随机微分博弈下的资产负债管理*

杨 鹏[1]，林 祥[2]
（1. 西京学院基础部，陕西 西安 710123；
2. 中南大学数学与统计学院，湖南 长沙 410075）

摘 要：应用线性－二次控制的理论，研究了负债情形下投资者与市场之间的随机微分博弈。假设负债是服从几何布朗运动的随机过程且与股票价格完全相关，市场是博弈的“虚拟”手，博弈中投资者是主导者。在投资者具有指数效用和幂效用下，求得了最优投资组合策略、最优市场策略和值函数的显示解。并通过对结果的进一步分析，给出了在经济上的解释。

关键词：随机微分博弈；线性－二次控制；负债 ；指数效用；幂效用
中图分类号：F830；O225 **文献标志码：**A **文章编号：**0529－6579（2013）06－0030－04

Asset and Liability Management under Stochastic Differential Games

YANG Peng[1]，*LIN Xiang*[2]
（1. Department of Basic，Xijing College，Xian 710123，China；
2. School of Mathematics and Statistics，Central South University，Changsha 410075，China）

Abstract：Using linear-quadratic control theory，a stochastic differential game problem between investor and market with liability is investigated，in which the liability process is assumed to be a geometric Brownian motion and completely correlated with stock prices，with the market as the hypothetical counterpart and the investor as the leader of game. Under exponential utility and power utility，optimal investment strategies and optimal market strategies as well as the closed form expression of the value function are obtained. Though further analyzing of the results，some explanations in economic are given.

Key words：stochastic differential games；linear-quadratic control；liability；exponential utility；power utility

资产－负债管理问题是以研究负债情形下组合证券投资问题的最优投资策略和风险控制为目标，以实现资产的最优配置和套期保值为目的的一种现代金融管理方法。目前，已经受到理论界和许多金融机构的重视。文［1］研究了均值－方差准则下的负债问题。建立了负债与股票价格服从不同的布朗运动情形下的均值－方差模型，得到了最优投资策略和有效前沿的显示表达式。文［2］应用随机控制研究负债情形下基于效用最大化的动态投资组合。在指数效用，幂效用，对数效用下通过求解相应的 HJB 方程，得到了最优投资策略和值函数的显示解。类似的研究还有文［3－5］等。

我们发现已有文献对资产－负债管理问题的研究，只从投资者的角度出发，获得最优投资组合，而完全没有考虑市场对投资者的影响。我们知道，在实际中，投资者肯定会受到市场不确定性因素的影响，因此从投资者和市场两个角度同时考虑才更符合实际。这就是随机微分博弈问题。

随机微分博弈属于博弈论的范畴。博弈论虽然古已有之，但文［6］的发表才标志着随机微分博弈时代的真正到来。随机微分博弈，假设市场是博弈的“虚拟”对手，通过投资者和市场之间的双

* **收稿日期：**2013－04－16
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11271375）；西京学院校级科研资助项目（XJ120106，XJ120109）
作者简介：杨鹏（1983 年生），男；**研究方向：**数理金融、保险精算；E-mail：yangpeng511@163. com

重博弈得到最优的投资组合。它如今已成为数理金融学、管理学科的研究热点。如文［7］在跳－扩散金融市场中，利用随机微分博弈论研究了风险最小化的投资组合策略问题。文［8］也利用随机微分博弈论研究了 Markov 调制模型下的期权估值问题。文［9］研究了两个具有相关但不同投资机会的投资者之间基于随机微分博弈的最优投资问题。我们在随机微分博弈下研究了资产负债管理问题。投资者与市场之间的博弈，我们假设投资者是博弈的主导者。即目标是，在市场最坏的情况下，投资者选择一个最优的策略最大化终值财富的期望效用。因为在投资时，我们考虑到了市场出现的最坏情况。通过采用线性二次控制的理论，在指数效用和幂效用下得到了最优的投资策略、最优市场策略和值函数的显示解。

1　模型和随机微分博弈问题

1.1　模型

考虑一个金融市场，由 $n+1$ 个金融资产组成，其中一个是无风险资产（债券），时刻 t 的价格 $\{B_t, t\geqslant 0\}$ 满足方程 $\mathrm{d}B_t = rB_t\mathrm{d}t$，其中 $r>0$ 为无风险利率。n 个风险资产（股票），在时刻 t 时的价格 $S_i(t)$ 满足的随机微分方程为 $\mathrm{d}S_i(t) = S_i(t)[r_i\mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{n}\sigma_{ij}\mathrm{d}W^j(t)]$，$i=1,2,\cdots,n$。其中 $r_i \geqslant r_0$，$\sigma_{ij}>0$ 为常数，$W(t) = \{W^1(t),\cdots,W^n(t)\}$ 是 n 维标准布朗运动，假设 $W^j(t), j=1,2,\cdots,n$ 相互独立。

