

共形粘合的有界度圆填充逼近*

陈德健, 蓝师义

(广西民族大学理学院, 广西南宁 530006)

摘要: 共形粘合在 Teichmüller 理论和拟共形映射的发展中起着关键作用。文中应用有界度圆填充构造了由一个拟对称映射诱导的共形粘合映射及其相关拟圆周的离散近似, 并证明了它们的收敛性。这为共形粘合映射提供了一种更一般的离散近似方法。

关键词: 圆填充; 共形粘合; 拟圆周; 拟对称

中图分类号: O174.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2013) 04-0034-06

Approximation of Conformal Welding via Circle Packings with Bounded Degree

CHEN Dejian, LAN Shiyi

(College of Science, Guangxi University for Nationalities, Nanning 530006, China)

Abstract: Conformal welding plays an important role in the development of Teichmüller theory and quasi-conformal maps. The discrete approximations of conformal welding and associated quasicircle induced by a quasisymmetry mapping are constructed using circle packings with bounded degree, and their convergence is proved. This provides a more general approach for approximating conformal welding mappings.

Key words: circle packing; conformal welding; quasicircle; quasisymmetry

圆填充是指具有特定相切模式的一种圆格局, 其理论在复分析与离散几何的交叉学科中是当今一个快速发展的研究领域。近几年来在这个领域研究所取得的成就起源于 Fields 奖得主 Thurston^[1] 在 1985 年提出这样的猜测: 六边形圆填充可用来近似 Riemann 映射。1987 年 Rodin 等^[2] 证明了该方案的收敛性。随后出现大量关于圆填充理论及其应用的研究 (见文 [3-6] 等)。共形粘合最近重新引起人们的研究兴趣, 是因为它在图像识别和弦理论研究中有着重要的应用。例如, Mumford 等^[7] 用共形粘合作为关键步骤来研究图像识别方法; Radnell^[8] 证明了有界 Riemann 曲面的拟对称粘合可以给弦理论提供一个模型; Williams^[9] 用离散粘合技术构造了三角剖分曲面的共形映射。

对共形粘合的离散逼近的研究, Williams^[10] 已经建立了共形粘合的六边形圆填充离散逼近。在本文, 我们将 Williams 的结果推广到非六边形圆填充即有界度圆填充的情形。首先, 我们讨论平面内两个不相交圆盘的共形粘合。从复平面内无限有界度圆填充的载体我们可以构造这两个圆盘的近似区域, 将组合粘合技术应用于此两个近似区域, 我们得到球面上的一个三角剖分。根据圆填充定理, 就得到 Riemann 球面上一个相关的圆填充。由此我们可建立两个离散近似映射。然后, 证明了它们分别收敛于由一个拟对称诱导的两个共形粘合, 并且散粘合曲线也收敛于该拟对称诱导的拟圆周; 其次, 我们研究上半平面与下半平面的共形粘合。应用两个有限正方形区域序列分别近似上半平面与下

* 收稿日期: 2013-01-07

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11161004); 广西自然科学基金资助项目 (2013GXNSFAA019015); 广西混杂计算重点实验室资助项目

作者简介: 陈德健 (1987 年生), 男; 通讯作者: 蓝师义; E-mail: lanshiyi@gxun.cn

半平面，对于每一对正方形区域，类似于前面的做法，我们可以得到它们的有界度圆填充离散近似区域，对这两个近似区域应用组合粘合方法就得到一个拓扑圆盘的三角剖分，这就给出复平面上一个相关的圆填充。基于此，我们就可以建立两个离散近似映射，然后推出它们的收敛性。

本文工作与文 [10] 的主要不同是：第一，构造离散共形粘合所使用的圆填充不同，文 [10] 应用六边形圆填充即每个圆的周围都有六个相邻圆，而我们应用有界度圆填充，也就是每个圆的周围不一定都有六个相邻圆，但只要其相邻圆的个数有界就可以；第二，所粘合的区域不一样，我们将文 [10] 所讨论的单位圆盘与单位圆盘外部的离散粘合推广到复平面内任意两个相交圆盘的情形。本文组织如下：在第 1 节给出圆填充与共形粘合的基本概念及一些相关结果；在第 2 节讨论平面两个不相交圆盘的离散共形粘合；上半平面与下半平面的离散共形粘合在第 3 节讨论。

