

双连续 C 半群的 Vornonvskaja 型逼近问题^{*}

仓定帮, 闫守峰, 苗文静
(华北科技学院基础部, 北京 101601)

摘 要: 基于局部凸拓扑 τ 的 Banach 空间上双连续 C 半群的定义及性质, 借助于双正则核这一工具, 研究了双连续 C 半群的表示形式, 给出了双连续 C 半群 Vornonvskaja 型逼近定理。

关键词: 双连续 C 半群; 双正则核; 逼近定理

中图分类号: O177.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2014) 04-0035-05

Vornonvskaja-type Approximation for Bi-continuous C -semigroups

CANG Dingbang, YAN Shoufeng, MIAO Wenjing

(Department of Basic, North China Institute of Science and Technology, Beijing 101601, China)

Abstract: Based on the definition and properties of the Bi-continuous C -semigroups on a Banach space endowed with an additional locally convex topology τ , by means of bi-positive kernel, the problem of approximation for Bi-continuous C -semigroups was studied and the exponential-type representation formulas are given. Moreover, a corresponding Vornonvskaja-type approximation of exponential formulas is obtained, and the generating theorems are given.

Key words: Bi-continuous C semigroups; bi-positive kernel; approximation theorems

当今, 强连续半群的理论已经成为许多领域的重要工具。这些领域除了传统的偏微分方程和随机过程外, 还包括量子力学、无穷维控制理论、积分-微分方程、泛函微分方程及无穷维动力系统等等^[1]。

然而在实际问题中发现, 许多情况下对应的半群不是强连续的, Kuhnemund^[2]指出, 存在 Banach 空间上的一些特殊的非强连续的半群, 并通过对这些半群的具体研究; Kuhnemund 在 Banach 空间上附加一个比范数拓扑粗的局部拓扑, 使得半群在局部拓扑下强连续, 从而提出了双连续半群的概念。文 [2] 还指出序列完备的局部凸空间上的等度连续半群满足的条件比双连续半群强, 且等度连续对实际的问题对实际的应用不是很广, 许多情况所对应的空间是 Banach 空间, 可以赋予一个比范数拓扑粗的局部拓扑, 从而说明双连续半群理论

有非常好的应用价值。文 [3] 给出了双连续半群的 Trotter-Kato 定理, 文 [4] 分析了局部凸拓扑下的 Riemann-Stieltjes 积分, 给出了双连续半群的逼近定理及其应用。文 [5] 研究了局部有界的双连续 C 半群, 结合双连续半群和 C 半群的逼近定理, 得到了双连续 C 半群的逼近定理。逼近理论是半群的重要的研究分支, 20 世纪 80 年代开始, 数学家们开始利用概率论这一有力工具解决算子半群中的逼近问题, 并取得了丰富的成果^[6-11]。本文借助于双正则核这一工具, 试从不同的角度研究了双连续 C 半群的表示形式, 给出了双连续 C 半群 Vornonvskaja 型逼近定理。

1 若干定义

假设 X 是 Banach 空间, X' 是它的共轭空间, τ 是 X 上的一个局部凸拓扑, 并且具有以下性质:

* 收稿日期: 2013-11-04

基金项目: 中央高校基本科研业务费资助项目 (3142012022, 3142013039, 3142014039, 3142014127); 华北科技学院重点学科资助项目 (HKXJZD201402)

作者简介: 仓定帮 (1980 年生), 男; 研究方向: 泛函分析; E-mail: cdbjd@163.com

(i) 空间 (X, τ) 是在 $\|g\|$ -有界集上序列完备, 即每个 $\|g\|$ -有界的 τ 柯西列在 (X, τ) 中收敛;

(ii) τ 拓扑比 $\|g\|$ 拓扑粗且 τ 是 Hausdorff 拓扑;

(iii) $(X, \|g\|)$ 中的范数可以由空间 $(X, \tau)'$ 定义, 即对每个 $x \in X$ 有 $\|x\| = \sup\{ \langle x, \varphi \rangle \mid \varphi \in (X, \tau)', \|\varphi\|_{(X, \|g\|)'} \leq 1 \}$ 。

