两类图族的 Merrifield-Simmons 指标的最大值*

任胜章[1]，郑国彪[2]
（1. 天水师范学院数学与统计学院，甘肃 天水 741001；
2. 青海民族大学数学系，青海 西宁 810007）

摘　要：图族 $Q(C_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k})$, $Q(P_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k})$, $Q(W_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k})$ 分别是由圈 C_k，路 P_k 和轮 W_k 的每个顶点 $v_i(i=1,2,\cdots,k)$（轮的中心顶点除外）分别顶点粘接圈 $C_{s_i}(i=1,2,\cdots,k)$ 而得到的图；通过对图族 $Q(C_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k})$, $Q(W_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k})$ 的 Merrifield－Simmons 指标进行研究，刻画出了这两类图族的 Merrifield－Simmons 指标（在顶点数一定时）取得最大值的图分别是 $Q(C_k;C_4,C_4,\cdots,C_4,C_{s_1+s_2+\cdots+s_k-4(k-1)})$ 和 $Q(W_k;C_4,C_4,\cdots,C_4,C_{s_1+s_2+\cdots+s_k-4(k-1)})$。

关键词：独立集；匹配；Merrifield－Simmons 指标
中图分类号：O157.5　**文献标志码：**A　**文章编号：**0529－6579（2013）05－0064－04

The Largest Merrifield-Simmons Index of Two Graphs of $Q(C_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k})$ and $Q(W_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k})$

REN Shengzhang[1], *ZHENG Guobiao*[2]
(1. School of Mathematics and Statistics, Tianshui Normal University, Tianshui 741001, China;
2. Department of Mathematics, Qinghai University For Nationalities, Xining 810007, China)

Abstract: Let graphs $Q(C_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k})$, $Q(P_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k})$, $Q(W_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k})$ be obtained from C_k,P_k,W_k, with every vertex $v_i(i=1,2,\cdots,k)$ (The center vertex of W_k can not be contained) attached one cycle $C_{s_i}(i=1,2,\cdots,k)$, respectively. The highest bounds of Merrifield-Simmons indexes of $Q(C_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k})$, $Q(W_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k})$ graphs are determined. The two graphs $Q(C_k;C_4,C_4,\cdots,C_4,C_{s_1+s_2+\cdots+s_k-4(k-1)})$ and $Q(W_k;C_4,C_4,\cdots,C_4,C_{s_1+s_2+\cdots+s_k-4(k-1)})$ which have the largest Merrifield-Simmons index of those graphs are characterized, respectively.

Key words: independent set; matchings set; Merrifield-Simmons index

设图 $G=(V,E)$ 是简单的连通图，并且 $V(G)$ 是它的顶点集和 $E(G)$ 是它的边集。对一个图 G 的任意两个顶点 u 和 v，如果它们不相邻，则称它们是相互独立的。一个顶点集 $V(G)$ 的子集 I，如果它的任意两个顶点都相互独立，则称它是图 G 的一个独立集。用 $i(G)$ 表示图 G 的独立集的个数，在化学中 $i(G)$ 也被称为 Merrifield－Simmons 指标，此指标与化学分子的许多物理、化学性质密切相关，如分子的熔点、沸点等；对该指标的研究成果很多，参见文献［1－8］。

设 C_k、P_k 和 W_k 分别表示顶点数分别为 $k,k,k+1$ 的圈，路和轮。则用 $Q(C_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k})$ 表示图族圈粘接圈是由圈 C_k 的每个顶点 $v_i(i=1,2,\cdots,k)$ 分别点粘接圈 $C_{s_i}(i=1,2,\cdots,k)$ 而得到的图；用 $Q(P_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k})$ 表示图族路粘接圈是由路 P_k 的每个顶点 $v_i(i=1,2,\cdots,k)$ 分别点粘接圈 $C_{s_i}(i=1,2,\cdots,k)$ 而得到的图；用 $Q(W_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k})$ 表示图族轮粘接圈是由轮 W_k 的每个顶