假设投资者在时刻 $t=0$ 有初始财富 $x>0$ 与初始负债 $l(l\in\mathbf{R})$，那么投资者在时刻 $t=0$ 有净初始财富 $x_0 = x-l$ 记 L_t 为时刻 t 投资者的累积负债，假设 L_t 满足的随机微分方程为 $\mathrm{d}L_t = L_t[u\mathrm{d}t + v\mathrm{d}\overline{W}(t)]$。其中 $\overline{W}(t)$ 是一维标准布朗运动，且 u 和 v 是两个常数。假设 $\overline{W}(t)$ 和 $W^j(t)$ 的相关系数为 ρ_j，即 $<\overline{W}(t), W^j(t)> = \rho_j t$，$j=1,2,\cdots,n$。$\rho = (\rho_1,\rho_2,\cdots,\rho_n)$，满足 $\rho\rho^{\mathrm{T}}=1$，则 L_t 满足如下的随机微分方程

$$\mathrm{d}L_t = L_t[u\mathrm{d}t + v\rho\mathrm{d}W(t)],\ L_0 = l_0 > 0$$

设 π 是投资到风险资产上的资金，这里 $\pi = (\pi^1, \pi^2,\cdots,\pi^n)$。考虑投资和负债后，财富过程 $X(t,\pi)$ 满足下面的随机微分方程

$$\mathrm{d}X(t,\pi) = [rX(t,\pi) + \pi(t)B - u]\mathrm{d}t + [\pi D^{\mathrm{T}} - v\rho]\mathrm{d}W(t) \qquad (1)$$

其中 $B = (r_1-r_0, r_2-r_0,\cdots,r_n-r_0)^{\mathrm{T}}$，$D = (\sigma_{ij})_{n\times n}$。

设 $\{F_t\}$ 是由布朗运动 $W(t)$ 生成的右连续，完备的自然流，对应的完备概率空间为 (Ω, F_t, P)，P 为一概率测度。

定义 1　一个策略 $\pi(\cdot)$ 称为可行的，如果 $\pi(\cdot)$ 关于流 $\{F_t\}$ 是可料的，且对于每个 $t\geqslant 0$ 过程 $\pi(\cdot)$ 满足下面的条件：

（i）$\int_0^T[\pi^i(t)]^2\mathrm{d}t < \infty$　a. e. 对所有 $T<\infty$，$i=1,2,\cdots,n$。

（ii）随机微分方程（1）对于 $\{\pi(t), t\geqslant 0\}$ 有唯一的强解。

所有可行的策略记为 Π。

设 $\{\theta(t) = [\theta_1(t),\theta_2(t),\cdots,\theta_n(t)] \mid t\geqslant 0\}$ 是定义在 (Ω, F_t, P) 上实值的满足下列条件的随机过程

（i）$\{\theta(t) = [\theta_1(t),\theta_2(t),\cdots,\theta_n(t)] \mid t\geqslant 0\}$ 是 F_t－循序可测的；

（ii）对几乎所有的 $(t,\omega)\in[0,+\infty)\times\Omega$，$\theta_i(t) := \theta_i(t,\omega) < 1$，$i=1,2,\cdots,n$；

（iii）$E\int_0^T\theta(t)\theta^{\mathrm{T}}(t)\mathrm{d}t < \infty$。

对满足上述条件的全体 $\theta(t)$ 记为 Θ。

对每个 $\{\theta(t)=[\theta_1(t),\theta_2(t),\cdots,\theta_n(t)] \mid t\geqslant 0\} \in \Theta$ 定义 $\{z^{\theta_i}(t) \mid t\geqslant 0\}$ 如下

$$z^{\theta_i}(t) = \exp\left\{-\int_0^t\theta_i(s)\mathrm{d}W_i(s) - \frac{1}{2}\int_0^t\theta_i^2(s)\mathrm{d}s\right\},$$

$$i = 1,2,\cdots,n;$$

$$\mathrm{d}z^{\theta_i}(t) = -z^{\theta_i}(t)\theta_i\mathrm{d}W_i, i = 1,2,\cdots,n$$