记 $\Phi = \{ \varphi \in (X, \tau)', \|\varphi\|_{(X, \|g\|)'} \leq 1 \}$, P_τ 是上的局部凸拓扑所对应的半范数簇, 由假设不失一般性, 不妨认为 $p(x) \leq \|x\|$, $x \in X$, $p \in P_\tau$ 。本文中的所有算子均为线性算子, $D(A)$ 表示算子的定义域。

定义 1^[4] X 是局部凸拓扑 τ 的 Banach 空间, $\alpha \in \text{NBV}[0, R]$, 函数 $f: [0, R] \rightarrow X$ 是 Riemann-Stieltjes 可积的, 如果 $\tau - \int_0^R f(s) d\alpha(s) := \tau -$

$\lim_{|\pi| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (\alpha(s_i) - \alpha(s_{i-1})) f(\xi_i)$ 对 $[0, R]$ 的所有的分割 $\pi := \{0 = s_0 < \dots < s_n = R\}$

都成立, 其中 $\xi_i \in (s_{i-1}, s_i)$, $|\pi| = \max(|s_i - s_{i-1}|)$ 。

定义 2^[2] 算子 $T \in B(X)$ 称为双连续的, 如果对每个 $\|g\|$ -有界序列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ 且 $\tau - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$, 有 $\tau - \lim_{n \rightarrow \infty} Tx_n = Tx$ 。

定义 3^[2] 算子族 $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subseteq B(X)$ 称为(整体)等度双连续, 若对每个 $\|g\|$ -有界序列 $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ 且 $\tau - \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x \in X$, 有 $\tau - \lim_{n \rightarrow \infty} T(t)(x_n - x) = 0$, 对所有 $t \geq 0$ 一致成立。

定义 4^[2] 算子族 $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subseteq B(X)$ 称为局部等度双连续, 若对每个 $t_0 \geq 0$, 子集 $\{T(t) : 0 \leq t \leq t_0\}$ 等度双连续。

定义 5^[2] 算子族 $\{T(t)\}_{t \geq 0} \subseteq B(X)$ 称为指数有界的双连续 C 半群, 简称为双连续 C 半群, 如果满足

(i) $T(0) = C$, $T(t+s)C = T(t)T(s)$, $\forall t, s \geq 0$;

(ii) $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ 强 τ -连续;

(iii) $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ 局部等度连续;

(iv) $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ 指数有界, 即 $\exists M, \omega \geq 0$ 使得 $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$, $\forall t \geq 0$ 。

线性算子 A 称为双连续 C 半群 $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ 的生成元, 如果

$$D(A) = \{x \in X : \sup_{0 < t \leq 1} \left\| \frac{T(t)x - Cx}{t} \right\| < \infty\},$$

$$\tau - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - Cx}{t} \text{ 存在且 } \in \text{Im}(C)\},$$

$$Ax = C^{-1}(\tau - \lim_{t \rightarrow 0} \frac{T(t)x - Cx}{t}), x \in D(A)$$

A 的预解集为 $\rho(A) = \{\lambda : \lambda - A \text{ 为单射}, \text{Im}(C) \subseteq \text{Im}(\lambda - A)\}$, A 的预解式为

$$R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}C = \tau - \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x dt$$

由双连续 C 半群的定义可以发现 $S(kt) = [C^{-1}S(t)]^k C$ 。

定义 6 设 $\varphi(t) > 0$, 若 $W_\eta(t, \mu)$ 满足下面条件 (a)、(b) 时, 称 $W_\eta(t, \mu)$ 为双正则核。

$$(a) \quad \forall t \geq 0, \tau - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \eta^{-1} \left\{ \tau - \int_0^\infty W_\eta(t, \mu) d\mu - 1 \right\} = 0, \tau - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \eta^{-1} \left\{ \tau - \int_0^\infty W_\eta(t, \mu) (\mu - t) d\mu \right\} = 0,$$

$$\tau - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \eta^{-1} \left\{ \tau - \int_0^\infty W_\eta(t, \mu) (\mu - t)^2 d\mu \right\} = \varphi(t);$$

$$(b) \quad \forall \delta > 0, t \geq 0, \omega \geq 0, \tau - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \eta^{-1} \left\{ \tau - \int_0^\infty W_\eta(t, \mu) (\mu - t)^4 e^{\omega t} d\mu \right\} = 0.$$