* 收稿日期：2013－03－12
基金项目：国家自然科学基金资助项目（010861009）；天水师范学院中青年教师科研资助项目（TSA1013）
作者简介：任胜章（1980 年生），男；研究方向：图论、数论、密码学；E-mail：renshengzhang1980@163.com

点 $v_i(i=1,2,\cdots,k)$（除中心顶点外）分别点粘接圈 $C_{s_i}(i=1,2,\cdots,k)$ 而得到的图。本文通过对图族 $Q(C_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k}),Q(W_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k})$ 的 Merrifield－Simmons 指标进行研究，刻画出了这两类图族的 Merrifield－Simmons 指标在顶点数一定时，取得最大值的图分别是 $Q(C_k;C_4,C_4,\cdots,C_4,C_{s_1+s_2+\cdots+s_k-4(k-1)}),Q(W_k;C_4,C_4,\cdots,C_4,C_{s_1+s_2+\cdots+s_k-4(k-1)})$。在本文中没有给出的专业术语、记号可参见文献[9]。

1　预备引理

引理 1[9]　设图 G_1 和 G_2 是图 G 的两个分支，则 $i(G)=i(G_1)i(G_2)$。

引理 2[9]　设图 G 是简单图且任意的 $v\in V(G)$，则有 $i(G)=i(G-v)+i(G-N_G[v])$，其中 $N_G[v]$ 是 v 的闭邻集。

引理 3[1]　设 $\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 和 $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$，并且 F_n 和 L_n 分别是 Fibonacci 数列和 Lucas 数，则

$$F_n=\frac{\alpha^n-\beta^n}{\sqrt{5}},\ L_n=\alpha^n+\beta^n,$$

$$F_nF_m=\frac{1}{5}(L_{n+m}-(-1)^nL_{m-n})$$

引理 4[3]　设图 $Q(P_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k})$ 是图族路粘接圈，在顶点数取定值时，则有 $i(Q(P_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k}))\leqslant i(Q(P_k;C_4,C_4,\cdots,C_4,C_{s_1+s_2+\cdots+s_k-4(k-1)}))$，等式成立当且仅当，$Q(P_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k})\cong Q(P_k;C_4,C_4,\cdots,C_4,C_{s_1+s_2+\cdots+s_k-4(k-1)})$。

2　主要结论

定理 1　假设 $s_1,s_2,\cdots,s_k$ 都是正整数且满足 $2\leqslant s_1\leqslant s_2\leqslant\cdots\leqslant s_k$，在顶点数取定值时，则有：$i(P_{s_1}\cup P_{s_2}\cup\cdots\cup P_{s_k})\geqslant i(P_3\cup P_3\cup\cdots\cup P_3\cup P_{s_1+s_2+\cdots+s_k-3(k-1)})$，等式成立当且仅当，$P_{s_1}\cup P_{s_2}\cup\cdots\cup P_{s_k}\cong P_3\cup P_3\cup\cdots\cup P_3\cup P_{s_1+s_2+\cdots+s_k-3(k-1)}$。

证明　（归纳法）假设 n 是路并图 $P_{s_1}\cup P_{s_2}\cup\cdots\cup P_{s_k}$ 的分支数，那么当 $n=2$ 时，由引理 1，引理 2 和引理 3 得到

$$i(P_{s_1}\cup P_{s_2})=F_{s_1+2}F_{s_2+2}=\frac{1}{5}(L_{s_1+s_2+4}-(-1)^{s_1}L_{s_2-s_1});$$

$$i(P_3\cup P_{s_1+s_2-3})=F_5F_{s_1+s_2-1}=\frac{1}{5}(L_{s_1+s_2+4}+L_{s_1+s_2-6});$$

$$i(P_{s_1}\cup P_{s_2})-i(P_3\cup P_{s_1+s_2-3})=\frac{1}{5}(-L_{s_1+s_2-6}-(-1)^{s_1}L_{s_2-s_1})\leqslant 0$$