1 圆填充与共形粘合

在这一节我们将简要给出圆填充与共形粘合的基本概念及其相关结果，更详细的背景知识，可参见文 [6, 11] 等。

定义 1 给定一个三角剖分 K ，我们称复平面 \mathbb{C} 内一个圆集合 P 为关于 K 的圆填充，若下面条件成立：

- (i) 对于 K 中每个顶点 u ，在 P 中都有一个圆 C_u 与之对应；
- (ii) 若 $[u, v]$ 是 K 的一条边，则圆 C_u 与 C_v 外切；
- (iii) 若 u, v, w 是 K 内的一个正向面，则 C_u, C_v, C_w 组成 P 中一个正向的两两相切的三个圆。

一个圆填充称为单叶的，如果它所有的圆都不重叠，也就是没有两个圆相交多于一点。一个圆填充称为有界度圆填充，若其每个圆的相邻圆的个数都小于或等于某个常数。用测地线连接圆填充 P 中所有相切圆的中心所形成的几何复形称为 P 的载体，记为 $\text{carr}(P)$ ，也称为复形 K 在欧式平面 \mathbb{C} 上的嵌入。

关于圆填充的存在唯一性，我们给出下面本文将用到的两个结果，它们可以从文 [6] 得到。

命题 1 (圆填充定理) 给定球面上的一个抽象三角剖分 K ，则在 Riemann 球面 \mathbb{S}^2 上存在关于 K 的单叶圆填充 P ，且 P 对于 Möbius 变换来说是唯一的。

命题 2 一定存在复平面 \mathbb{C} 内无限的有界度单叶圆填充 P ，使得其载体填满整个复平面 \mathbb{C} ，即 $\text{carr}(P) = \mathbb{C}$ 。

定义 2 给定两个 Jordan 区域 D_1 和 D_2 以及它们边界上的一个同胚映射 $\varphi: \partial D_1 \rightarrow \partial D_2$ ，如果等同点 $x \in D_1$ 与 $\varphi(x) \in D_2$ ，那么就可以把 D_1 和 D_2 粘合在一起。进一步，若存在两个共形映射 $f: D_1 \rightarrow \Omega$ 与 $g: D_2 \rightarrow \Omega^*$ ，使得在边界上有 $g = f \circ \varphi$ ，其中 Ω 和 Ω^* 分别为 Riemann 球面 \mathbb{S}^2 内某一条 Jordan 曲线 Γ 的有界分支与无界分支，则称 φ 为一个共形粘合。

定义 3 设 D 和 D^* 是复平面 \mathbb{C} 内的两个圆盘，映射 $\varphi: \partial D^* \rightarrow \partial D$ 是一个保向同胚映射。若一个存在常数 K ，使得 ∂D^* 上任意具有相同长度 ($|I|_{\partial D^*} = |J|_{\partial D}$) 的两个相邻的子区间 I 与 J ，有 $\frac{1}{K} \leq \frac{|\varphi(I)|_D}{|\varphi(J)|_D} \leq K$ ，则称 φ 为一个 K 拟对称映射。

定义 4 设 Γ_1 和 Γ_2 是复平面 \mathbb{C} 内的两条 Jordan 曲线，称映射 $\varphi: \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$ 为一个 K -双 Lipschitz 同胚映射，若对所有 $x, y \in \Gamma_1$ ，有 $\frac{1}{K} |x - y|_{\Gamma_1} \leq |\varphi(x) - \varphi(y)|_{\Gamma_2} \leq K |x - y|_{\Gamma_1}$ 。

容易知道，任意一个 K -双 Lipschitz 映射都是一个 K^2 -拟对称映射。关于两个区域的共形粘合问题，有下面著名结果，也称为共形粘合定理，它可由文 [11] 得到。

命题 3 (共形粘合定理) 设 $D, D^* \subset \mathbb{C}$ 是两个不相交的圆盘， $\varphi: \partial D^* \rightarrow \partial D$ 是一个拟对称映射，则存在两个共形映射 $f: D \rightarrow \Omega$ 和 $g: D^* \rightarrow \Omega^*$ ，使得它们在边界上满足 $g = f \circ \varphi$ ，这里 Ω 与 Ω^* 是 \mathbb{S}^2 上某一条 Jordan 曲线的两个分支。

本文的主要目标是应用有界度圆填充方法构造命题 3 中 f 与 g 的离散近似映射，并证明它们的收敛性。

2 圆盘粘合的离散近似

在这一节我们将讨论两个拓扑圆盘的离散共形粘合。也就是，我们应用有界度圆填充技术构造两个圆盘粘合的离散近似映射，然后证明这些离散粘合映射收敛于共形粘合映射。这分为下面三个步骤进行。

第一步，首先描述两个三角剖分的组合粘合。设 T 和 T^* 是两个拓扑圆盘的三角剖分，且假设它们被嵌入到复平面 \mathbb{C} 内，使得它们的每个三角形都是欧氏三角形。将 T 的边界顶点，按逆时针记为

