

# 基于尖点突变理论的平行组拼双肋拱侧倾失稳临界荷载计算新方法\*

禹奇才, 刘爱荣, 肖才涛, 傅继阳

(广州大学-淡江大学工程结构灾害与控制联合研究中心//

广东高校结构安全与健康监测工程技术研究中心//

广州市结构安全与健康监测重点实验室, 广东 广州 510006)

**摘要:** 基于尖点突变理论, 首次以平行组拼双肋拱为研究对象, 设定了结构侧倾屈曲位移函数, 构建了侧倾失稳变形能量表达式, 通过数学转换, 建立了尖点突变模型, 获得了平行组拼双肋拱系统的平衡曲面 M 方程和分歧点集 B 方程, 通过分析体系失稳条件, 计算了分歧点集解, 推导了系统侧倾失稳临界荷载计算公式, 提出了平行组拼双肋拱侧倾失稳临界荷载计算新方法; 最后与有限元数值解进行了对比分析, 结果表明: 文中所推导的侧倾失稳临界荷载理论解与有限元数值解吻合良好, 验证了基于尖点突变理论的平行组拼双肋拱侧倾失稳临界荷载计算方法的正确性, 为拱结构侧倾屈曲的研究开辟了一条新途径。

**关键词:** 平行组拼双肋拱; 尖点突变理论; 侧倾失稳; 临界荷载; 计算新方法

**中图分类号:** TU312 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2014)02-0006-06

## A New Calculation Method of Lateral Buckling Critical Load of Parallel Dual-Arch-Ribs Based on the Cusp Catastrophe Theory

YU Qicai, LIU Airong, XIAO Caitao, FU Jiyang

(Guangzhou University-Tamkang University Engineering Structure Disasters and

Control Joint Research Center//Research Center for Structural Safety and Health Monitoring of

Guangdong Education Department//Guangzhou Municipal Key Laboratory for

Structural Safety and Health Monitoring, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China)

**Abstract:** Based on the cusp catastrophe theory, the lateral buckling of parallel dual-arch-ribs was studied. The displacement function, as well as the energy representation were constructed when there was a lateral buckling in the dual arch-ribs. By mathematical transform, the energy cusp catastrophe model was established, then the system's equilibrium surface M equation and bifurcation point set B equation were obtained. Through the analysis of buckling conditions of dual-arch-ribs system, bifurcation point was calculated, and the formula of lateral buckling critical load was derived, furthermore, a new calculation method of lateral buckling critical load of parallel dual-arch-ribs was proposed. At last, comparing theoretical results based on the cusp catastrophe theory with those obtained from FEM, it is verified that the calculation method presented is sufficiently accurate. The study has opened up a new way for the lateral buckling of the arch structures.

**Key words:** parallel dual-arch-ribs; cusp catastrophe theory; lateral buckling; critical load; new calculation method

\* 收稿日期: 2013-09-28

**基金项目:** 国家自然科学基金资助项目(11272095, 51378133); 广东省科技计划资助项目(2012B040302005); 广州市科技攻关重大专项资助项目(2011Y2-00006); 广东省教育厅科技创新重点资助项目(2012CXZD0028); 广东省自然科学基金重点资助项目(S2011030002800)

