第 52 卷 第 2 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 52 No. 2
2013 年 3 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Mar. 2013

广义算子半群渐近行为及其强弱稳定性*

仓定帮，陈 藏，葛世刚
（华北科技学院，北京 101601）

摘 要：首先给出了由 Banach 空间有界线性算子引导的广义算子半群的定义及其性质；其次研究广义算子半群的渐近表达式；最后研究了广义算子半群的强弱稳定性，给出了广义算子半群强弱稳定性等价的条件。

关键词：广义算子半群；渐近行为；强稳定性；弱稳定性
中图分类号：O177. 2 **文献标志码**：A **文章编号**：0529 - 6579（2013）02 - 0062 - 04

The Asymptotic Behavior and Strong or Weak Stability for Generalized Operator Semigroups

CANG Dingbang, *CHEN Cang*, *GE Shigang*
（North China Institute of Science and Technology, Beijing 101601, China）

Abstract: First, the concept of generalized operator semigroups and some properties are given. Then by studying the stability of generalized operator semigroups, the asymptotic behavior representations for generalized operator semigroups are obtained. In addition, the equivalent conditions for strong stability and weak stability of generalized operator semigroups are also given.

Key words: generalized operator semigroups; asymptotic behavior; strong stability; weak stability

自 1942 年，为了解决偏微分方程的初值问题，以 Hille 与 Yosida 为代表的一些数学家提出了 Banach 空间上强连续 C_0 半群理论。此后，算子半群理论得到了不断的充实与发展。根据不同应用▫▫，C 半群、积分半群等理论不断被提出[1-5]，在解决偏微分方程领域起着非常重要的作用。分布参数控制系统，现代航天技术等工程领域中引人注目的问题的数学模型均为其有力的▫▫。

广义分布参数系统，即对时间的偏导数项的系数算子不一定可逆的系统，是由广义偏微分方程、广义积分方程或无限维空间中广义抽象微分方程所描述的系统的总称。由于其具有强有力的物理▫▫，如复合材料的温度分布问题、电磁耦合超导线路中的电压分布问题等，近年来得到了广泛的研究[6-10]。文献［6］研究了下面的齐次与非齐次的广义分布系统 $\begin{cases} E\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax \\ x(0) = x_0 \end{cases}$，$\begin{cases} E\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = Ax + f(x) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$ 的求解问题，其中 E 是有界线性算子，A 为线性闭算子。通过研究发现上面的问题要想通过 *Laplace* 变换和卷积公式进行计算存在困难，由此提出了广义预解式和广义算子半群的▫念，从而为研究上述广义系统的适定性提供了新的方法。本文对广义算子半群作了进一步分析，研究了广义算子半群的渐进行为，并且给出了广义算子半群强弱稳定性等价的条件。

1 定义与引理

定义 1[6] 设 E 是 Banach 空间上的有界线性算子，A 是闭线性算子，称 $\rho(E,A) = \{\lambda : \lambda \in \mathbf{C},$

* **收稿日期**：2012 - 09 - 11
基金项目：国家自然科学基金资助项目（10671205）；中▫高校基本科研基金资助项目（JCB1201B，2010LKSX08）
作者简介：仓定帮（1980 年生），男，▫▫；E-mail：cdbjd@163. com

$(\lambda E - A)^{-1}$ 是 Banach 空间上的线性算子｝为算子 A 的广义预解集，$\rho(E,A)$ 的余集称为 A 的 E 广义谱集，记为 $\sigma(E,A)$。对 $\lambda \in \rho(E,A)$，称 $R(\lambda E,A) = (\lambda E - A)^{-1}$ 为 A 的 E 广义预解式。

定义 2[6]　设 X 是 Banach 空间，$B(X)$ 是 X 上的有界线性算子全体，设单参数算子 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0} \in B(X)$，$E$ 是一个有界线性算子，若 $T(t+s) = T(t)ET(s), \forall t,s \geqslant 0$，则称 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是由 E 引导的广义算子半群，简称广义算子半群。

定义 3[6]　设 A 是 X 中的闭稠定线性算子，$\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是强连续有界线性算子，且存在 $M>0$，$\omega_0 \in \mathbf{R}$，使得 $\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega_0 t}$ 成立，E 是一个有界线性算子，若下面的式子成立

$$(\lambda E - A)^{-1} = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)\,dt, \lambda \in \mathbf{C}, \mathrm{Re}\lambda > \omega_0 \quad (1)$$