$v_1, v_2, \dots, v_n, T^*$ 的边界顶点按顺时针记为 w_1, w_2, \dots, w_m 。设 $\varphi: \partial T^* \rightarrow \partial T$ 是一个 K -双 Lipschitz 同胚映射。为了确保 T^* 中每个边界顶点在 φ 下的像都是 T 中某一边界顶点, 因此, 我们需要对 T^* 的每个边界顶点 $\omega_i (i = 1, 2, \dots, m)$ 按下面添加一个顶点

$$\tilde{v}_i = \begin{cases} v_j, & \text{当 } |\varphi(\omega_i) - v_j| \leq \frac{r}{3K} \text{ 时,} \\ \varphi(\omega_i), & \text{其他} \end{cases}$$

到 T 的边界上, 其中 $r = \min_{ij} \{ |w_i - w_{i+1}|_{\partial T^*}, |v_j - v_{j+1}|_{\partial T} \}$, 并添加相应新的边就得到一个新的三角剖分, 记为 \mathcal{T} 。类似地, 对 T 中每一个边界顶点 $v_j (j = 1, 2, \dots, n)$, 按如下添加一个顶点

$$\tilde{\omega}_j = \begin{cases} \omega_i, & \text{若 } v_j = \tilde{v}_i, \\ \varphi^{-1}(v_j), & \text{其它} \end{cases}$$

到 T^* 边界上, 再添加相应新的边就得到扩张的三角剖分, 记为 \mathcal{T}^* , 如图 1 所示。根据上面的假设和构造, 并注意到映射 φ 是一个 K -双 Lipschitz 同胚, 所以, 类似于文 [10] 的论证, 我们可以得到下面两个引理。

引理 1 存在 T^* 的边界顶点与 \mathcal{T} 的边界顶点之间的一个保向一一映射 φ_T , 使得 $\varphi_T(w_i) = \tilde{v}_i, \varphi_T(\tilde{w}_j) = v_j, i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ 。而且, 如果将 φ_T 仿射扩张到 \mathcal{T}^* 的边上, 那么得到的同胚映射是 $\partial \mathcal{T}^*$ 上的一个 K -双 Lipschitz 映射。

引理 2 假设三角剖分 T 和 T^* 的每个三角形的内角都属于区间 $[\alpha, \beta]$, 其中 $0 < \alpha \leq \beta < \pi$ 是两个常数。则它们的扩张三角剖分 T^* 和 T 中每个面的内角 θ 也属于某区间 $[\alpha^*, \beta^*]$, 这里 $0 < \alpha^* \leq \beta^* < \pi$ 仅依赖于 α, β, K 和比率 $C = l/l^*$, 而 l 和 l^* 分别表示 T 和 T^* 中包含一个边界顶点的边的最大长度和最小长度。

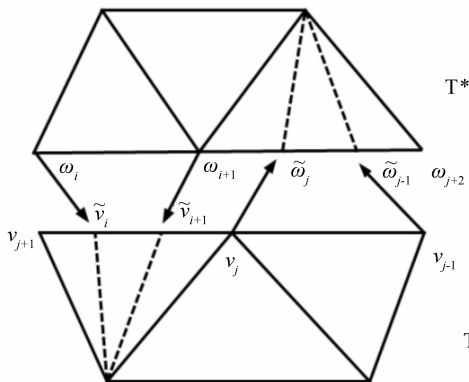


图 1 两个三角剖分的组合粘合

Fig. 1 Combinatorial welding of two triangulations

第二步, 用有界度圆填充构造两个圆盘的离散近似区域。考虑复平面内如命题 3 中两个不相交的圆盘 D 与 D^* 。根据命题 2, 我们知道, 必存在一个填满整个复平面的有界度无限单叶圆填充 Q , 不妨假设 Q 中每个圆的半径不超过 $1/(2n)$, 其中 $n \in \mathbb{N}$ 。设 Q_D 是包含于 D 内的 Q 的最大子圆填充, 记其载体 $\text{carr}(Q_D) = T_n$ 。令 D_n 表示 T_n 的多面体, 则 $D_n \subset D$ 为 D 的一个离散近似区域, 如图 2 所示。完全类似地, 我们可以得到包含于 D^* 内的一个三角剖分 T_n^* 及其相应的离散近似区域 D_n^* , 并取定 T_n^* 的一个内部顶点为 w_∞ 。容易知道, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $D_n \rightarrow D, D_n^* \rightarrow D^*$ 。