2 主要结论

定理 1 设双连续 C 半群 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 指数有界, $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$, 令 $S_\eta(t)x = \tau - \int_0^\infty W_\eta(t, \mu) S(\mu)x d\mu$, 则有

$$S(t)x = \tau - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} S_\eta(t)x$$

证明 $\forall x \in X, t \geq 0$,

$$p[S_\eta(t)x - S(t)x] \leq \int_0^\infty W_\eta(t, \mu) p[S(\mu) - S(t)]x d\mu + p[S(t)x] \left| \int_0^\infty W_\eta(t, \mu) d\mu - 1 \right|$$

由于 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 是双连续的, 所以 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $|\mu - t| < \delta$, 有 $p[S(\mu)x - S(t)x] < \varepsilon$, 因此

$$p[S_\eta(t)x - S(t)x] \leq$$

$$\tau - \int_{|\mu - t| < \delta} W_\eta(t, \mu) p[S(\mu) - S(t)]x d\mu +$$

$$\tau - \int_{|\mu - t| \geq \delta} W_\eta(t, \mu) p[S(\mu) - S(t)]x d\mu +$$

$$p[S(t)x] \left| \tau - \int_0^\infty W_\eta(t, \mu) d\mu - 1 \right| \leq$$

$$p[S_\eta(t)x - S(t)x] \leq$$

$$\varepsilon(\tau - \int_{|\mu - t| < \delta} W_\eta(t, \mu) d\mu) + (M + Me^{\omega t}) \cdot$$

$$(\tau - \int_{|\mu - t| \geq \delta} W_\eta(t, \mu) e^{\omega t} d\mu) +$$

$$Me^{\omega t} \left| \tau - \int_0^{\infty} W_{\tau}(t, \mu) d\mu - 1 \right| \leq \varepsilon + (\varepsilon + Me^{\omega t}) \left| \tau - \int_0^{\infty} W_{\tau}(t, \mu) d\mu - 1 \right| +$$

$$M(1 + e^{\omega t}) \left(\tau - \int_{|\mu-t| < \delta} W_{\eta}(t, \mu) d\mu \right)$$

结合定义 6 可得 $p[S_{\eta}(t)x - S(t)x] \leq \varepsilon + (\varepsilon + Me^{\omega t})o(\eta) + M(1 + e^{\omega t})o(\eta)$, 得证。

由 $S_{\eta}(t)x = \tau - \int_0^{\infty} W_{\eta}(t, \mu)S(\mu)x d\mu$ 知 $S_{\eta}(t)$ 是线性算子, 若存在 $K_t > 0$ 使得 $\forall \eta > 0$ 有下面式子成立

$$\tau - \int_0^{\infty} Me^{\omega t} W_{\eta}(t, \mu) d\mu \leq K_t < +\infty$$

则有 $\|S_{\eta}(t)x\| \leq \tau - \int_0^{\infty} Me^{\omega t} W_{\eta}(t, \mu) d\mu \|x\| \leq K_t \|x\|$, i. e. $\|S_{\eta}(t)\| \leq K_t < +\infty$ 。

进一步, 我们假设 $W_{\eta}(t, \mu)$ 还满足下面的两个条件:

$$(c) \quad \forall t \geq 0, \eta > 0, \tau - \int_0^{\infty} W_{\eta}(t, \mu) d\mu = 1;$$

$$(d) \quad \forall t \geq 0, \eta > 0, \frac{\partial W_{\eta}(t, \mu)}{\partial t} = \frac{1}{\tau \varphi(t)}(\mu - t)W_{\eta}(t, \mu), \text{ 其中 } \varphi(0) = 0, \varphi(t) > 0.$$