此时 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 称为由 E 引导的以 A 为生成元的指数有界的广义算子半群。

引理 1　若 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 称为由 E 引导的以 A 为生成元的指数有界的广义算子半群，则下面的结论成立：

(i) $T(t)T(s) = T(s)T(t)$，$\forall s,t \geqslant 0$；

(ii) $T(t)Ex - x = A\int_0^t T(s)x\,ds$，$t \geqslant 0$。

证明　(i) 由定义 2 及定义 3 知存在 $M>0$，$\omega_0 \in \mathbf{R}$ 使得 $\|T(t)\| \leqslant Me^{\omega_0 t}$ 成立，并且有 $R(\lambda E,A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)\,dt, \lambda \in \mathbf{C}, \mathrm{Re}\lambda > \omega_0$。因此对于固定的 $\mu \in \rho(E,A)$ 有

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)R(\mu E,A)\,dt = R(\lambda E,A)R(\mu E,A) = \int_0^\infty e^{-\lambda t}R(\mu E,A)T(t)\,dt$$

根据 Laplace 变换的唯一性可知 $T(t)R(\mu E,A) = R(\mu E,A)T(t)$，再结合 (1) 式可得 $\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)T(s)\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(s)T(t)\,dt$，再由 Laplace 变换的唯一性可知 $T(t)T(s) = T(s)T(t)$ 成立。

下面证明 (ii)，$\forall x \in D(A), \mathrm{Re}\lambda > \omega_0$ 有

$$\lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}x\,dt = x = \lambda R(\lambda E,A)Ex - AR(\lambda E,A)x = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Ex\,dt - \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Ax\,dt = \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)Ex\,dt - \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t AT(t)x\,ds\,dt$$

再根据 Laplace 变换的唯一性可知 $T(t)Ex - x = A\int_0^t T(s)x\,ds$。

引理 2[6]　设 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 称为由 E 引导的以 A 为生成元的强连续广义算子半群，若 $\gamma > \max\{0, \omega_0\}$，则 $\forall x \in X$，$T(t)x = \lim\limits_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{\lambda t}R(\lambda E, A)x\,d\lambda$ 且在 t 的有限区间上是一致收敛。

引理 3[6]　设 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 称为由 E 引导的以 A 为生成元的强连续广义算子半群，则 $\forall x \in X$ 有

$$T(t)x = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t},A\right)\left[E\frac{n}{t}R\left(\frac{n}{t}E,A\right)\right]^n x$$

并且上述的极限在 t 的任何有界区间上是一致的。

2　广义算子半群的渐近行为

预解式增长阶假设：设 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 为由 E 引导的以 A 为生成元的广义算子半群，假设 $\mathrm{Re}\sigma(E,A) \leqslant -\sigma < 0$ 且广义预解式满足：对整数 N，当 $\mathrm{Re}\lambda > -\sigma, \mathrm{lm}\lambda \to \infty$ 时有 $|R(\lambda E,A)| \sim o(|\lambda|^N)$ 成立。

定理 1　设 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 为由 E 引导的以 A 为生成元的指数有界的广义算子半群，$\mathrm{Re}\sigma(E,A) \leqslant -\sigma < 0$。若预解式增长阶假设对 $N \geqslant 2$ 成立，则存在 $\mu > 0$，$0 < \mu < \sigma$，$K(\mu) > 0$，使得 $\|A^{-(N+2)}T(t)E^{(N+2)}x\| \leqslant K(\mu)e^{-\mu t}\|x\|$ 成立。

证明　据引理 2，$T(t)x = \lim\limits_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{\lambda t}R(\lambda E, A)x\,d\lambda$，可得

$$T(t)Ex - x = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{\lambda t}\left(R(\lambda E,A)E - \frac{1}{\lambda}\right)\cdot x\,d\lambda = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{\lambda t}A(R(\lambda E,A))\frac{1}{\lambda}x\,d\lambda$$