等号成立当且仅当，$s_1=3$。所以当 $n=2$ 时，结论成立。假设当 $n=k$ 时，结论成立。即 $i(P_{s_1}\cup P_{s_2}\cup\cdots\cup P_{s_k})\leqslant i(P_3\cup P_3\cup\cdots\cup P_3\cup P_{s_1+s_2+\cdots+s_k-3(k-1)})$，那么当 $n=k+1$ 时，由归纳假设，我们得到

$$\begin{aligned}&i(P_{s_1}\cup P_{s_2}\cup\cdots\cup P_{s_{k+1}})=\\&F_{s_1+2}F_{s_2+2}\cdots F_{s_k+2}F_{s_{k+1}+2}\leqslant\\&5^{k-1}F_{s_1+s_2+\cdots+s_k-3k+5}F_{s_{k+1}+2}=\\&5^{k-2}(L_{s_1+s_2+\cdots+s_{k+1}-3k+7}-\\&(-1)^{s_{k+1}}L_{s_1+s_2+\cdots+s_k-s_{k+1}-3k+3});\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&i(P_3\cup P_3\cup\cdots\cup P_3\cup P_{s_1+s_2+\cdots+s_k+s_{k+1}-3k})=\\&5^{k-1}F_5F_{s_1+s_2+\cdots+s_{k+1}-3k+2}=\\&5^{k-2}(L_{s_1+s_2+\cdots+s_{k+1}-3k+7}-L_{s_1+s_2+\cdots+s_k-s_{k+1}-3k-3})\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}&i(P_{s_1}\cup P_{s_2}\cup\cdots\cup P_{s_{k+1}})-\\&i(P_3\cup P_3\cup\cdots\cup P_3\cup P_{s_1+s_2+\cdots+s_{k+1}-3k})\leqslant\\&5^{k-2}(-L_{s_1+s_2+\cdots+s_{k+1}-3k-3}-\\&(-1)^{s_{k+1}}L_{s_1+s_2+\cdots+s_k-s_{k+1}-3k+3})\leqslant 0\end{aligned}$$

等式成立当且仅当，$s_{k+1}=3$。

由上面两个证明过程可知，当 n 取遍所有大于 2 的自然数时，结论都成立。

定理 2　假设 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 都是正整数且满足 $s_i\geqslant 3(i=1,2,\cdots,n)$，在顶点数取定值时，则有

$$i(Q(C_n;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_n}))\leqslant i(Q(C_n;C_4,C_4,\cdots,C_4,C_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4(n-1)}))$$

并且等式成立当且仅当

$$Q(C_n;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_n})\cong Q(C_n;C_4,C_4,\cdots,C_4,C_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4(n-1)})$$

证明　由引理 4 和定理 1，我们得到

$$\begin{aligned}&i(Q(C_n;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_n}))=\\&i(Q(C_n;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_n})-v)+\\&i(Q(C_n;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_n})-N_G[v])\leqslant\\&i(T_{4,(n-2)})F_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}-4(n-2)+1}F_{s_n+1}+\\&i(T_{4,(n-3)})F_5F_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}-4(n-2)-1})F_{s_n+1}+\\&i(T_{4,(n-4)})F_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4(n-4)+1}F_{s_1+1}F_{s_{n-1}+1}F_{s_n-1}+\\&i(T_{4,(n-5)})F_5F_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4(n-4)-1}F_{s_1+1}F_{s_{n-1}+1}F_{s_n-1}=\\&i(T_{4,(n-4)})(35F_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}-4n+9}F_{s_n+1}+\\&25F_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}-4n+7}F_{s_n+1}+\\&F_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+17}F_{s_1+1}F_{s_{n-1}+1}F_{s_n-1})+\\&i(T_{4,(n-5)})(50F_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}-4n+9}F_{s_n+1}+\\&50F_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}-4n+7}F_{s_n+1}+\\&5F_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+15}F_{s_1+1}F_{s_{n-1}+1}F_{s_n-1})=\end{aligned}$$