记

$$\mathrm{d}Z^{\theta}(t) = -Z^{\theta}(t)\theta\mathrm{d}W(t) \qquad (2)$$

其中 $Z^{\theta}(t) = (z^{\theta_1}(t), z^{\theta_2}(t),\cdots,z^{\theta_n}(t))$。因此 $Z^{\theta}(t)$ 是 $\{F_t, P\}$ 上的鞅，假设 $\{\theta(t) \mid t\geqslant 0\}$ 是 P－几乎处处有界的，所以 $Z^{\theta}(t)$ 是 $\{F_t, P\}$ 上的局部鞅。则 $EZ^{\theta}(T) = EZ^{\theta}(0) = 1$ 定义 $\frac{\mathrm{d}P^{\theta}}{\mathrm{d}P}\Big|_{F(T)} := Z^{\theta}(T)$，则对每个 $\theta\in\Theta$，有了一个新的概率测度 P^{θ}。

1.2　随机微分博弈问题

设 u 为一效用函数，$u'>0, u''<0$，即 u 是严格递增的凸函数。对每个投资策略 $\pi(\cdot)$，定义投资者的终值财富在 P^{θ} 下的期望效用为

$$V^{\pi,\theta}(t,x) = E_{\theta}[u(X_T^{\pi}) \mid X_t^{\pi} = x]$$

其中 E_{θ} 是在概率测度 P^{θ} 下的期望。

投资者与市场之间的博弈，假设投资者是博弈的主导者。即目标是，在市场最坏的情况下，投资者选择一个最优的策略 $\pi(\cdot)$ 最大化终值财富的期望效用。即

$$V(t,x) = \sup_{\pi\in\Pi}\inf_{\theta\in\Theta} V^{\pi,\theta}(t,x) = V^{\pi^*,\theta^*}(t,x) \quad (3)$$

其中 π^*,θ^* 为最优策略。该问题是投资者与市场之间的零和微分博弈问题，解决该问题就要找到最优的策略 π^*,θ^* 和相应的值函数 $V(t,x)$。

2 最优策略与值函数

2.1 指数效用函数

本节假设效用函数为指数效用 $u(x) = -\frac{1}{m}e^{-mx}$，下面我们将在该效用函数下求解投资者和市场之间的零和微分博弈问题。

引理 1 $g(t)$ 满足下面的常微分方程

$$g'(t) + g(t)me^{r(T-t)}(u - vB^TD^{-1}\rho^T) = 0,\quad g(T) = 1 \quad (4)$$

则

$$g(t) = \exp\left\{\frac{m(u - vB^TD^{-1}\rho^T)(e^{r(T-t)} - 1)}{r}\right\} \quad (5)$$

证明 解常微分方程（4）即可得到（5）。求解过程略。

定理 1 随机微分博弈问题（3）的最优投资策略为

$$\pi^* = v\rho(D^T)^{-1} \quad (6)$$

市场的最优策略为

$$\theta^* = B^TD^{-1} \quad (7)$$

值函数满足下式

$$V(t,x) = -\frac{1}{m}g(t)e^{-mxe^{r(T-t)}} \quad (8)$$

$g(t)$ 满足（5）式。

证明 令 $\pi(\cdot),\theta(\cdot)$ 是任意两个可行的策略，$X(t,\pi)$ 满足（1）式的控制过程，对 $-\frac{1}{m}zg(t)e^{-mxe^{r(T-t)}}$ 应用 Itô 公式，结合（5）式有

$$\begin{aligned}
&d\left[-\frac{1}{m}g(t)Z^\theta(t)e^{-mX(t,\pi)e^{r(T-t)}}\right]=Z^\theta(t)e^{-mX(t,\pi)e^{r(T-t)}}\cdot \\
&\{-rX(t,\pi)\ g(t)e^{r(T-t)} - \frac{1}{m}g'(t) - \frac{m}{2}g(t)e^{2r(T-t)}\cdot \\
&[\pi(t)D^TD\pi^T(t) - 2\pi vD^T\rho^T + v^2\rho\rho^T] + \\
&g(t)e^{r(T-t)}[rX(t,\pi) + \pi B - u] - \\
&g(t)e^{r(T-t)}[\pi D^T - v\rho]\theta(t)^T\}dt + \\
&\frac{1}{m}g(t)\theta(t)Z^\theta(t)e^{-mX(t,\pi)e^{r(T-t)}}dW(t) + \\
&g(t)Z^\theta(t)e^{r(T-t)}e^{-mX(t,\pi)e^{r(T-t)}}(\pi D^T - v\rho)dW(t) = \\
&Z^\theta(t)e^{-mX(t,\pi)e^{r(T-t)}}\cdot \\
&\left\{-\frac{m}{2}g(t)e^{2r(T-t)}[\pi(t) - \pi^*(t)]\ (D^TD)\cdot\right. \\
&[\pi(t) - \pi^*(t)]^T + \frac{m}{2}g(t)[\theta(t) - \theta^*(t)]\cdot \\
&[\theta(t) - \theta^*(t)]^T\}dt + \\
&\frac{1}{m}g(t)\theta(t)Z^\theta(t)e^{-mX(t,\pi)e^{r(T-t)}}dW(t) + \\
&g(t)Z^\theta(t)e^{r(T-t)}e^{-mX(t,\pi)e^{r(T-t)}}(\pi D^T - v\rho)dW(t)
\end{aligned}$$