令 $R_{\eta}^{(m)}(t) = \eta^m(\tau - \int_0^{+\infty} (\mu - t)^m W_{\eta}(t, \mu) d\mu)$ 。

引理 1 $\forall t \geq 0, \eta > 0$, 有 $R_{\eta}^{(m+1)}(t) = \frac{m}{\eta} \varpi(t) R_{\eta}^{(m-1)}(t) + \varpi(t) \frac{d}{dt} R_{\eta}^{(m)}(t)$, 且 $R_{\eta}^{(2m)}(t) = o(\eta^{-m})$ 。

证明 对 $R_{\eta}^{(m)}(t) = \eta^m(\tau - \int_0^{+\infty} (\mu - t)^m W_{\eta}(t, \mu) d\mu)$ 两边同时微分可得:

$$\varpi(t) \frac{d}{dt} R_{\eta}^{(m)}(t) = \eta^{-m} \varpi(t) \cdot$$

$$(\tau - \int_0^{+\infty} [(\mu - t)^m \frac{\partial W_{\eta}(t, \mu)}{\partial t} -$$

$$m(\mu - t)^{m-1} W_{\eta}(t, \mu)] d\mu) =$$

$$\eta^{-m-1} (\tau - \int_0^{+\infty} (\mu - t)^{m+1} W_{\eta}(t, \mu) d\mu -$$

$$m\eta^{-m} \varphi(t) (\tau - \int_0^{+\infty} (\mu - t)^{m-1} W_{\eta}(t, \mu) d\mu) =$$

$$R_{\eta}^{(m+1)}(t) - \frac{m}{\eta} \varpi(t) R_{\eta}^{(m-1)}(t)$$

据 $R_{\eta}^{(m)}(t) = \eta^m(\tau - \int_0^{+\infty} (\mu - t)^m W_{\eta}(t, \mu) d\mu)$, 经计算可知: $R_{\eta}^{(0)}(t) = 1, \tau - \int_0^{+\infty} (\mu - t) W_{\eta}(t, \mu) d\mu = 0$,

$\tau - \int_0^{+\infty} (\mu - t)^2 W_{\eta}(t, \mu) d\mu = \eta \varphi(t)$, 进一步有 $R_{\eta}^{(2m)}(t) = o(\eta^{-m})$ 。

引理 2 令 $W_{\eta}(t, \mu)$ 满足条件 (c) 与 (d), 若有 $\tau - \int_0^{\infty} e^{2\omega t} W_{\eta}(t, \mu) d\mu = o(1)$, 则有 $\tau - \int_0^{+\infty} (\mu - t)^4 e^{\omega t} W_{\eta}(t, \mu) d\mu = o(\eta^2)$ 。

证明 $\forall t \geq 0, \eta > 0$, 由 Schwarz 不等式得

$$\tau - \int_0^{+\infty} (\mu - t)^4 e^{\omega t} W_{\eta}(t, \mu) d\mu \leq$$

$$(\tau - \int_0^{+\infty} e^{\rho \omega t} W_{\eta}(t, \mu) d\mu)^{\frac{1}{p}} \cdot$$

$$(\tau - \int_0^{+\infty} (t - \mu)^{4q} W_{\eta}(t, \mu) d\mu)^{\frac{1}{q}}$$

其中 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, 再由引理 1 得 $\tau - \int_0^{+\infty} (\mu - t)^4 e^{\omega t} W_{\eta}(t, \mu) d\mu = o(\eta^2)$ 成立。

定理 2 设 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 是指数有界的双连续 C 半群, 则有 $S(t)x = \tau - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \exp(C^{-1} \frac{t}{\eta} (S(\tau) - C))$ 。