再根据 $0 \in \rho(E,A)$ 进而有 $A^{-1}(T(t)Ex - x) = \lim\limits_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega} e^{\lambda t}(R(\lambda E,A))\frac{1}{\lambda}x\,d\lambda$。对上式积分得

$$\int_0^t A^{-1}(T(s)Ex - x)\,ds = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega}\frac{e^{\lambda t}R(\lambda E,A)}{\lambda^2}\cdot x\,d\lambda - \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega}R(\lambda E,A)\frac{1}{\lambda^2}x\,d\lambda$$

因为 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是指数有界的，经过简单的计算有

$$\|R(\lambda E,A)x\| \leqslant \frac{M}{\mathrm{Re}\lambda - \omega_0}\|x\|, \mathrm{Re}\lambda > \omega_0,$$

$$\|R(\lambda E,A)x\| \leqslant \frac{M}{\gamma - \omega_0}\|x\|, \mathrm{Re}\lambda > \gamma$$

从而积分 $\lim\limits_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega}R(\lambda E,A)\frac{1}{\lambda^2}x\,d\lambda = 0$，因此

$$A^{-1}\int_0^t T(s)Ex\,ds - A^{-1}\int_0^t x\,ds = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma-i\omega}^{\gamma+i\omega}\frac{e^{\lambda t}R(\lambda E,A)}{\lambda^2}x\,d\lambda$$

再根据 $T(t)Ex - x = A\int_0^t T(s)x\mathrm{d}s$，计算得到

$$A^{-2}T(t)E^2x - A^{-2}Ex - A^{-1}tx = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\omega}^{\gamma+\mathrm{i}\omega}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}R(\lambda E,A)}{\lambda^2}x\mathrm{d}\lambda$$

继续积分可得

$$A^{-n}T(t)E^nx - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{A^{-(n-k)}t^kE^kx}{k!} = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\gamma-\mathrm{i}\omega}^{\gamma+\mathrm{i}\omega}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}R(\lambda E,A)}{\lambda^n}x\mathrm{d}\lambda \qquad (2)$$

令 $-\sigma < -\mu < 0$，使得当 $-\mu \leqslant \mathrm{Re}\lambda \leqslant \gamma$ 时预解式增长阶假设成立。定义曲线 $C = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$，其中 $\Gamma_1 = \{\gamma + \mathrm{i}y;\ -\omega \leqslant y \leqslant \omega\}$，$\Gamma_2 = \{x + \mathrm{i}y;\ -\mu \leqslant x \leqslant \gamma\}$，$\Gamma_3 = \{-\mu + \mathrm{i}y;\ -\omega \leqslant y \leqslant \omega\}$，$\Gamma_4 = \{x - \mathrm{i}\omega;\ -\mu \leqslant x \leqslant \gamma\}$。因为

$$\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_C\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}R(\lambda E,A)}{\lambda^n}x\mathrm{d}\lambda = \mathrm{Re}\ s(\lambda = 0)\cdot\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}R(\lambda E,A)}{\lambda^n}x = -\sum_{k=0}^{n-1}\frac{A^{-(n-k)}t^kE^kx}{k!}$$

再根据（2）得 $A^{-n}T(t)E^nx = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_2+\Gamma_3+\Gamma_4}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}R(\lambda E,A)}{\lambda^n}x\mathrm{d}\lambda$。在上式中令 $n = N+2$，由增长阶假设可得 $\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_2}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}R(\lambda E,A)}{\lambda^{(N+2)}}x\mathrm{d}\lambda = 0$，$\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_4}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}R(\lambda E,A)}{\lambda^{(N+2)}}x\mathrm{d}\lambda = 0$。因此

$$A^{-(N+2)}T(t)E^{(N+2)}x = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\Gamma_3}\frac{\mathrm{e}^{\lambda t}R(\lambda E,A)}{\lambda^{(N+2)}}x\mathrm{d}\lambda$$

也即

$$A^{-(N+2)}T(t)E^{(N+2)}x = \lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mu t}\cdot\int_{-\omega}^{\omega}\frac{R((-\mu+\mathrm{i}y)E,A)}{(-\mu+\mathrm{i}y)^{(N+2)}}x\mathrm{d}y$$

再利用预解式增长阶假设有 $\left\|\lim_{\omega\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\mathrm{e}^{-\mu t}\cdot\int_{-\omega}^{\omega}\frac{R((-\mu+\mathrm{i}y)E,A)}{(-\mu+\mathrm{i}y)^{(N+2)}}x\mathrm{d}y\right\| \leqslant K(\mu)\mathrm{e}^{-\mu t}\|x\|$。因此可得 $\forall x \in X$，$\|A^{-(N+2)}T(t)E^{(N+2)}x\| \leqslant K(\mu)\mathrm{e}^{-\mu t}\|x\|$ 成立，证毕。