**作者简介:** 禹奇才(1955年生), 男; **研究方向:** 桥梁结构防灾减灾; **通讯作者:** 刘爱荣; E-mail: liu-a-r@163.com

拱在外力作用下一般会发两种失稳形式：面内失稳和面外失稳。对于大跨肋拱桥，面外失稳临界荷载远低于面内失稳，所以获得其侧倾失稳临界荷载显得非常重要。

失稳问题是拱结构的重要课题之一，目前计算结构稳定性的方法最常用的有三种<sup>[1-3]</sup>：①静力法。静力法是通过建立平衡微分方程，在满足边界条件的情况下求得临界荷载，即求解弹性系统平衡路径分支点所对应的荷载值。这种方法比较繁琐，且平衡微分方程为超越方程，求解十分困难。②能量法。能量法避免了直接求解法的问题，通过建立弹性系统的位势  $\Delta E_p$ ，求解泛函的一级变分，使得  $\Delta E_p = 0$ ，即总势能保持不变，说明初始平衡位置是中性平衡的，从而得到临界荷载计算公式。已有学者们提出了一系列的能量法，如 Timoshenko 法、Rayleigh-Ritz 法、Galerkin 法和势能驻值原理等。通过能量法可求解弹性系统的总势能不再是正定时的荷载值。③动力法。动力法假定体系通过扰动使得结构在原平衡位置附近作微小自由振动，获得振动方程，并求出其自振频率的表达式，根据体系处于临界状态时频率等于零这一条件确定临界荷载。

除了以上三种常见的失稳计算方法，近年来，突变理论也逐渐在工程中得到应用。突变理论是研究自然界中不连续（跳跃性）变化现象的一种数学方法。应用突变理论可得出拱结构失稳的尖点突变模型和临界条件<sup>[4]</sup>。

突变理论是法国数学家勒内汤姆<sup>[5]</sup>20 世纪 70 年代提出的一种新的数学理论，并由 Posto T<sup>[6]</sup>完善应用的研究不连续现象的一种新兴的数学分支，是研究非线性问题的重要手段。近 40 年来突变理论已经在自然学科、社会学科、生物学科和经济学等领域取得了广泛的应用。目前，基于突变理论的拱结构屈曲研究代表性研究成果有：魏德敏、戴莉莉、沈茂山<sup>[4,7-8]</sup>应用突变理论研究单拱的面内静力失稳和非线性动力稳定性；潘岳<sup>[9]</sup>利用折迭突变和尖点突变模型，研究了圆弧双铰拱面内对称和反对称失稳。虽然突变理论可作为研究拱结构失稳行为的一种方法，但大部分学者致力于弹性拱面内失稳的分析，对于拱结构的面外失稳的研究，目前尚未见诸报道。相对于面内失稳研究，面外失稳属空间弯扭变形问题，更具复杂性，拱的面内失稳变形通过一个几何方程即可描述，而面外失稳变形需要建立多个几何变量方程来描述。另外面外失稳所涉及的变形能较多，建立能量方程比较困难。本文

构建了平行组拼双肋拱的侧倾失稳能量表达式，首次通过数学转换，建立了尖点突变模型，获得了平行组拼双肋拱系统的平衡曲面 M 方程和分歧点集 B 方程，通过分析体系失稳条件，计算了分歧点集解，推导了系统侧倾失稳临界荷载计算公式，提出了平行组拼双肋拱侧倾失稳临界荷载计算新方法，采用突变理论所推出的临界荷载计算公式不仅简洁明了，而且计算精度较高。

## 1 突变理论的基本原理

突变理论是以分叉理论、奇异理论和拓扑学为数学工具，用以分析如岩石突然断裂、桥梁突然坍塌、拱坝等受压结构失稳等传统的微积分方法不能解释的不连续变化现象的数学分支。突变理论通过给出系统在突变过程的势函数，讨论相应的突变模型，特别是控制空间中突变集的几何形状，定性研究不连续变化现象。按照几何形状的不同，可分为折叠型、尖点型、燕尾型等 7 种类型的初等突变<sup>[10]</sup>。

拱结构一般在设计荷载作用下变形光滑连续，但在特殊情况下，如刚度不足，突然失稳，从一种连续的状态突然跳跃到不连续的状态，其失稳突变过程具有突跳性、滞后性、发散性、多模型性和不可达性等特征，这与尖点突变模型的典型性质相符合<sup>[10]</sup>，故本文采用尖点突变模型研究平行组拼双肋拱的侧倾失稳问题。尖点模型突变流形和分叉集如图 1<sup>[11]</sup>。