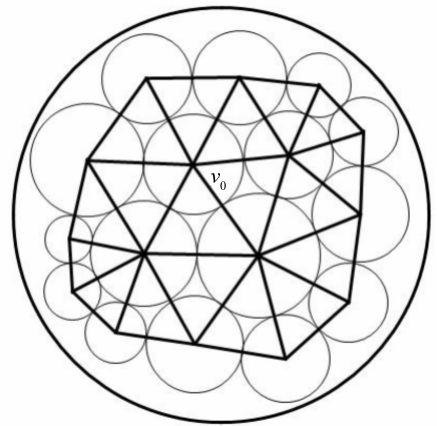


图 2 一个圆盘 D 的离散近似区域 D_n 的构造
Fig. 2 The construction of discrete approximating regions D_n of a disc D

接下来, 设 p_n 与 p_n^* 分别为从 ∂D_n 到 ∂D 及从 ∂D_n^* 到 ∂D^* 的镜像投影。对给定一个 K -双 Lipschitz 同胚 $\varphi: \partial D^* \rightarrow \partial D$, 我们令 $\varphi_n = (p_n)^{-1} \circ \varphi \circ p_n^*$, 则当 n 充分大时, $\varphi_n: \partial D_n^* \rightarrow \partial D_n$ 也是一个 K -双 Lipschitz 同胚。我们应用引理 1 到映射 φ_n , 就得到由 T_n 与 T_n^* 生成的一个球面三角剖分 K_n 。因此, 根据命题 1 我们推出存在 Riemann 球面上一个关于 K_n 的圆填充, 记为 \tilde{P}_n , 规范化 P_n 使得圆 C_{w_∞} 的圆心位于 ∞ 。通过球极投影, 我们将 P_n 投影到复平面 \mathbb{C} 上, 就得到 \mathbb{C} 内一个关于 $K_n \setminus \{w_\infty\}$ 的开星 \tilde{P}_n 的圆填充记为 \tilde{P}_n 。用 Ω_n 与 Ω_n^* 分别表示 \tilde{P}_n 内对应于 T_n 与 $T_n^* \setminus \{w_\infty\}$ 的两个子圆填充的载体的多面体, 其中 T_n 与 T_n^* 分别为 T_n 与 T_n^* 的扩张三角剖分, 则显然有 $\partial \Omega_n = \partial \Omega_n^*$ 。

第三步, 构造命题 3 中 f 和 g 的离散近似映射, 并证明其收敛性。我们定义 $f: D \rightarrow \Omega$ 的近似映射

$f_n: D_n \rightarrow \Omega_n$ 如下：把 T_n 中的每一个顶点映到 \tilde{P}_n 对应于该顶点的圆的中心，然后线性扩张到 T_n 中所有的边和面。同样，映射 $g: D^* \rightarrow \Omega^*$ 的近似映射定义为 $g_n: D_n^* \setminus \{w_\infty \text{ 的开星}\} \rightarrow \Omega_n^*$ ，即将 $T_n^* \setminus \{w_\infty \text{ 的开星}\}$ 中每一个顶点映到 \tilde{P}_n 对应于此顶点的圆的中心，再线性扩张到 T_n^* 中所有的边和面。则我们有

引理 3 (i) 等式 $g_n = f_n \varphi_n$ 在 ∂D_n^* 上成立，对每一个 $n \in \mathbb{N}$ ；

(ii) 对每一个 $n \in \mathbb{N}$ ， f_n 与 g_n 都是 K_1 -拟共形映射，这里 K_1 只依赖于圆填充 Q 的度；

(iii) 对每一个 $n \in \mathbb{N}$ ，曲线 Γ_n 是 K_2 -拟圆周，其中 $\Gamma_n = f_n(\partial D_n) = g_n(\partial D_n^*) = \partial \Omega_n = \partial \Omega_n^*$ ，而 K_2 仅依赖于常数 K 和圆填充 Q 的度。

定理 1 给定复平面内两个不相交的圆盘 D 和 D^* ，设 $\varphi: \partial D^* \rightarrow \partial D$ 是一个双 Lipschitz 拟对称映射，则存在离散近似映射序列 f_n 和 g_n 分别在 D 和 D^* 的紧子集上一致收敛于由 φ 诱导的共形粘合映射 f 和 g ，当 $n \rightarrow \infty$ 时。而且当 $n \rightarrow \infty$ 时，离散粘合曲线 Γ_n 收敛于由 φ 诱导的拟圆周 Γ 。