证明 令 $W_{\eta}^1(t, \mu) = e^{-\frac{t}{\eta}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\frac{t}{\eta})^k \delta_{k\eta}(\mu)$, 其中 $\delta_y(\mu)$ 是参数为 y 的单点分布, 可以验证 $W_{\eta}^1(t, \mu)$ 满足条件 (c) 与 (d), 且 $\tau - \int_0^{\infty} e^{\omega \mu} W_{\eta}^1(t, \mu) d\mu = e^{-\frac{t}{\eta}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\frac{t}{\eta})^k e^{k\omega \eta} = \exp(\frac{t}{\eta} (e^{\omega t} - 1)) \rightarrow \exp(\omega t)$ 。

$$S_{\eta}^1(t)x = \tau - \int_0^{\infty} W_{\eta}^1(t, \mu) S(\mu)x d\mu =$$

$$e^{-\frac{t}{\eta}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\frac{t}{\eta})^k S(k\eta)x =$$

$$e^{-\frac{t}{\eta}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\frac{t}{\eta})^k [(C^{-1}S(\tau))^k] Cx =$$

$$\exp\{-\frac{t}{\eta}\} \{\exp[\frac{t}{\eta} C^{-1}S(\eta)]\} Cx =$$

$$\{\exp[\frac{t}{\eta} (C^{-1}S(\eta) - 1)]\} Cx$$

从而 $S(t) = \tau - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} S_{\eta}^1(t) = \tau - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \exp(C^{-1} \frac{t}{\eta} (S(\tau) - C))$ 。

定理 3 设 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 是指数有界的双连续 C 半群, 则有 $S(t)x = \tau - \lim_{n \rightarrow \infty} \{(1-t)I - C^{-1}S(\frac{1}{n})\}^n Cx$ 。

证明 令 $W_n^2(t, \mu) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \delta_{\frac{k}{n}}(\mu)$, 可以验证 $W_n^2(t, \mu)$ 满足条件 (c) 与 (d), 且 $\tau -$

$$\int_0^\infty e^{\omega\mu} W_n^2(t, \mu) d\mu = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} e^{\frac{k\omega}{n}} = [(1-t) + te^{\frac{\omega}{n}}]^n \rightarrow e^{\omega t}.$$

$$S_n^2(t)x = \tau - \int_0^\infty W_n^2(t, \mu) S(\mu) x d\mu =$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} S\left(\frac{k}{n}\right) x =$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \left[\left(C^{-1} S\left(\frac{1}{n}\right) \right)^k \right] Cx =$$

$$\{ (1-t)I + C^{-1} S\left(\frac{1}{n}\right) t \}^n Cx$$

$$\text{从而 } S(t) = \tau - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^2(t) = \tau - \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (1-t)I - C^{-1} S\left(\frac{1}{n}\right) \}^n Cx_0.$$

定理 4 设 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 是指数有界的双连续 C 半群, 则有 $S(t)x = \tau - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \{ (1 + \alpha t)I - \alpha t C^{-1} S\left(\frac{1}{n}\right) \}^{-\frac{n}{\alpha}} Cx_0$.

证明 令 $W_n^3(t, \mu) = \sum_{k=0}^\infty \frac{n(n+\alpha) \cdots (n+(k-1)\alpha)}{k!} \frac{t^\alpha}{(1+\alpha t)^{\frac{n}{\alpha}+k}} \delta_{\frac{k}{n}}(\mu)$, 可以验证 $W_n^3(t, \mu)$ 满足条件 (c) 与 (d), 且

$$\tau - \int_0^\infty e^{\omega\mu} W_n^3(t, \mu) d\mu =$$

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{n(n+\alpha) \cdots (n+(k-1)\alpha)}{k!}.$$

$$\frac{t^\alpha}{(1+\alpha t)^{\frac{n}{\alpha}+k}} e^{\frac{k\omega}{n}} = (1 + \alpha t - \alpha t e^{\frac{\omega}{n}})^n \rightarrow e^{\omega t};$$

$$S_n^3(t)x = \tau - \int_0^\infty W_n^3(t, \mu) S(\mu) x d\mu =$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} S\left(\frac{k}{n}\right) x =$$

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k} \left[\left(C^{-1} S\left(\frac{1}{n}\right) \right)^k \right] Cx =$$