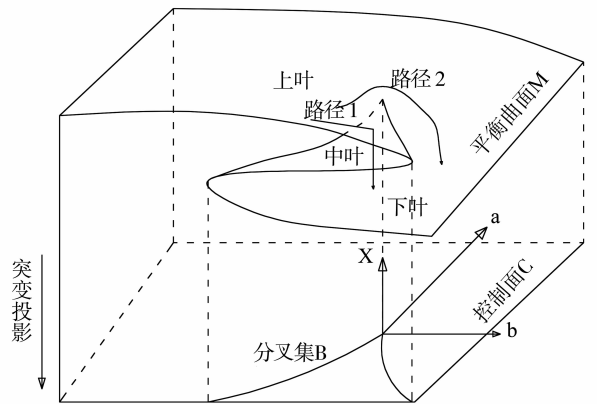


图 1 尖点突变模型示意图

Fig. 1 Cusp catastrophe model sketch

由图 1，尖点突变的势函数为

$$F = \frac{x^4}{4} + \frac{ax^2}{2} + bx \quad (1)$$

式中  $x$  是状态变量， $a$  和  $b$  是控制变量，控制变量

$a$  为分裂因素, 控制变量  $b$  为正常因素, 状态空间  $(x, a, b)$  是三维的。如果系统在演变过程中控制变量  $a > 0$ , 则系统的状态位于奇点集的另一侧, 系统是稳定的。如果  $a < 0$ , 但系统沿路径 2 演化, 而不去跨越分叉集, 则系统只能以渐变的方式进化。只有  $a < 0$ , 且系统沿路径 1 跨越分岔集, 系统才发生突变。

相应的平衡曲面  $M$  (平衡路径) 方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x} = x^3 + ax + b = 0 \quad (2)$$

平衡曲面的奇点集  $S$  除了满足式 (2), 尚应满足:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 3x^2 + a = 0 \quad (3)$$

联立式 (2)、(3) 并消去状态变量  $x$  可得分叉集  $B$ :

$$\Delta = 4a^3 + 27b^2 = 0 \quad (4)$$

由图 1 可知, 平衡曲面  $M$  是一带有褶皱的曲面,  $M$  曲面分为三叶。

$$\text{上下叶表示为: } \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} > 0 \quad (5)$$

$$\text{而中叶表示为: } \frac{\partial F}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} < 0 \quad (6)$$

能量取极小值, 物体才处于稳定状态。所以上下叶表示系统的稳定平衡状态, 中叶表示不稳定状态。

## 2 拱侧倾失稳的尖点突变

### 2.1 平行组拼双肋拱侧倾失稳的力学模型

平行组拼双肋拱在径向均布荷载作用下, 侧倾失稳后的变形图、空间曲线坐标如图 2 所示。

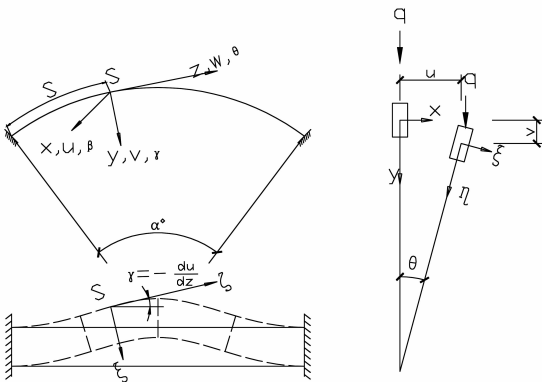


图 2 平行组拼双肋拱侧倾失稳变形

Fig. 2 Parallel dual-arch-ribs buckling deformation

组拼拱发生侧倾失稳后, 任意截面  $s$  垂直于拱平面  $x$  轴, 在指向拱轴法向的  $y$  轴和在拱轴切线重合的  $z$  轴三个方向分别发生了线位移  $u, v, w$  并绕这

三个轴发生转角  $\beta, \gamma, \theta$ 。拱肋截面主轴  $x, y, z$  也发生了变位, 相对于变形拱的坐标系取为  $\xi, \eta, \zeta$ 。