$$\frac{1}{25}\Big\{ i(T_{4,(n-4)})[175L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n+10}+$$
$$(-1)^{s_n}175L_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}-s_n-4n+8}+$$
$$125L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n+8}+(-1)^{s_n}125L_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}-s_n-4n+6}+$$
$$L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n+18}+(-1)^{s_n}L_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}-s_n-4n+20}+$$
$$(-1)^{s_{n-1}}L_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-2}-s_{n-1}+s_n-4n+16}+$$
$$(-1)^{s_1}L_{s_2+s_3+\cdots+s_n-s_1-4n+16}+$$
$$(-1)^{s_1+s_n}L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-1}-s_1-s_n-4n+18}+$$
$$(-1)^{s_1+s_{n-1}}L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-s_1-s_{n-1}+s_n-4n+14}+$$
$$(-1)^{s_{n-1}+s_n}L_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-2}-s_{n-1}+s_n-4n+18}+$$
$$(-1)^{s_1+s_{n-1}+s_n}L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-s_1-s_{n-1}+s_n-4n+16}]+$$
$$i(T_{4,(n-5)})[250L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n+10}+$$
$$(-1)^{s_n}250L_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}-s_n-4n+8}+$$
$$250L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n+8}+(-1)^{s_n}250L_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}-s_n-4n+6}+$$
$$5L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n+16}+(-1)^{s_n}5L_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}-s_n-4n+18}+$$
$$(-1)^{s_{n-1}}5L_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-2}-s_{n-1}+s_n-4n+14}+$$
$$(-1)^{s_1}5L_{s_2+s_3+\cdots+s_n-s_1-4n+14}+$$
$$(-1)^{s_1+s_n}5L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-1}-s_1-s_n-4n+16}+$$
$$(-1)^{s_1+s_{n-1}}5L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-s_1-s_{n-1}+s_n-4n+12}+$$
$$(-1)^{s_{n-1}+s_n}5L_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-2}-s_{n-1}+s_n-4n+16}+$$
$$(-1)^{s_1+s_{n-1}+s_n}3L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-s_1-s_{n-1}+s_n-4n+14}]\Big\}$$

同理得到

$$i(Q(C_n;C_4,C_4,\cdots,C_4,C_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4(n-1)}))=$$
$$i(T_{4,(n-1)})F_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n+5}+$$
$$i(T_{4,(n-3)})F_5F_5F_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n+3}=$$
$$\frac{1}{5}i(T_{4,(n-4)})[45L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n+10}-45L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n}+$$
$$25L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n+8}-25L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n-2}]+$$
$$i(T_{4,(n-5)})[70L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n+10}-70L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n}+$$
$$50L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n+8}-50L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n-2}]$$

