=0$ 的重数要少于等于 $f_a(z_j)=0$ 的重数。故 $f_a(e^{it})e^{i\theta(t)}\in P_{0,n}[0,2\pi]$ 当且仅当 $e^{i\theta(t)}=c\prod_{j=1}^{k}\frac{1-e^{it}\bar{z}'_j}{e^{it}-z'_j}$，其中 c 是模为1的复常数，$\{z'_1,\cdots,z'_k\}$ 为 $f_a(z)$ 的零点序列 $\{z_1,\cdots,z_n\}$ 的任意子序列（其重点按重数排列）。

参考文献：

[1] ARMSTRONG E H. A method of reducing disturbances in radio signaling by a system of frequency modulation [J]. Proceedings of the Institute of Radio Engineers, 1936, 24(5): 689-740.

[2] CARLSON J L, FRY T C. Variable frequency electric circuit theory with application to the theory of frequency-modulation [J]. Bell System Technical Journal, 1937, 16: 513-540.

（下转第72页）

参考文献：

[1] ARDITI R, GINZBURG L R. Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence[J]. Journal of Theoretical Biology, 1989, 139:311 -326.

[2] FAN M, WANG K. Periodicity in a delayed ratio-dependent predator-prey system [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2001, 262:179-190.

[3] XU R, DAVIDSON F A, CHAPLAIN M A J. Persistence and stability for a two-species ratio-dependent predator-prey system with distributed time delay [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 269:256 -277.

[4] XU R, CHEN L S. Persistence and global stability for n-species ratio-dependent predator-prey system with time delays [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2002, 275:27 -43.

[5] MAO X R, SABANIS S, ERIC R. Asymptotic behavior of the stochastic Lotka-Volterra model [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2003, 287:141 -156.

[6] MAO X R, GLENN M, ERIC R. Environment Brownian noise suppresses explosions in population dynamics [J]. Stochasitc Processes and Their Application, 2002, 97:95 -110.

[7] ARIFAH B, MAO X R. Stochastic delay Lotka-Volterra model [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2004, 292:364 -380.

[8] MAO X R, YUAN C G, ZOU J Z. Stochastic differential delay equations of population dynamics [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2005, 304:296 -320.

[9] 郭子君. 基于比率依赖的两种群捕食者－食饵系统的随机模型[J]. 中山大学学报:自然科学版, 2010, 49(2):48 -53.

（上接第66页）

[3] GABOR D. Theory of communications [J]. Journal Institute of Electrical Engineers, 1946, 93: 429 -457.

[4] VILLE J. Théorie et applications de la notion de signal analytique [J]. Cables et Transmissions, 1948, 2: 61 -74.

[5] BOASHASH B. Estimating and interpreting the instantaneous frequency of a signal [J]. Proceedings of the IEEE, 1992, 80: 520 -538.

[6] COHEN L. Time-frequency analysis [M]. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1995.

[7] HUANG N E, SHEN Z, LONG S R, et al. The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis [J]. Proceedings of the Royal Society A, 1998, 454: 903 -995.

[8] BROWN J. A Hilbert transform product theorem [J]. Proceedings of the IEEE, 1986, 74: 520 -521.

[9] TAN L H, YANG L H, HUANG D R. Construction of periodic analytic signals satisfying the circular Bedrosian identity [J]. IMA Journal of Applied Mathematics, 2010, 75(2): 246 -256.

[10] GARNETT J B. Bounded analytic function [M]. New York: Academic Press, 1987.

[11] TAN L H, YANG L H, HUANG D R. The structure of instantaneous frequencies of periodic analytic signals [J]. Science China: Series A, 2010, 53(2): 347 -355.

[12] OPPENHEIM A V, SCHAFER R W. Discrete-time signal processing [M]. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1989.