假设拱轴线为圆弧拱, 则发生侧倾失稳后圆弧拱的扭转角及侧倾位移函数可分别表示为:

$$\begin{aligned} \theta &= C_1 \left( 1 - \cos \frac{2\pi\varphi}{\alpha} \right), \\ u &= C_2 \left( 1 - \cos \frac{2\pi\varphi}{\alpha} \right) \end{aligned} \quad (7)$$

式中  $C_1, C_2$  分别为拱侧倾变形后拱顶扭转角及拱顶侧倾位移的 0.5 倍,  $\alpha$  为圆弧拱的圆心角,  $\varphi$  为截面  $s$  对应的圆心角。

公式 (7) 满足拱脚两端固接边界条件, 即:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= 0 \\ \varphi &= \alpha \end{aligned} \right\} \theta = 0, u = 0, \theta' = 0, u' = 0$$

### 2.2 侧倾屈曲的能量方程

略去拱的轴向压缩变形能和剪切变形能的影响, 平行组拼双肋拱的总势能可表示为:

$$\Pi = U_x + U_y + U_z + U_{y1} + U_{by} - V + U_Q \quad (8)$$

上式中  $U_x$  为拱肋的面内弯曲变形能、 $U_y$  为侧向总体弯曲变形能、 $U_z$  为扭转变形能、 $U_{y1}$  为拱肋局部弯曲变形能、 $U_{by}$  为横撑弯曲变形能、 $V$  为竖向外力势能、 $U_Q$  为横向干扰力所做的功。

1) 面内弯曲变形能  $U_x$ 。

$$U_x = \frac{EI_x}{2} \int_0^\alpha k^2 R d\varphi = \frac{EI_x}{2} \int_0^\alpha \left( \frac{v}{R^2} + \frac{1}{R^2} \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right)^2 R d\varphi \quad (9)$$

由  $\int v ds = R \int_s \left( \frac{du}{ds} \right)^2 ds$ , 代入位移函数, 得

$$U_x = \frac{EI_x}{2R^5} \frac{\alpha}{8} \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^4 \left( 3 + 16 \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^4 - 8 \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^2 \right) C_2^4 \quad (10)$$

式中,  $EI_x$  为拱肋面内抗弯刚度,  $k$  为侧向变形曲率,  $R$  为圆弧拱半径。

2) 拱肋的侧倾变形能  $U_y$  和扭转变形能  $U_z$ 。

$$\begin{aligned} U_y + U_z &= \frac{EI_y}{2} \int_0^\alpha \left( \frac{\theta}{R} - \frac{1}{R^2} \frac{d^2 u}{d\varphi^2} \right)^2 R d\varphi + \\ &\quad \frac{GI_d}{2} \int_0^\alpha \left( \frac{1}{R} \frac{d\theta}{d\varphi} + \frac{1}{R^2} \frac{du}{d\varphi} \right)^2 R d\varphi \end{aligned} \quad (11)$$

代入位移函数, 得

$$\begin{aligned} U_y + U_z &= \frac{EI_y}{2R^3} \left\{ (RC_1)^2 \alpha + \left[ -C_2 \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^2 - RC_1 \right]^2 \frac{\alpha}{2} \right\} + \\ &\quad \frac{GI_d}{2R^3} (RC_1 + C_2)^2 \left( \frac{2\pi}{\alpha} \right)^2 \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

式中,  $EI_y$  为拱肋的侧向抗弯刚度,  $GI_d$  为拱肋抗扭刚度。

3) 局部弯曲变形能  $U_{y1}$  和  $U_{by}$ 。

组拼双肋拱侧倾失稳的变形和对应的弯矩图如图 3 示, 拱肋截面绕  $y$  轴的转角为  $\gamma$ , 拱肋局部变形在节点 A 的转角为  $\gamma_2$ , 则由于刚性节点上各杆的夹角保持不变, 横撑在节点 A 的转角  $\gamma_1 = \gamma - \gamma_2$ 。设横撑的杆端弯矩为  $M_1$ , 拱肋的杆端弯矩为  $M_2$ 。