因此

$$i(Q(C_n;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_n}))-$$
$$i(Q(C_n;C_4,C_4,\cdots,C_4,C_{s_1+s_2+\cdots+s_n-3(n-1)}))\leqslant$$
$$\frac{1}{25}i(T_{4,(n-4)})[-50L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n+10}+225L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n}+$$
$$125L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n-2}+5L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n+18}+$$
$$(-1)^{s_n}175L_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}-s_n-4n+8}+$$
$$(-1)^{s_n}125L_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}-s_n-4n+6}+$$
$$(-1)^{s_n}L_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}-s_n-4n+20}+$$
$$(-1)^{s_{n-1}}L_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-2}-s_{n-1}+s_n-4n+18}+$$
$$(-1)^{s_1}L_{s_2+s_3+\cdots+s_n-s_1-4n+16}+$$
$$(-1)^{s_1+s_n}L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-1}-s_1-s_n-4n+18}+$$
$$(-1)^{s_1+s_{n-1}}L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-s_1-s_{n-1}+s_n-4n+14}+$$
$$(-1)^{s_{n-1}+s_n}L_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-2}-s_{n-1}+s_n-4n+18}+$$
$$(-1)^{s_1+s_{n-1}+s_n}L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-s_1-s_{n-1}+s_n-4n+14}]+$$
$$i(T_{4,(n-5)})[-100L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n+10}+5L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n+16}+$$
$$350L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n}+250L_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n-2}+$$
$$(-1)^{s_n}250(L_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}-s_n-4n+8}+L_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}-s_n-4n+6}+$$
$$(-1)^{s_n}5L_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-1}-s_n-4n+18}+$$
$$(-1)^{s_{n-1}}5L_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-2}-s_{n-1}+s_n-4n+14}+$$
$$(-1)^{s_1}5L_{s_2+s_3+\cdots+s_n-s_1-4n+14}+$$
$$(-1)^{s_1+s_n}5L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-1}-s_1-s_n-4n+16}+$$
$$(-1)^{s_1+s_{n-1}}5L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-s_1-s_{n-1}+s_n-4n+12}+$$
$$(-1)^{s_{n-1}+s_n}5L_{s_1+s_2+\cdots+s_{n-2}-s_{n-1}+s_n-4n+16}+$$
$$(-1)^{s_1+s_{n-1}+s_n}5L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-s_1-s_{n-1}-s_n-4n+14}]\leqslant$$
$$\frac{1}{25}i(T_{4,(n-4)})(L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+30}-L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+24}-$$
$$51L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+22}-L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+20}+$$
$$2L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+14}+50L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+12}-$$
$$L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+2})+i(T_{4,(n-5)})(5L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+28}-$$
$$105L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+22}-10L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+18}+$$
$$110L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+12}+5L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+8}-$$
$$5L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+2})]=\frac{1}{25}i(T_{4,(n-4)})\cdot$$
$$(-55L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+17}-37L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+16}+$$
$$2L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+14}+50L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+12}-$$
$$L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+2}+$$
$$i(T_{4,(n-5)})(-130L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+17}-$$
$$90L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+16}+110L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+12}+$$
$$5L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+8}-5L_{s_2+s_3+\cdots+s_{n-2}-4n+2})]\leqslant 0$$

并且等式成立当且仅当 $Q(C_n;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_n})\cong Q(C_n;C_3,C_3,\cdots,C_3,C_{s_1+s_2+\cdots+s_n-3(n-1)})$。

在证明过程中，用到的符号标记 $T_{4,k}=Q(P_k;C_4,C_4,\cdots,C_4)(k=1,2,\cdots,n)$，因此结论成立。

定理 3 假设 $s_1,s_2,\cdots,s_n$ 都是正整数且满足 $s_i\geqslant 3(i=1,2,\cdots,n)$，在顶点数为定值时，则有

$$i(Q(W_n;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_n}))\leqslant$$
$$i(Q(W_n;C_4,C_4,\cdots,C_4,C_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4(n-1)}))$$

并且等式成立当且仅当

$$Q(W_n;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_n})\cong$$
$$Q(W_n;C_4,C_4,\cdots,C_4,C_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4(n-1)})$$

证明 由引理 2、定理 1 和定理 2，可以得到

$$i(Q(W_n;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_n}))\leqslant$$
$$i(Q(C_n;C_4,C_4,\cdots,C_4,C_{s_1+s_2+\cdots+s_n+4(n-1)}))+$$
$$i(P_3\cup P_3\cup\cdots\cup P_3\cup P_{s_1+s_2+\cdots+s_n-4n+1})=$$

$i(Q(W_n;C_4,C_4,\cdots,C_4,C_{s_1+s_2+\cdots+s_n+4(n-1)}))$

所以定理 3 成立。

参考文献：

[1] ZHAO H, LI I. On the Fibonacci numbers of trees [J]. Fibonacci Quart, 2006, 44(1): 32 – 38.

