

分布参数柔性梁的建模与振动边界控制*

邬依林¹, 刘 屿²

(1. 广东第二师范学院计算机科学系, 广东 广州 510303;
2. 华南理工大学自动化科学与工程学院, 广东 广州 510640)

摘要: 研究了一类具有未知扰动和变张力柔性梁的二维振动控制问题。柔性梁式结构属于典型的无穷维分布参数系统, 其动力学模型由一组偏微分方程(PDEs)和一组用常微分方程(ODEs)混合构成。为了避免控制溢出和实现二维振动控制, 基于柔性梁原始无穷维分布参数模型, 结合边界控制技术和Lyapunov直接法, 设计了纵向和横向二维PD(Proportional Derivative)控制器用以抑制柔性梁的振动, 设计的PD控制器简单可行且独立于系统参数, 因此具有较好的实时性和鲁棒性。其后利用经典的Lyapunov直接法对柔性梁系统的稳定性和一致性进行了证明。最后对所设计控制方法的有效性进行了仿真验证。

关键词: 柔性梁; 边界控制; Lyapunov直接法; 稳定性

中图分类号: TP24 文献标志码: A 文章编号: 0529-6579(2013)03-0055-08

Modeling and Boundary Vibration Control of a Distributed-Parameter Flexible Beam

WU Yilin¹, LIU Yu²

(1. Department of Computer Science, Guang Dong University of Education, Guangzhou 510303, China;
2. College of Automation Science and Engineering, South China University of Technology, Guangzhou 510640, China)

Abstract: A boundary control in two-dimensional is proposed for a distributed-parameter flexible beam with unknown disturbance and varying tension to minimize the beam vibrations. Flexible beam is a typical infinite-dimensional distributed parameter systems, and its hybrid dynamic model is described in terms of partial differential equations (PDEs) and ordinary differential equations (ODEs). To avoid control spillover and achieve vibration control in two-dimensional, the PD (Proportional Derivative) boundary controllers in longitudinal and lateral direction are designed respectively based on the original infinite-dimensional PDEs model and Lyapunov's direct method to reduce the flexible vibrations. With the proposed PD boundary control, the real-time and robustness of control system are ensured because the proposed controller is simple and independent of system parameters. The uniform boundedness and closed-loop stability can be achieved by Lyapunov's direct method. Simulation results illustrate the effectiveness of the proposed boundary control.

Key words: flexible beam; boundary control; Lyapunov's direct method; stability

柔性梁式结构具有质量轻和能耗低等独特优势, 在现代工程等领域得到广泛应用^[1]。但因其是一类具有强耦合、非线性和时变特性的典型无穷维分布参数系统, 对其控制设计具有很大的难度, 常见

* 收稿日期: 2012-01-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(61203060); 广东省自然科学基金资助项目(S2011040005707, S2012010008462); 高等学校博士学科点专项科研基金资助项目(20120172120033)

作者简介: 邬依林(1970年生), 男, 副教授; 通讯作者: 刘屿; E-mail: aulyau@scut.edu.cn

控制方法设计都是基于其降阶模型^[2], 然而高频未建模模态将影响其性能, 产生控制溢出等问题^[3-4], 甚至导致系统不稳定。

属于主动控制范畴的边界控制方法, 因其无需分布控制器和避免了溢出现象, 近年在柔性梁式结构振动控制方面得到广泛的应用, 并取得了丰富的研究成果, 其中包括边界控制与其他一些先进控制技术的结合。文献 [5-6] 对近年边界控制的发展以及边界控制在分布参数系统中的应用进行了综述。文献 [7-8] 基于柔性结构无穷维 PDEs 模型, 设计自适应鲁棒控制器对系统振动及稳定性问题进行了研究。文献 [9] 研究了基于 Lyapunov 的柔性结构系统振动镇定问题。文献 [10] 将 Backstepping 技术和边界控制方法相结合, 研究了参数可变系统的跟踪控制问题, 而文献 [11] 采用 Backstepping 设计了边界控制器和观测器对弦线结构进行控制, 并验证了系统的指数稳定性和解的唯一性。文献 [12] 设计了鲁棒自适应边界控制方法, 对轴向移动结构振动进行控制。然而主动控制的难点在于实时性, 而复杂的控制算法通常是其实时性的最大障碍, 并且现有研究几乎都仅限于一维振动控制, 同时也忽略了执行器的阻尼或响应等不确定因素而存在的未知扰动, 以及张力变化的影响。