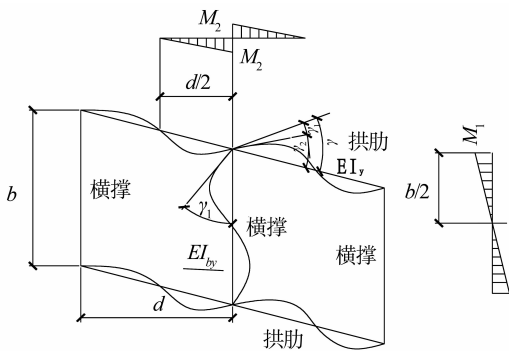


图 3 拱肋和横撑的局部变形和弯矩图

Fig. 3 Local transformation and bending moment

由横撑的转角位移方程, 可得:

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= \frac{6EI_{by}}{b}\gamma_1 \\ M_2 &= \frac{6EI_y}{d}\gamma_2 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中  $EI_{by}$  为横撑沿拱肋径向的抗弯刚度。

由节点 A 的平衡条件  $M_1 = 2M_2$ , 得

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{I_{by}d}{2I_y b} \quad (14)$$

设想将弯曲变形能平摊在节间长度  $d$  上, 则全部横撑的弯曲变形能为

$$U_{by} = \frac{3EI_{by}}{bd} \int_0^s \gamma_1^2 ds \quad (15)$$

则一个节间内单根拱肋的局部弯曲变形能为

$$U_{y1} = \frac{6EI_y}{d^2} \int_0^s \gamma_2^2 ds \quad (16)$$

整体结构局部弯曲变形势能可表示为

$$\begin{aligned} U_{y1} + U_{by} &= \frac{3EI_{by}}{bd} \eta_1 \int_0^s \left(\frac{du}{ds}\right)^2 ds = \\ &= \frac{3EI_{by}}{bd} \eta_1 \frac{1}{R} \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \frac{\alpha}{2} C_2^2 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{其中, } \eta_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma} = \frac{1}{1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1}} = \frac{1}{1 + \frac{I_{by}d}{2I_y b}} \quad (18)$$

4) 外力势能  $V_y$ 。

拱轴受均布径向荷载作用后竖向变形为  $v$ , 则

外力势能  $V_y$  等于  $q$  在  $v$  上所做的功的负值, 即:

$$\begin{aligned} V_y &= -\frac{q}{2} \int_0^\alpha v d\varphi = -\frac{q}{2} \int_0^\alpha u'^2 d\varphi = \\ &= -\frac{q}{2} \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \frac{\alpha}{2} C_2^2 \end{aligned} \quad (19)$$

5) 横向干扰力做功。

设  $x$  轴方向的横向干扰力为  $Q$ , 则横向干扰力所做的功为

$$U_Q = \int_0^\alpha QR d\varphi = QR\alpha C_2 \quad (20)$$

将式 (10)、(12)、(17)、(19)、(20) 代入式 (8) 得总势能:

$$\begin{aligned} \Pi &= U_x + U_y + U_z + U_{y1} + U_{by} - V + U_Q = \\ &= \frac{EI_x}{2R^5} \frac{\alpha}{8} \cdot \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^4 \left(3 + 16\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^4 - 8\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2\right) C_2^4 + \\ &= \frac{EI_y}{2R^3} \left\{ (RC_1)^2 \alpha + \left[ -C_2 \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 - RC_1 \right] \frac{\alpha}{2} \right\} + \\ &= \frac{GI_d}{2R^3} (RC_1 + C_2)^2 \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{3EI_{by}}{bd} \eta_1 \frac{1}{R} \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \cdot \\ &= \frac{\alpha}{2} C_2^2 - \frac{q}{2} \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \frac{\alpha}{2} C_2^2 + QR\alpha C_2 \end{aligned} \quad (21)$$