其中 π^*，θ^* 分别满足（6）、（7）式，从 t 到 T 积分，在 $Z^\theta(t) = z,X(t,\pi) = x$ 的条件下在概率测度 P 取条件期望，应用 Beyes 准则，得到

$$\begin{aligned}
V^{\pi,\theta}(t,x) = &-\frac{1}{m}g(t)e^{-mxe^{r(T-t)}} + \\
&\frac{1}{z}E\left\{\int_t^T Z^\theta(s)e^{-mX(s,\pi)e^{r(T-s)}}\cdot\right. \\
&\left(\frac{m}{2}[\theta(s) - \theta^*(s)][\theta(s) - \theta^*(s)]^T\right) - \\
&\frac{m}{2}g(t)e^{2r(T-t)}[\pi(s) - \pi^*(s)](D^TD)^T\cdot \\
&[\pi(s) - \pi^*(s)]\}ds
\end{aligned}$$

因为 $g(t) > 0,Z^\theta(t) > 0$，所以问题得证。

推论 1 当不考虑负债，$u = v = \rho = 0$，随机微分博弈问题（3）的最优投资策略为

$$\pi^* = 0 \quad (9)$$

市场的最优策略为

$$\theta^* = B^TD^{-1} \quad (10)$$

注 1 从定理 1 和推理 1 得知，最优投资策略只和负债有关。当没有负债时，在市场出现最坏的情况，投资者会把全部的资金来购买无风险资产，不会冒最大的风险在股票上投资。这是符合人们的心理的。