3 广义算子半群的强弱等价性

定义 4 设 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 为由 E 引导的以 A 为生成元的广义算子半群，若 $\forall x \in X$，$\lim\limits_{t\to\infty}T(t)x = 0$ 在强或弱拓扑下成立，则 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 称为强稳定或弱稳定。进一步若存在 $M > 0$，$\omega > 0$，使得 $\|T(t)\| \leqslant M\mathrm{e}^{-\omega t}$，此时 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 称为指数稳定的。

一般来说，指数稳定，强稳定与弱稳定不等价，指数稳定可推出强稳定，强稳定可推出弱稳定。下文主要研究了广义算子半群的强弱稳定性等价的条件。

定理 2 设 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 为由 E 引导的以 A 为生成元的广义算子半群，E 为压缩算子，$\overline{R(E)} = X$，且满足存在某一 $t_0 > 0$ 使得 $T(t_0)E = ET(t_0)$ 成立，则广义算子半群 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的强弱稳定性等价。

证明 假设 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是弱稳定的，则根据题设条件和一致有界定理可知 $\|T(t)\| \leqslant M, t_0 > 0$。

且 $T(nt_0)E = T(t_0)ET(t_0)E\cdots T(t_0)E = ET(nt_0)$。$\forall t > t_0$，令 $t = n(t)t_0 + \alpha(t)$，$n(t) \in \mathbf{N}$，$0 \leqslant \alpha(t) < t_0$，

则 $n(t)t_0 = t - \alpha(t) > t - t_0 \to \infty$，$t \to \infty$。

$$\|T(t)Ey\| = \|T(\alpha(t))ET(n(t)t_0)Ey\| \leqslant M\|E^2T(nt_0)y\| = M\|E^2T(nt_0)y\|,\ \forall y \in X$$

因为当 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是弱稳定时有 $\lim\limits_{t\to\infty}T(n(t)t_0)y = 0$，又有 E 是压缩算子，可得 $\lim\limits_{t\to\infty}\|E^2T(nt_0)y\| = 0$，即 $\lim\limits_{t\to\infty}\|T(t)Ey\| = 0$。注意到 $\overline{R(E)} = X$，即 $\forall x \in X$，存在序列 $\forall y_n \in X$ 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x - Ey_n\| = 0$，又因为 $\|T(t)x\| = \|T(t)(x - Ey_n)\| + \|T(t)Ey_n\| \leqslant M\|x - Ey_n\| + \|T(t)Ey_n\|$，可得 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|T(t)x\| \leqslant M\|x - Ey_n\|$，令 $n \to \infty$ 有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\|T(t)x\| = 0$，所以有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|T(t)x\| = 0$，即广义算子半群 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是强稳定的。

定理 3 设 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是指数有界的由 E 引导的以 A 为生成元的广义算子半群，$\overline{R(E)} = X$，当 $t > 0$ 时，对于下列条件：

(i) 存在 $\lambda_0 \in \rho(E,A)$ 使得 $ER(\lambda_0E,A) = R(\lambda_0E,A)E$；

(ii) $EA \subset AE$；

(iii) $\forall\lambda \in \rho(E,A)$，$ER^n(\lambda E,A) = R^n(\lambda E,A)E$，$n \in \mathbf{N}$；

(iv) $ET(t) = T(t)E$。

有 (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) $\Rightarrow$ (iv)。

证明 (i) $\Rightarrow$ (ii) $\forall x \in D(A)$，令 $(\lambda_0E - A)x = y$，则 $x = R(\lambda_0E,A)y$，从而有

$$Ex = ER(\lambda_0E,A)y = R(\lambda_0E,A)Ey \in D(A)$$

进一步计算可得

$$EAx = \lambda_0E^2x - E(\lambda_0E - A)x = \lambda_0R(\lambda_0E,A)E^2y - Ey =$$