由平衡曲面方程:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial C_i} &= 0 \quad (i = 1, 2), \text{ 得} \\ \left[ \begin{array}{cc} R \left[ 3\lambda + \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \right] & \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 (1 + \lambda) \\ -R(1 + \lambda) & - \left[ 1 + \lambda \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 + \frac{qR^3}{GI_d} - v \right] \end{array} \right] \times \\ \left\{ \begin{array}{c} C_1 \\ C_2 \end{array} \right\} &= \{0\} \end{aligned} \quad (22)$$

所以,

$$C_1 = - \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \frac{\hbar}{R} C_2 \quad (23)$$

$$\text{其中, } \hbar = \frac{(1 + \lambda)}{\left[ 3\lambda + \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \right]}$$

将式 (23) 代入 (21) 得

$$\begin{aligned} \Pi &= U_x + U_y + U_z + U_{y1} + U_{by} - V + U_Q = \\ &= \frac{EI_x}{2R^5} \frac{\alpha}{8} \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^4 \left(3 + 16\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^4 - 8\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2\right) C_2^4 + \\ &= \left\{ \frac{EI_y}{2R^3} \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^4 \frac{\alpha}{2} \times [2\hbar^2 + (\hbar - 1)^2] + \right. \\ &= \frac{GI_d}{2R^3} \left(1 - \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \hbar\right)^2 \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \frac{\alpha}{2} + \\ &= \left. \frac{3EI_{by}}{bd} \eta_1 \frac{1}{R} \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \frac{\alpha}{2} - \frac{q}{2} \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \frac{\alpha}{2} \right\} C_2^2 + QR\alpha C_2 \end{aligned} \quad (24)$$

### 2.3 突变模型的建立

从式 (24) 可知, 当荷载  $q$  变化时, 会使  $C_2^2$  系数为零, 因而含有  $C_2^4$  的项是  $\Pi$  的不为零的最低次项。故可以略去  $C_2^4$  以上的项, 所以利用尖点突变来对其稳定性进行讨论。

利用简单的数学变换, 将系统总势能转化成以  $a, b$  为控制变量, 以  $x$  为状态变量的尖点突变模型。作变量代换, 令:

$$\sqrt[4]{\frac{EI_x}{4R^5}\alpha\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^4\left(3+16\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^4-8\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2\right)C_2^4} =$$

$$\sqrt[4]{\frac{EI_x}{4R^5}\alpha\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^4\left(3+16\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^4-8\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2\right)C_2} = x \quad (25)$$

$$a = \left[ \begin{aligned} &\left(\frac{EI_y}{R^3}\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \times (2\mathfrak{h}^2 + (\mathfrak{h} - 1)^2) + \right. \\ &\left. \frac{GI_d}{R^3}\left(1 - \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \mathfrak{h}\right)^2 + \frac{6EI_{by}}{bd}\eta_1 \frac{1}{R} - q \right) \times \\ &\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \frac{\alpha}{4} \times \sqrt{\frac{4R^5\alpha^3}{EI_x(2\pi)^4\left(3+16\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^4-8\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2\right)}} \end{aligned} \right] \times$$

$$(26)$$

$$b = QR\alpha \times \sqrt[4]{\frac{4R^5\alpha^3}{EI_x(2\pi)^4\left(3+16\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^4-8\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2\right)}} \quad (27)$$

变量代换后则, 系统能量方程可表示为:

$\Pi = \frac{x^4}{4} + \frac{a}{2}x^2 + bx$ , 与基本突变类型表对照可以看出与尖点模型势函数一致<sup>[11]</sup>。

### 2.4 侧倾屈曲条件分析

由图 1 可知, 拱的侧倾失稳突变行为是一种以  $b$  为正常因素, 以  $-a$  为分裂因素的尖角突变, 它的行为曲面  $M$  分为三叶。由式 (5), 上、下叶表示为