证明 首先，由 D_n 与 D_n^* 的构造，我们知道，当 $n \rightarrow \infty$ 时，它们分别收敛于 D 与 D^* 。另一方面，因为 $\varphi: \partial D^* \rightarrow \partial D$ 是一个双 Lipschitz 拟对称映射，所以由第二步的做法，即对 T_n 与 T_n^* 进行组合粘合，我们就得到球面上的个三角剖分 K_n ，由此得到 Riemann 球面上关于 K_n 的一个圆填充 P_n 。于是，根据球面上面积长度引理，我们推出 P_n 中对应于 w_∞ 的开星的子圆填充的载体的直径趋近于 0，当 $n \rightarrow \infty$ 时。同时注意到， $\partial \Omega_n = \partial \Omega_n^*$ 且是一条 Jordan 曲线，对每一个 $n \in \mathbb{N}$ 。从而我们得到 Ω_n 与 Ω_n^* 分别收敛于 Ω 与 Ω^* ，其中 Ω 与 Ω^* 分别为 S^2 内某一条 Jordan 曲线 Γ 的两个分支。

其次，根据引理 3 (ii)，我们知道，对于每一个 $n \in \mathbb{N}$ ， f_n 和 g_n 都是 K_1 -拟共形映射。由欧氏平面圆填充的面积长度引理^[2]，用类似于文 [12-13] 的方法，我们可以推出当 $n \rightarrow \infty$ 时， $f_n: D_n \rightarrow \Omega_n$ 与 $g_n: D_n^* \rightarrow \Omega_n^*$ 分别在 D 与 D^* 的紧子集内一致收敛于共形映射 $f: D \rightarrow \Omega$ 和 $g: D^* \rightarrow \Omega^*$ 。

最后，注意到对于每个 $n \in \mathbb{N}$ ，成立 $\varphi_n = (p_n)^{-1} \circ \varphi \circ p_n^*$ 。同时当 $n \rightarrow \infty$ 时， $(p_n)^{-1}$ 与 p_n^* 分别收敛于恒等映射。因此，我们推出当 $n \rightarrow \infty$ 时， φ_n 一致收敛于 φ 。这样在引理 3 (i) 中令 $n \rightarrow \infty$ ，我们就得到 $g = f \circ \varphi$ 。此外，引理 3 (iii) 给出了对于每个 $n \in \mathbb{N}$ ， Γ_n 是一个拟圆周，再根据环引

理^[2]，我们可以推出 Γ_n 一致收敛于某一个拟圆周 Γ ，当 $n \rightarrow \infty$ 时。于是就完成了这个定理的证明。

如果把上面定理中的双 Lipschitz 映射 φ 改为是一个拟对称映射，则结论也成立。也就是以下定理。

定理 2 给定复平面内两个不相交的圆盘 D 和 D^* ，设 $\varphi: \partial D^* \rightarrow \partial D$ 是一个拟对称映射，则存在离散近似映射序列 f_n 和 g_n 分别在 D 和 D^* 的紧子集上一致收敛于由 φ 诱导的共形粘合映射 f 和 g ，当 $n \rightarrow \infty$ 时。而且当 $n \rightarrow \infty$ 时，离散粘合曲线 Γ_n 收敛于由 φ 诱导的拟圆周 Γ 。

证明 根据文 [11, 14]，我们知道，双 Lipschitz 映射在所有拟对称映射组成的集合中是稠密的，由此，我们推出该定理成立。

3 半平面粘合的离散近似

在这一节我们将应用有界度圆填充技术构造上半平面 \mathbb{U} 与下半平面 \mathbb{L} 粘合的离散近似映射，然后，证明它们的收敛性。

首先，构造离散近似映射。设 φ 是 \mathbb{R} 上的一个 K -双 Lipschitz 拟对称映射使得 0 和 ∞ 是它的两个不动点。对每个 $n \in \mathbb{N}$ ，用 a 与 b 分别表示满足下面条件的 $1/n$ 的两个最小倍数： $a \leq \varphi(-n)$ ， $\varphi(n) \leq b$ 。如在第 3 节假设 Q 为填满整个复平面 \mathbb{C} 的无限有界度单叶圆填充且 Q 中每个圆的半径小于或等于 $1/n$ 。用 T_{U_n} 和 T_{L_n} 分别是包含于区域 $[a, b] \times [0, b-a]$ 和 $[-n, n] \times [-2n, 0]$ 中的 carr (Q) 的两个最大子复形。将 T_{U_n} 中位于 0 和 1 的顶点分别记为 v_0 和 v_1 ，且用 L_n 和 U_n 分别表示 T_{L_n} 和 T_{U_n} 所形成的多面体区域。上面的条件保证了 $T_{L_n} \cap \mathbb{R}$ 的顶点在 φ 下的像位于 $T_{U_n} \cap \mathbb{R}$ 的边上，应用第 3 节的粘合方法，通过 φ 我们分别 T_{U_n} 和 T_{L_n} 扩张为 \mathcal{T}_{U_n} 和 \mathcal{T}_{L_n} 。