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{n(n+\alpha) \cdots (n+(k-1)\alpha)}{k!} \frac{t^\alpha}{(1+\alpha t)^{\frac{n}{\alpha}+k}}.$$

$$S\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^\infty \frac{n(n+\alpha) \cdots (n+(k-1)\alpha)}{k!}.$$

$$\frac{1}{(1+\alpha t)^{\frac{n}{\alpha}}} \left(\frac{t}{1+\alpha t} \right)^k \left[\left(C^{-1} S\left(\frac{1}{n}\right) \right)^k \right] Cx =$$

$$\{ (1 + \alpha t)I - \alpha t C^{-1} S\left(\frac{1}{n}\right) \}^{-\frac{n}{\alpha}} Cx$$

从而 $S(t) = \tau - \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^2(t) = \tau - \lim_{n \rightarrow \infty} \{ (1 + \alpha t)I - \alpha t C^{-1} S\left(\frac{1}{n}\right) \}^{-\frac{n}{\alpha}} Cx_0$.

在上面的定理 4 中令 $\alpha \rightarrow 0^+$ 可得如下推论 1。

推论 1 设 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 是指数有界的双连续 C 半群, 则有 $S(t) = \tau - \lim_{n \rightarrow \infty} \{ \exp[nt(C^{-1} S\left(\frac{1}{n}\right) - I)] Cx_0$.

引理 3 设 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 是指数有界的双连续 C 半群, 则有 $(\lambda - A)^k Cx = \frac{1}{(k-1)!} (\tau - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\mu} \mu^{k-1} S(\mu) d\mu)$ 。

证明 令 $L(\lambda) = (\lambda - A)^{-1} C$, 则 $(\lambda - A)L(\lambda) = C$, 对该式微分 k 次得

$$(\lambda - A) \frac{d^k}{d\lambda^k} L(\lambda) + k \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} L(\lambda) = 0 \text{ 或}$$

$$\frac{d^k}{d\lambda^k} L(\lambda) = -k(\lambda - A)^{-1} \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} L(\lambda)$$

归纳得 $\frac{d^k}{d\lambda^k} L(\lambda) = (-1)^k k! (\lambda - A)^k L(\lambda) = (-1)^k k! (\lambda - A)^{-k-1} C$, 从而

$$(\lambda - A)^k Cx = (-1)^{k-1} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} L(\lambda) =$$

$$(-1)^{k-1} \frac{1}{(k-1)!} \frac{d^{k-1}}{d\lambda^{k-1}} \left(\tau - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} S(t) dt \right) =$$

$$\frac{1}{(k-1)!} \left(\tau - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} t^{k-1} S(t) dt \right)$$

定理 5 设 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 是指数有界的双连续 C 半群, 则有 $S(t)x = \tau - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} (1 - \frac{t}{n} A)^{-n} Cx_0$ 。

证明 令 $W_n^4(t, \mu) = \frac{1}{(n-1)!} \binom{n}{t} e^{-\frac{n}{t}\mu} \mu^{n-1}$, 可以验证 $W_n^4(t, \mu)$ 满足条件 (c) 与 (d), 且

$$\tau - \int_0^\infty e^{\omega\mu} W_n^4(t, \mu) d\mu =$$

$$\frac{1}{(n-1)!} \binom{n}{t} \left(\tau - \int_0^{+\infty} e^{-(\frac{n}{t}-\omega)\mu} \mu^{n-1} d\mu \right) =$$

$$\left(\frac{n}{t} \right)^n \left(\frac{n}{t} - \omega \right)^{-n} \rightarrow e^{\omega t};$$

$$S_n^4(t)x = \frac{1}{(n-1)!} \binom{n}{t} \left(\tau - \int_0^{+\infty} e^{-\frac{n}{t}\mu} \mu^{n-1} S(\mu) x d\mu \right) =$$

$$\left(\frac{n}{t} \right)^n \left(\frac{n}{t} - A \right)^{-n} Cx = (1 - \frac{t}{n} A)^{-n} Cx$$

从而 $S(t) = \tau - \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n^4(t) = \tau - \lim_{n \rightarrow +\infty} (1 - \frac{t}{n} A)^{-n} Cx_0$ 。