注 2 市场的最优策略为常数，和负债没有关系。说明，负债只对投资者有影响，而对市场没有影响，这符合实际。因为，负债由投资者承担和市场没有关系。

2.2 幂效用函数

本节假设效用函数为指数效用 $u(x) = \frac{x^p}{p}(0 < p < 1)$，下面我们将在该效用函数下求解投资者和市场之间的零和微分博弈问题。

引理 2 $f(t)$，$h(t)$ 分别满足下面的常微分方程

$$f'(t) + rpf(t) = 0,f(T) = 1 \quad (11)$$

$$h'(t) - rph(t) + (u - vB^TD^{-1}\rho^T)p = 0,\quad g(T) = 0 \quad (12)$$

则

$$f(t) = e^{pr(T-t)} \quad (13)$$

$$h(t) = \frac{(u - vB^TD^{-1}\rho^T)p}{rp}[1 - e^{-rp(T-t)}] \quad (14)$$

证明 解常微分方程（11）、（12）式即可得到（13）、（14）式。求解过程略。

定理 2　随机微分博弈问题（3）的最优投资策略为

$$\pi^* = v\rho(D^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{15}$$

市场的最优策略为

$$\theta^* = B^{\mathrm{T}}D^{-1} \tag{16}$$

值函数满足下式

$$V(t,x) = f(t)\frac{[x - h(t)]^p}{p} \tag{17}$$

$f(t)$，$h(t)$ 分别满足（13）、（14）式。

证明　令 $\pi(\cdot),\theta(\cdot)$ 是任意两个可行的策略，$X(t,\pi)$ 满足（1）的控制过程，对 $f(t)\frac{[x-h(t)]^p}{p}z^\theta$ 应用 Itô 公式，则（13）、（14）式有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\left[f(t)\frac{[X(t,\pi)-h(t)]^p}{p}Z^\theta(t)\right] = \\
&\frac{Z^\theta(t)}{p}\{f'(t)[X(t,\pi)-h(t)]^p + \\
&f(t)(-p[X(t,\pi)-h(t)]^{p-1}h'(t) + \\
&p[X(t,\pi)-h(t)]^{p-1}(rX(t,\pi)+\pi B-u) + \\
&\frac{1}{2}p(p-1)[X(t,\pi)-h(t)]^{p-2}\cdot \\
&[\pi(t)D^{\mathrm{T}}D\pi^{\mathrm{T}}(t) - 2\pi vD^{\mathrm{T}}\rho^{\mathrm{T}} + v^2\rho\rho^{\mathrm{T}}] - \\
&p[X(t,\pi)-h(t)]^{p-1}[\pi D^{\mathrm{T}} - v\rho]\theta(t)^{\mathrm{T}})\}\mathrm{d}t - \\
&f(t)\frac{[X(t,\pi)-h(t)]^p}{p}Z^\theta(t)\theta(t)\mathrm{d}W(t) + \\
&f(t)[X(t,\pi)-h(t)]^pZ^\theta(t)(\pi D^{\mathrm{T}} - v\rho)\mathrm{d}W(t) = \\
&\frac{Z^\theta(t)}{p}\left\{\frac{1}{2}p(p-1)[X(t,\pi)-h(t)]^{p-2}\cdot\right. \\
&[\pi(t)-\pi^*(t)](D^{\mathrm{T}}D)[\pi(t)-\pi^*(t)]^{\mathrm{T}} + \\
&\frac{1}{2}\frac{p}{1-p}[X(t,\pi)-h(t)]^p[\theta(t)-\theta^*(t)]\cdot \\
&[\theta(t)-\theta^*(t)]^{\mathrm{T}}\}\mathrm{d}t - f(t)\frac{[X(t,\pi)-h(t)]^p}{p}\cdot \\
&Z^\theta(t)\theta(t)\mathrm{d}W(t) + f(t)[X(t,\pi)-h(t)]^p\cdot \\
&Z^\theta(t)(\pi D^{\mathrm{T}} - v\rho)\mathrm{d}W(t)
\end{aligned}$$

其中 π^*，θ^* 分别满足（15）、（16）式，从 t 到 T 积分，在 $Z^\theta(t) = z, X(t,\pi) = x$ 的条件下在概率测度 P 取条件期望，应用 Beyes 准则，得到

$$\begin{aligned}
&V^{\pi,\theta}(t,x) = f(t)\frac{[x-h(t)]^p}{p} + \\
&\frac{1}{z}E\int_t^T\left\{\frac{Z^\theta(s)}{p}\left\{\frac{1}{2}\frac{p}{1-p}[X(s,\pi)-h(s)]^p\cdot\right.\right. \\
&[\theta(s)-\theta^*(s)]^{\mathrm{T}}[\theta(t)-\theta^*(s)] + \\
&\frac{1}{2}p(p-1)[X(s,\pi)-h(s)]^{p-2}\cdot \\
&[\pi(s)-\pi^*(s)](D^{\mathrm{T}}D)[\pi(s)-\pi^*(s)]^{\mathrm{T}}\}
\end{aligned}$$

因为 $g(t) > 0, Z^\theta(t) > 0$，所以问题得证。

参考文献：

[1] XIE S, LI Z, WANG S. Continuous-time portfolio selection with liability: mean-variance model and stochastic LQ approach [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 2(3): 943 – 953.

[2] 常浩，荣喜民. 负债情形下效用投资组合选择的最优控制[J]. 应用概率统计, 2012, 2(5): 57 – 470.

[3] 金秀，黄小原. 资产负债管理问题及在辽宁养老金问题中的应用[J]. 统工程理论与实践, 2005, 25(9): 42 – 48.

[4] 吉小东，汪寿阳. 中国养老金动态资产负债管理的优化模型与分析[J]. 统工程理论与实践, 2005, 25(8): 50 – 54.

[5] CHIU M C, LI D. Asset and liability management under a continuous-time mean-variance optimization framework [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2006, 39(3): 330 – 355.

[6] ISAACS R. Differential games[M]. New York: Wiley, 1965.

[7] MATARAMVURA S, OKSENDAL B. Risk minimizing portfolios and HJBI equations for stochastic differential games [J]. Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 2008, 4: 317 – 337.

[8] SIU T K. A game theoretic approach to option valuation under Markovian regime-switching models [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42(3), 1146 – 1158.

[9] BROWNE S. Stochastic differential portfolio games [J]. Journal of Applied Probability, 2000, 37 (1): 126 – 147.

（上接第 29 页）

[6] DEL MEDICO A, KONG Q K. Kamenev-type and interval oscillation criteria for second-order linear differential equations on a measure chain [J]. J Math Anal Appl, 2004, 294: 621 – 643.

[7] HUANG H, WANG Q R. Oscillation of second-order nonlinear dynamic equations on time scales [J]. Dynam Systems Appl, 2008, 17(3/4): 551 – 570.

[8] WANG Q R. Oscillation criteria for nonlinear second order damped differential equations [J]. Acta Math Hunger, 2004, 102: 117 – 139.