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} > 0 \quad (28)$$

而中叶表示为

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} < 0 \quad (29)$$

从图 1 中的  $C$  平面 (控制平面),  $M$  的折线在  $C$  上的投影称为尖角分叉集合, 任何加载路径经过分叉集合时都会使拱产生突变行为。

建立静态平衡方程:

$$M: \frac{\partial \Pi}{\partial x} = x^3 + ax + b = 0 \quad (30)$$

上式可表示为尖点突变模型平衡曲面  $M$ , 平衡曲面  $M$  上两条垂直切线的点集  $S$  的方程为

$$S: \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x^2} = 3x^2 + a = 0 \quad (31)$$

$S$  集在控制平面上的投影为分叉集  $B$ , 如图 1。令:

$$q_{cr} = \frac{EI_y}{R^3}\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \times (2\mathfrak{h}^2 + (\mathfrak{h} - 1)^2) +$$

$$\frac{GI_d}{R^3}\left(1 - \left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \mathfrak{h}\right)^2 + \frac{6EI_{by}}{bd}\left(\frac{2I_y b}{2I_y b + I_{by} d}\right) \frac{1}{R} \quad (32)$$

所以,

$$a = (q_{cr} - q) \times$$

$$\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2 \frac{\alpha}{4} \sqrt{\frac{4R^5\alpha^3}{EI_x(2\pi)^4\left(3+16\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^4-8\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)^2\right)}} \quad (33)$$

由上式可知  $q_{cr}$  与横撑间距  $d^2$  成反比, 与拱肋间距  $b$  成反比。

当在平衡曲面  $M$  中叶时, 则必须满足式 (29) 即,  $3x^2 + a < 0$ , 由  $x^2 > 0$ , 所以  $a < 0$  即  $q > q_{cr}$  时, 即结构处于失稳状态。

当在平衡曲面  $M$  上、下叶时, 由式 (28) 得  $3x^2 > -a$ , 由图 1, 当  $a > 0$  时, 即  $q < q_{cr}$ , 对应的  $M$  曲面在褶皱以外的上下叶重合的曲面上, 是稳定的, 此时  $3x^2 > -a$  恒成立; 当  $a < 0$ , 即  $q > q_{cr}$  时, 且满足  $3x^2 > -a$  时, 此时对应组拼双肋拱失稳后的平衡状态,  $M$  曲面是在褶皱外的上、下叶上。由  $b$  的正负决定曲面  $M$  是在上叶还是下叶。当  $b < 0$  时, 即  $Q < 0$  对应上叶。当  $b > 0, Q > 0$  对应下叶。横向干扰力  $Q$  的正负值表示力的方向。

当在平衡曲面  $M$  的  $S$  集上时, 由式 (31) 得  $3x^2 + a = 0$ , 此时对应着临界状态, 组拼双肋拱处于平衡状态, 即  $x = 0$ , 所以  $a = 0, q = q_{cr}$ ,  $q_{cr}$  即为临界荷载, 当  $q > q_{cr}$  时, 发生第一类分支点失稳。

## 3 算例分析

为了验证本文所推导的侧倾临界荷载计算公式的正确性, 采用 Midas/Civil 软件, 建立一组不同跨径、不同矢跨比的组拼双肋拱有限元计算分析模型, 有限元模型中的横撑数目和间距根据表 1 中的  $d$  确定, 图 4 仅仅为有限元计算模型示意图。拱肋和横撑均采用梁单元。表 1 给出了跨径为 60~120 m 的平行组拼双肋拱的计算参数; 表 2 为临界荷载理论解与有限元数值解的比较, 可以看出理论解与有

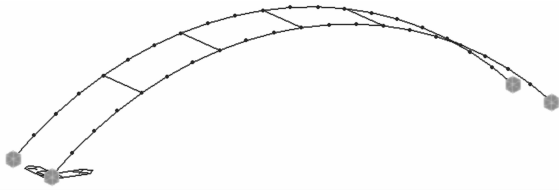


图 4 有限元模型

Fig. 4 Finite element model

表 1 计算参数

Table1 Calculation parameters

跨度/m	60	80	100	120
$EI_y / (\times 10^8 \text{ N}\cdot\text{m}^2)$	6.32	13.1	41.4	101
$GI_d / (\times 10^8 \text{ N}\cdot\text{m}^2)$	4.85	10.0	31.8	77.6
$I_{by} / (\times 10^{-4} \text{ m}^4)$	3.98	3.98	3.98	3.98
$b/\text{m}$	10	10	10	20
$d/\text{m}$	15	20	11.1	13.3