定理 6 设 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 是指数有界的双连续 C 半群, 则有 $S(t)x = \tau - \lim_{n \rightarrow +\infty} \{ \exp\{\lambda^2 t(\lambda - A)^{-1} - \lambda t I\} \} Cx_0$ 。

证明 令 $W_\lambda^5(t, \mu) = e^{-\lambda t} \left\{ \tau - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda\mu} \sum_{k=1}^\infty \right.$

$\frac{(\lambda^2 t)^k \mu^{k-1}}{k!(k-1)!} d\mu + \delta_0(\mu) \}$, 可以验证 $W_\eta^\delta(t, \mu)$ 满足条件(c)与(d), 且可以证明 $\int_0^\infty e^{\omega t} W_\lambda^\delta(t, \mu) d\mu \rightarrow e^{\omega t}$.

$$\begin{aligned} S_\lambda^5(t)x &= \\ e^{-\lambda t} \left\{ \tau - \int_0^\infty e^{-\lambda \mu} \sum_{k=1}^\infty \frac{(\lambda^2 t)^k \mu^{k-1}}{k!(k-1)!} S(\mu)x d\mu + Cx \right\} &= \\ e^{-\lambda t} \left\{ \sum_{k=1}^\infty \left(\tau - \int_0^\infty e^{-\lambda \mu} \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} \mu^{k-1} S(\mu)x d\mu \right) + Cx \right\} &= \\ e^{-\lambda t} \left\{ \sum_{k=1}^\infty \frac{(\lambda^2 t)^k}{k!} (\lambda - A)^{-k} Cx + Cx \right\} &= \\ e^{-\lambda t} \exp \{ \lambda^2 t (\lambda - A)^{-1} \} Cx &= \\ \{ \exp \{ \lambda^2 t (\lambda - A)^{-1} - \lambda t I \} \} Cx \end{aligned}$$

从而 $S(t) = \tau - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} S_\lambda^5(t) = \tau - \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \{ \exp \{ \lambda^2 t (\lambda - A)^{-1} - \lambda t I \} \} Cx$.

下面给出双连续 C 半群的 Vornonvskaja 型逼近定理。

定理 7 设 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 是指数有界的双连续 C 半群, $W_\eta(t, \mu)$ 满足条件 (c) 和 (d), 若 $x \in D(A^2 S(t_0))$ 则有:

$$\tau - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \eta^{-1} \{ S_\eta(t)x - S(t)x \} = \frac{\varphi(t)}{2} A^2 S(t)x$$

证明 因为 $x \in D(A^2 S(t_0))$, 从而 $S(t)x \in D(A^2)$, $S''(t)x = A^2 S(t)x$ 。由 Taylor 展开式 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|t - \mu| < \delta$ 时有 $S(\mu)x - S(t)x = (\mu - t)AS(t)x - \frac{1}{2}(\mu - t)^2 A^2 S(t)x + \varepsilon_1 x (\mu - t)^2$, 其中 $\|\varepsilon_1 x\| < \varepsilon$ 。

$$p(\eta^{-1}(S_\eta(t)x - S(t)x) - \frac{\varphi(t)}{2} A^2 S(t)x) \leq$$

$$p\left(\int_{|\mu-t|<\delta} W_\eta(t, \mu) [(\mu - t)AS(t)x + \frac{1}{2}(\mu - t)^2 A^2 S(t)x + \varepsilon_1 x (\mu - t)^2] d\mu - \right.$$

$$\left. \frac{\varphi(t)}{2} A^2 S(t)x + p(\eta^{-1} \int_{|\mu-t| \geq \delta} W_\eta(t, \mu) \cdot \right.$$

$$\left. [S(\mu)x - S(t)x] d\mu \right) = I_1 + I_2$$

因 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 是指数有界的, 所以 $I_2 \leq \eta^{-1} 2M(\tau - \int_{|\mu-t| \geq \delta} W_\eta(t, \mu) e^{\omega t} d\mu) \|x\| \leq \frac{2M}{\delta^4} \|x\| \eta^{-1} (\tau - \int_0^\infty W_\eta(t, \mu) e^{\omega t} (\mu - t)^2 d\mu) \rightarrow 0$ 。