注意到不一定有 $a = \varphi(-n)$ ， $b = \varphi(n)$ ，因此为了确保 $\mathcal{T}_{L_n} \cap \mathbb{R}$ 中的顶点与 $\mathcal{T}_{U_n} \cap \mathbb{R}$ 的顶点之间的一一对应，我们可以删除 \mathcal{T}_{U_n} 中位于 a 与 b 上的顶点。从而通过把 $\mathcal{T}_{L_n} \cap \mathbb{R}$ 中的顶点映为 $\mathcal{T}_{U_n} \cap \mathbb{R}$ 顶点然后线性延拓到边我们就得到一个离散拟对称映射 $\varphi_n: \mathcal{T}_{L_n} \cap \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{T}_{U_n} \cap \mathbb{R}$ 。于是，等同 \mathcal{T}_{U_n} 的顶点与它在 φ_n 下的像就得到一个闭圆盘的三角剖分 K_n 。根据命题 1，我们容易知道一定存在一个关于 K_n 的欧氏圆填充 P_n ，规范化 P_n

使得圆 C_{v_0} 和 C_{v_1} 的中心分别位于 0 和 1。将 carr P_n 中对应 \mathcal{T}_{U_n} 和 \mathcal{T}_{L_n} 的区域分别记为 Ω_n 和 Ω_n^* 。

我们定义 $f: \mathbb{U} \rightarrow \Omega$ 与 $g: \mathbb{L} \rightarrow \Omega^*$ 的两个离散近似映射为

$$f_n: U_n \rightarrow \Omega_n, g_n: L_n \rightarrow \Omega_n^*$$

其次, 证明离散近似映射 f_n 和 g_n 的收敛性。因为 φ 是一个保向的实同胚, 所以 φ 在 \mathbb{R} 上递增的。由此, 我们得到, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow +\infty$ 且 $L_n \cup U_n \rightarrow \mathbb{C}$ 。由假设 φ 是双 Lipschitz 映射, 而 K_n 是有界度的, 因此 f_n 和 g_n 均是 K_1 -拟共形映射, 其中 K_1 不依赖于 n 。同时, 由构造我们推出, 等式 $g_n = f_n \varphi_n$ 在 $[-n, n]$ 成立。进一步, 我们有

引理 4 近似映射 f_n 和 g_n 都能通过 \mathbb{C} 成为扩张的 K -拟共形映射。而且, 对于给定 \mathbb{C} 的任意紧子集 E , 则当 n 充分大时, 映射 f_n 和 g_n 在 E 上都有定义。

证明 根据引理 1 我们得到, 每个离散拟对称映射 φ_n 是 K_n -双 Lipschitz 映射, 由此推出它为 $[-n, n]$ 上的 K_n^2 -拟对称映射。文 [15] 的结果给出, 每个 φ_n 可扩张为整个 \mathbb{R} 上的 K'_n -拟对称映射 φ'_n , 其中 K'_n 仅依赖于 K_n 。而由 Beurling-Ahlfors 扩张定理, 我们知道每个 φ'_n 都有一个扩张到下半平面 \mathbb{L} 的 $K_2 = K_2(K'_n)$ -拟共形映射 Φ_n 。于是我们通过 $f_n = g_n \Phi_n^{-1}$ 来定义 f_n 在 $\Phi_n(L_n)$ 上的扩张。

由 U_n 的构造我们知道, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $U_n \rightarrow U$ 。因此, 对于给定 \mathbb{C} 的紧子集 E , 当 n 足够大时, U_n 将覆盖 $E \cap \mathbb{U}$ 。为了保证 f_n 在 $E \cap \mathbb{L}$ 上有定义, 下证对足够大的 n , $\Phi_n(L_n)$ 也将覆盖 $E \cap \mathbb{L}$ 。由 Beurling-Ahlfors 扩张的构造 [16] 知, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, Φ_n 局部一致收敛于 Φ , 其中 Φ 是 φ 的 Beurling-Ahlfors 扩张。因此, 对每个 $i = 1, 2, \dots, \Phi(L_i)$ 必包含 0 的一个相对开邻域 $B(0, R_i) \cap \mathbb{L}$ 。假设 R_i 是这样一个开邻域的最大半径。则因为 Φ 是真映射且当 $n \rightarrow \infty$ 时 $L_n \rightarrow \mathbb{L}$, 所以必有 $R_i \rightarrow \infty$, 当 $i \rightarrow \infty$ 时。然而, 由于 L_i 是紧的, 因此 Φ_n 在 L_i 上一致收敛于 Φ 。于是, 对每个 i , 一定能找到 $N_i \in \mathbb{N}$, 使得对所有 $n \geq N_i$, 有 $\text{dist}(\Phi(\partial L_n \setminus (-n, n)), 0) > \frac{R_i}{2}$ 。特别地, 对所有 $n \geq N_i$, 有

$$B(0, \frac{R_i}{2}) \subset \Phi_n(L_n)$$

另一方面, 对充分大的 i , $E \cap \mathbb{L}$ 必包含于开邻域 $B(0, R_i/2)$ 中。因此, 对 $n \geq N_i, E \subset \Phi(L_n)$ 。从而我们得到 f_n 在 E 上有定义。