限元计算结果的比较非常吻合,最大误差为 4.97%。说明本文基于尖点突变理论所推导的平行组拼双肋拱侧倾失稳临界荷载的理论计算公式是正确、可靠的。

表 2 临界荷载理论解与有限元解的比较

Table2 Comparison between critical load analytical results and FE solution

		跨度/m	60	80	100	120
矢跨比	1/6	本文理论解/( $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ )	1.67E+05	1.28E+05	2.04E+05	2.32E+05
		有限元数值解/( $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ )	1.72E+05	1.33E+05	2.13E+05	2.41E+05
		误差/%	3.18	3.99	4.48	3.78
矢跨比	1/7	本文理论解/( $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ )	1.53E+05	1.18E+05	1.88E+05	2.16E+05
		有限元数值解/( $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ )	1.57E+05	1.22E+05	1.95E+05	2.23E+05
		误差/%	2.57	3.33	3.66	3.17
矢跨比	1/8	本文理论解/( $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ )	1.40E+05	1.09E+05	1.73E+05	2.01E+05
		有限元数值解/( $\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$ )	1.43E+05	1.12E+05	1.78E+05	2.06E+05
		误差/%	2.01	2.50	2.76	2.35

参考文献:

[1] 周绪红,郑宏. 结构稳定理论[M]. 北京:高等教育出版社,2010.  
 [2] 刘爱荣,汪荷玲,禹奇才,等. 斜靠式拱桥侧倾失稳极限承载能力简化计算方法[J]. 土木工程学报, 2013, 46(4): 93-102.  
 [3] 武际可,苏先樾. 弹性系统的稳定性[M]. 北京:科学出版社,1994.  
 [4] 戴莉莉,魏德敏. 弹性拱静力屈曲的突变行为[J]. 力学与实践,2003,25(4):41-43.  
 [5] THOM R. Structural stability and Morphogenesis[M]. Washington: W A Benjamin, 1978.

4 结 论

1)引入突变理论,推导了平式组拼双肋拱的侧倾失稳能量方程,建立了双拱肋侧倾屈曲的尖点突变模型。

2)基于突变理论基本原理,根据尖点突变模型的 M 曲面图形,分析了平式组拼双肋拱侧倾临界荷载与平衡曲面 M 上中下叶的对应关系,首次推导出平行组拼双肋拱的侧倾失稳临界荷载  $q_{cr}$  计算公式。

3)通过与有限元数值解进行对比,证明了突变理论适用于组拼双肋拱的侧倾失稳分析,且验证了本文所建立的尖点突变模型和所推导的临界荷载  $q_{cr}$  计算公式的正确性。

4)由本文推导的侧倾失稳临界荷载  $q_{cr}$  计算公式可知  $q_{cr}$  与横撑间距  $d^2$  成反比,与拱肋间距  $b$  成反比。

[6] POSTO T. Catastrophe theory and its application[M]. London: Pitman, 1978.  
 [7] 魏德敏. 周期荷载作用下杆的突变失稳分析[J]. 太原工业大学学报,1990,21(3):38-43.  
 [8] 沈茂山,魏德敏. 弹性拱振动失稳的突变模型[J]. 应用数学和力学,1990,11(12):1099-1102.  
 [9] 潘岳,刘瑞昌. 均布压力作用下圆弧双铰拱对称和反对称失稳的折迭突变和尖点突变模型[J]. 应用力学学报,1998. 15(2):1-7.  
 [10] 潘岳,王志强,张勇. 突变理论在岩石系统动力失稳中的应用[M]. 北京:科学出版社,2008.  
 [11] 凌复华. 突变理论及其应用[J]. 力学进展,1984. 14(4):389-404.