$$I_1 \leq \eta^{-1} (\tau - \int_{|\mu-t| \geq \delta} W_\eta(t, \mu) |\mu - t| d\mu) \|AS(t)x\| +$$

$$\eta^{-1} (\tau - \int_{|\mu-t| \geq \delta} W_\eta(t, \mu) (\mu - t)^2 d\mu) \|A^2 S(t)x\| +$$

$$\eta^{-1} (\tau - \int_{|\mu-t| \geq \delta} W_\eta(t, \mu) (\mu - t)^2 d\mu) \|\varepsilon_1 x\| \leq$$

$$\varepsilon \varphi(t) + (\|AS(t)x\| \frac{1}{\delta^3} + \|A^2 S(t)x\| \frac{1}{\delta^2}) \eta^{-1} \cdot$$

$$(\tau - \int_0^\infty W_\eta(t, \mu) (\mu - t)^4 d\mu) =$$

$$\varepsilon \varphi(t) + (\|AS(t)x\| \frac{1}{\delta^3} + \|A^2 S(t)x\| \frac{1}{\delta^2}) o(\eta)$$

因而当 $\eta \rightarrow 0^+, \varepsilon \rightarrow 0^+$ 时有 $I_1 = o(1)$ 。结合定理 2、4、7 可得如下推论 2。

推论 2 设 $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ 是指数有界的双连续 C 半群, 若 $x \in D(A^2 S(t_0))$ 则

$$\tau - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \eta \{ \exp(C^{-1}t \frac{1}{\eta} (S(\eta) - C)) \cdot$$

$$Cx - S(t)x \} = \frac{t^2}{2} A^2 S(t)x;$$

$$\tau - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} n \{ [(1 - \alpha t)I - \alpha t C^{-1} S(\frac{1}{n})]^{-\frac{n}{\alpha}} \cdot$$

$$Cx - S(t)x \} = \frac{t(1 + \alpha t)}{2} A^2 S(t)x$$

参考文献:

- [1] 黄永忠. 算子半群及应用[M]. 武汉: 华中理工大学出版社, 2011.
- [2] KUHNEMUND F. A hille-yosida theorem for bi-continuous semigroups [J]. Semigroup Forum, 2003, 67(2): 205 - 225.
- [3] ALBANESE A A, MANGINO E. Trotter-Kato theorems for bi-continuous semigroups and applications to Feller semigroups [J]. J Math Anal Appl, 2004, 289(2): 477 - 492.
- [4] JARA P. Rational approximation schemes for bi-continuous semigroups [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2008, 344(2): 956 - 968.
- [5] 王文娟, 孙国正. 局部有界的双连续 C -半群及其逼近定理[J]. 数学杂志, 2007, 27(1): 31 - 37.
- [6] PFEIFER D. Approximation-theoretic aspects of probabilistic representations for operator semigroups [J]. Journal of Approximation Theory, 1985, 43(3): 271 - 296.
- [7] PFEIFER D. Probabilistic concepts of approximation theory in connection with operation semigroups [J]. Approximation theory and its Applications, 1985, 1(4): 93 - 118.
- [8] PFEIFER D, BURTER P L. Some general probabilistic estimations for the rate of convergence in operator semigroup representations [J]. Applicable Analysis, 1986, 23: 111 - 118.
- [9] 陈文忠. C -无穷小生成元的表示式[J]. 厦门大学学报: 自然科学版, 1993, 32(2): 135 - 140.
- [10] 陈文忠. C 半群概率表示的饱和定理[J]. 厦门大学学报: 自然科学版, 1995, 34(1): 1 - 6.
- [11] 宋晓秋, 彭爱民, 王彩霞. C 半群与积分半群的概率型逼近问题[J]. 南京大学学报: 数学半年刊, 2003, 20(2): 216 - 225.