完全类似地, 通过 $g_n = f_n l \Phi_n l$ 来定义 g_n 在 $l \Phi_n^{-1} l(U_n)$ 上扩张, 其中 l 是 \mathbb{R} 上的反射。注意到, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, Φ_n^{-1} 局部一致收敛于 Φ^{-1} 且 $l(U_n)$ 将填满 \mathbb{L} , 因此用同样于 f_n 的扩张方法, 我们推出, 对于 \mathbb{C} 的任意紧子集 E' , 对足够大的 n 映射 g_n 都在 E' 上有定义。这就完成了这个引理的证明。

由于每个 f_n 都使得 0 和 1 为不动点而忽略 ∞ , 因此由文 [11] 我们知道, $\{f_n\}$ 是正规族且存在一个子序列局部一致收敛于 \mathbb{C} 上的一个 K -拟共形同胚映射 f 。通过重新组合, 我们可假设整个序列 $\{f_n\}$ 收敛于 f 。因为 f 的定义域是整个复平面, 所以 Liouville's 定理给出 f 的值域也是整个复平面。事实上, 通过令 $f(\infty) = \infty$ 可以使 ∞ 为 f 的可去奇点, 于是 $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ 是在 S^2 上过 0, 1 和 ∞ 的一条 Jordan 曲线。

根据 f_n 的构造和圆填充的环引理, 我们推出当 $n \rightarrow \infty$ 时, f_n 在 \mathbb{U} 的任意紧子集上的最大伸缩商趋近于 1。由此我们得到 f 在 \mathbb{U} 上是共形的。同理, 我们推出 $\{g_n\}$ 也收敛于 \mathbb{L} 上的一个共形映射 g 。从而我们有

定理 3 若给定一个双 Lipschitz 拟对称映射 φ , 则一定存在两个离散近似映射序列 f_n 和 g_n 分别在 \mathbb{U} 和 \mathbb{L} 的紧子集上一致收敛于由 φ 诱导的共形粘合映射 f 和 g 。而且, 由 f_n 和 g_n 的像的公共边界形成的离散粘合曲线 Γ_n 是一个拟圆周, 它一致收敛于由 φ 诱导的拟圆周 Γ 。

证明 由于 f 和 g 在 \mathbb{C} 上是 K -拟共形的, 因此 $f(\mathbb{R} \cup \{\infty\}) = g(\mathbb{R} \cup \{\infty\})$ 是一个拟圆周。另外, 注意到对每个 $n \in \mathbb{N}$, 有 $g_n = f_n \varphi_n$, 并且 f_n, g_n 和 φ_n 在 \mathbb{R} 上分别一致收敛于 f, g 和 φ , 所以我们有 $g(x) = f\varphi(x), x \in \mathbb{R}$ 。

根据共形粘合定理的唯一性, 我们知道 $f|_{\mathbb{U}}$ 和 $g|_{\mathbb{L}}$ 必是对应于 φ 的两个共形粘合映射。这蕴含着原来构造的两个序列 $\{f_n\}$ 与 $\{g_n\}$ 的收敛性。由引理 4 我们知道, $\{f_n\}$ 与 $\{g_n\}$ 都是拟共形映射, 于是 Γ_n 是一个拟圆周。此外, 由构造我们知道, $f|_{\mathbb{L}}$ 与 $g|_{\mathbb{U}}$ 分别为粘合映射 f 与 g 通过 Γ 的扩张。因此由 f_n 和 g_n 在 \mathbb{R} 上的一致收敛性推出 Γ_n 也一致收敛于 Γ , 当 $n \rightarrow \infty$ 时。这样我们就完成了这个定理的证明。