[2] PRODINGER H, TICHY R F. Fibonacci numbers of graphs [J]. The Fibonacci Quart, 1982, 20(1) :16 – 21.

[3] REN S Z, HE W S. The study of σ index on $Q(P_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k})$ graphs [J]. SCIENTIA MAGNA, 2008, 4 (4): 40 – 45.

[4] REN S Z, HE W S. The Merrifield-Simmons index in $(n,n+1)$-graphs [J]. SCIENTIA MAGNA, 2009, 5 (2) :6 – 14.

[5] REN S Z. Merrifield-Simmons index of tree-type hexagonal systems [J]. MATCH Commun Math Comput Chem, 2011, 66(3): 837 – 848.

[6] REN S Z, HE W S. The study of σindex on $Q(S_k;C_{s_1},C_{s_2},\cdots,C_{s_k})$ graphs [J]. SCIENTIA MAGNA, 2008, 4 (2): 49 – 55.

[7] GUTMAN I, CYVIN S J. Introduction to the theory of Benzenoid hydrocarbons [M]. Berlin: Springer, 1989.

[8] SHIU W C. Extremal Hosoya index and Merrifield-Simmons of hexagonal spiders [J]. Discr Apple Math, 2008, 156(1): 2978 – 2985.

[9] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with application [M]. New York, 1976.

(上接第 63 页)

[6] TAKSAR M, MAKUSSEN C. Optimal dynamic reinsurance policies for large insurance portfolios [J]. Finance Stochastics, 2003, 7: 97 – 121.

[7] PROMISLOW D S, YOUNG V R. Minimizing probability of ruin when claims flow Brownian motion with drift [J]. North American Actuarial Journal, 2005, 9: 109 – 128.

[8] LUO S L. Ruin minimization for insurers with borrowing constraints [J]. North American Actuarial Journal, 2008, 12: 143 – 174.

[9] 曾燕, 李仲飞. 线性约束下保险公司的最优投资策略 [J]. 运筹学学报, 2010, 14(2): 106 – 118.

[10] YANG H L, ZHANG L H. Optimal investment for insurer with jump-diffusion risk process [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2005, 37: 615 – 634.

[11] ZENG Y, LI Z F, LIU J J. Optimal strategies of benchmark and mean-variance portfolio selection problems for insurers [J]. Journal of Industrial and Management Optimization, 2010, 6: 483 – 496.

[12] BAI L H, ZHANG H. Dynamic mean-variance problem with constrained risk control for the insurers [J]. Mathematical Methods of Operations Research, 2008, 68: 181 – 205.

[13] WANG Z W, XIA J M, ZHANG L H. Optimal investment for an insurer: the martingale approach [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2007, 40: 322 – 334.

[14] DELONG K, GERRARD R. Mean-variance portfolio selection for a non-life insurance company [J]. Math Meth Oper Res, 2007, 66: 339 – 367.

[15] YUEN K C, GUO J Y, WU X Y. On the first time of ruin in the bivariate compound Poisson model [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2006, 38: 298 – 308.

[16] COLLAMORE J F. Importance sampling techniques for the multidimensional ruin problem for general Markov additive sequences of random vectors [J]. The Annals of Applied Probability, 2002, 12: 382 – 421.

[17] HULT H, LINDSKOG F. Heavy-tailed insurance portfolios: buffer capital and ruin probabilities [R]. School of ORIE, Cornell University, Technical Report No. 1441, 2006.

[18] 张明善, 姚珣, 赵武,等. 二元风险模型下的保险公司最优投资策略 [J]. 管理工程学报, 2011, 25: 228 – 231.

[19] BÄUERLE N, BLATTER A. Optimal control and dependence modeling of insurance portfolios with Lévy dynamics [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2011, 48: 398 – 405.

[20] FLEMING W H, SONER H M. Controlled markov processes and viscosity solutions [M]. Berlin, New York: Springer, 1993.