$$[\lambda_0E-(\lambda_0E-A)]R(\lambda_0E,A)Ey=AEx$$

即可证得：$EA\subset AE$。

(ii) ⇒ (iii)　$\forall\lambda\in\rho(E,A)$，$\forall x\in X$，令 $R(\lambda E,A)x=z$，则 $z\in D(A)$，并且

$$E(\lambda E-A)z=\lambda E^2z-EAz=$$
$$\lambda E^2z-AEz=(\lambda E-A)Ez$$

即得 $R(\lambda E,A)E=ER(\lambda E,A)$，进而可知 $R^n(\lambda E,A)E=ER^n(\lambda E,A)$。

(iii) ⇒ (iv)　因为 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是指数有界的，$\|T(t)\|\leqslant Me^{\omega t}$。对 $t>0$，令 $\lambda_n=\frac{n}{t}$（n 足够大），则 $\lambda_n>\omega$，$\lambda_n\in\rho(E,A)$，因此 $R^n(\lambda_nE,A)E=ER^n(\lambda_nE,A)$。再根据引理 3 可得

$$ET(t)x=E\lim_{n\to\infty}\frac{n}{t}R(\frac{n}{t},A)[E\frac{n}{t}R(\frac{n}{t}E,A)]^nx$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{t}R(\frac{n}{t},A)[E\frac{n}{t}R(\frac{n}{t}E,A)]^nEx=T(t)Ex$$

定理 4　设 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 是指数有界的由 E 引导的以 A 为生成元的广义算子半群，E 为压缩算子，$\overline{R(E)}=X$，若下面的条件之一成立：

(i) 存在 $\lambda_0\in\rho(E,A)$，使得 $R(\lambda_0E,A)Ex=ER(\lambda_0E,A)x$；

(ii) $EA\subset AE$。

则 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的强弱稳定性等价。

证明　由定理 3 可知，上述条件之一成立时定理 2 的条件成立，从而根据定理 2 可知 $\{T(t)\}_{t\geqslant 0}$ 的强弱稳定性等价。

参考文献：

[1] TANAKA N, MIYADERA I. Exponentially bounded C-semigroups and integrated semigroups [J]. Tokyo J Math, 1989, 1: 99－115.

[2] NEUBRANDER F. Integrated semigroups and application to the abstract Cauchy problem [J]. Pacific J of Math, 1988, 135(1): 111－155.

[3] ZHENG Q. Application of integrated semigroups to higer order abstract Cauchy problem [J]. Systems Science&Mathematical Sciences, 1992, 5(4): 316－327.

[4] RALPH DELAUBENFELS. C-semigroups and strongly continuous semigroups [J]. Israel Journal of Mathematics, 1993, 1: 227－255.

[5] 郑权,雷岩松. 关于积分 C 半群[J]. 华中理工大学学报, 2000, 4(20): 181－187.

[6] 葛照强,朱广田,冯德兴. 广义算子半群与广义分布参数系统的适定性[J]. 中国科学:数学, 2010, 40(5): 477－495.

[7] JODER L, FEMANDEZ M L. An implicit difference methods for the numerical of solution of coupled system of partial differential equations [J]. Appl Math Comput, 1991, 46:127－134.

[8] LEWIS F L. A review of 2－D implicit systems [J]. Automatic, 1992, 28:345－354.

[9] HU Y, PENG S G, LI X J. Maximum principle for optimal control problem of nonlinear generalized systems-infinite dimensional case [J]. Acta Math Appl Sin, 1992, 15: 99－104.

[10] TRAZSKA Z, MARSZALEK W. Singular distributed parameter systems [J]. IEEE Control Theory Appl, 1993, 40:305－308.

[11] ADRENT W. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems [J]. Israel J of Math, 1987, 59: 327－352.

[12] MARSHALL S. Asymptotic behavior of C_0-semigroups as determined by the spectrum of the generator [J]. Indiana University Mathematics Jouranl, 1976, 25(8): 782－793.

[13] ZHANG L P. Characteristic conditions for eventually normed continuous semigroup on a Hilbert space [J]. Acta Mathematica Sinica, 2003, 46(3): 439－444.

[14] SONG G Z. A problem of exponential stability for semigroups on Hilbert space [J]. Chinese Annals of Mathematics, 1992, 13A(5): 648－652.

[15] BENCHIMOL C D. Feedback stabilizability in Hilbert space [J]. Appl Math Optim, 1978, 4: 225－248.