- of SenSys'03, Los Angeles, 2003:1 – 13.
- [2] WOO A, TONG T, CULLER D. Taming the underlying challenges of reliable multihop routing in sensor networks [C]. Proc of SenSys'03, Los Angeles, 2003:14 – 27.
- [3] BHATNAGAR S, DEB B, NATH B. Service differentiation in sensor networks[C]. Proc of WPMC'01, 2001, 51 – 62.
- [4] DEB B, BHATNAGAR S, NATH B. ReInForM: reliable information forwarding using multiple paths in sensor networks[C]. Proc of LCN'03, Bonn, 2003:406 – 415.
- [5] FELEMBAN E, LEE C G, EKICI E. MMSPEED: multipath multi-speed protocol for QoS guarantee of reliability and timeliness in wireless sensor networks [J]. IEEE Transactions on Mobile Computing, 2006, 5(6):738 – 754.
- [6] ZAMALLOA Z M, KRISHNAMACHARI B. An analysis of unreliability and asymmetry in low-power wireless links [J]. ACM Transactions on Sensors Networks, 2007, 3(2):7.
- [7] NOSRATINIA A, HUNTER T E, HEDAYAT A. Cooperative communication in wireless networks [J]. IEEE Communications Magazine, 2004, 42(10):74 – 80.
- [8] SANCHEZ J A, RUIZ P M, MARIN-PEREZ R. Beaconless geographic routing made practical: challenges, design guidelines, and protocols[J]. IEEE Communications Magazine, 2009, 47(8):85 – 91.
- [9] HUANG X X, ZHAI H Q, FAN Y G. Robust cooperative routing protocol in mobile wireless sensor networks[J]. IEEE Transactions on Wireless Communications, 2008, 7(12):5278 – 5285.
- [10] CHENG L, CAO J N, CHEN C F, et al. Towards intelligent contention-based geographic forwarding in wireless sensor networks [J]. IET Communications, 2011, 5(12):1711 – 1719.
- [11] IEEE Committee. Wireless LAN medium access control (MAC) and physical layer (PHY) specifications[S]. New York:IEEE Press, 1999.
- [12] HUNG Y T, GAO Y, HOU J. Tutorial: working with J-Sim [EB/OL]. <http://j-sim.cs.uiuc.edu/index.html>, 2005 – 01 – 28.

(上接第 38 页)

参考文献:

- [1] THURSTON W. The finite Riemann mapping theorem [C]//Invited address, International Symposium in Celebration of the proof of the Bieberbach Conjecture, Purdue University, 1985.
- [2] RODIN B, SULLIVAN D. The convergence of circle packings to the Riemann mapping [J]. J Differential Geom, 1987, 26:349 – 360.
- [3] MARDEN A, RODIN B. On Thurston's formulation and proof of Andreev's theorem [J]. Lecture Notes in Math, 1990, 1435: 103 – 115.
- [4] STEPHENSON K. The approximation of conformal structures via circle packing [J]. Computational Methods and Function Theory, Ser Approx Decompos, Volume 11, World Sci Publishing, River Edge, NJ, 1999: 551 – 582.
- [5] HE Z X, SCHRAMM O. Hyperbolic and parabolic packings [J]. Discrete Comput Geom, 1995, 14: 123 – 149.
- [6] STEPHENSON K. Introduction to circle packing (the theory of analytic functions) [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
- [7] SHARON E, MUMFORD D. 2D-Shape analysis using conformal mapping [J]. Intern J Comput Vision, 2006, 70: 55 – 75.
- [8] RADNELL D, SCHIPPERS E. Quasisymmetric sewing in rigged Teichmüller space [J]. Commun Contemp Math, 2006, 8(4): 481 – 534.
- [9] WILLIAMS G B. Constructing conformal maps of triangulated surfaces [J]. J Math Anal Appl, 2012, 391(1): 113 – 120.
- [10] WILLIAMS G B. Discrete conformal welding [J]. Indiana Univ Math J, 2004, 53(3): 765 – 804.
- [11] LEHTO O, VIRTANEN K I. Quasiconformal mappings in the plane [M]. New York: Springer-Verlag, 1973.
- [12] HE Z X, RODIN B. Convergence of circle packings of finite valence to Riemann mappings [J]. Comm in Anal and Geom, 1993, 1: 31 – 41.
- [13] LAN S Y, DAI D Q. C^∞ -convergence of circle packings of bounded degree to the Riemann mapping [J]. J Math Anal Appl, 2011, 376: 1 – 10.
- [14] KELINGOS J A. Boundary correspondence under quasiconformal mappings [J]. Michigan Math J, 1966, 13: 235 – 249.
- [15] PFLUGER A. Über die konstruktion riemannscher flächen durch verheftung [J]. J Indian Math Soc, 1960, 24: 401 – 412.
- [16] BEURLING A, AHLFORS L. The boundary correspondence under quasiconformal mappings [J]. Acta Math, 1956, 96: 125 – 142.