本文基于柔性梁无限维 PDEs 模型, 应用边界控制技术和 Lyapunov 直接法, 分别设计了简单有效的纵向和横向 PD 边界二维控制器, 用于对具有未知扰动和变张力柔性梁的振动控制。设计的 PD 控制算法克服了控制溢出问题, 同时该算法简单有效且独立于系统参数, 因此具有较好的实时性和鲁棒性。其后对梁系统的稳定性进行了数学证明, 最后给出了控制器有效性的仿真验证结果。

1 柔性梁的建模

如图 1 所示为一个典型的具有边界未知扰动和分布未知扰动柔性梁示意图, 横向控制 $U_x(L, t)$ 和纵向控制 $U_y(L, t)$ 作用于梁的右边界, 柔性梁左边界位于坐标 OXY 的原点, $w(x, t)$ 和 $v(x, t)$ 分别为在 t 时刻柔性梁位置 x 处的纵向和横向偏移量, $d_y(t)$ 和 $d_x(t)$ 分别为纵向和横向边界未知扰动, $f(x, t)$ 为作用在柔性梁上的分布未知扰动。本文考虑柔性梁式结构在分布式扰动下的小变形振动, 可将其视为 Euler-Bernoulli 梁模型, 采用 Hamilton 原理对系统进行建模。

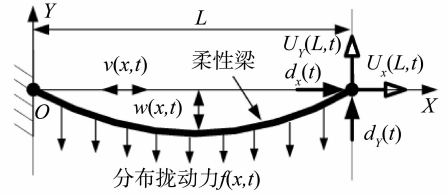


图 1 典型的分布参数柔性梁系统

Fig. 1 A typical distributed-parameter flexible beam system

注 1 为了表述简单, 在本文中将使用如下简化: $(\cdot)(x, t) = (\cdot)$, $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial x$, $(\dot{\cdot}) = \partial(\cdot)/\partial t$ 。

柔性梁系统的动能 $E_k(t)$ 可以表示为

$$E_k(t) = \frac{1}{2} m_l \int_0^L (\dot{w}^2 + \dot{v}^2) dx \quad (1)$$

其中 L 和 m_l 分别为梁的长度和单位长度的均匀质量。

由柔性梁弯曲和轴向变形导致的势能 $E_p(t)$ 为

$$E_p(t) = \frac{1}{2} EI \int_0^L w''^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L T(x, t) (w')^2 dx + \frac{1}{2} EA \int_0^L [v' + \frac{1}{2}(w')^2]^2 dx \quad (2)$$

其中, $T(x, t)$ 、 EA 和 EI 分别为梁的张力、轴向刚度和弯曲刚度。梁张力 $T(x, t)$, 即 T 可以表示为^[12]

$$T = T_0 + \lambda (w')^2 \quad (3)$$

其中, T_0 和 λ 为正常数。

边界未知扰动 $d_x(t)$ 和 $d_y(t)$ 以及分布未知扰动 $f(x, t)$ 对梁所做的功 $\delta W_f(t)$ 为

$$\delta W_f(t) = d_y(t) \delta w(L, t) + d_x(t) \delta v(L, t) + \int_0^L f(x, t) w(x, t) dx \quad (4)$$

其中, $w(L, t)$ 和 $v(L, t)$ 分别为在 t 时刻梁位置 L 处的纵向和横向偏移量。

阻尼对柔性梁所做的虚功 $\delta W_d(t)$ 可表示为

$$\delta W_d(t) = - \int_0^L (c_1 \dot{w} \delta w - c_2 \dot{v} \delta v) dx \quad (5)$$

其中, $c_1, c_2 > 0$ 分别为纵向和横向梁结构的分布阻尼参数。横向控制 $U_x(L, t)$ 和纵向控制 $U_y(L, t)$ 对梁做的功 $\delta W_c(t)$ 为

$$\delta W_c(t) = U_y(L, t) \delta w(L, t) + U_x(L, t) \delta v(L, t) \quad (6)$$

则作用于柔性梁系统的总功 $\delta W(t)$ 为

$$\delta W(t) = \delta W_f(t) + \delta W_d(t) + \delta W_c(t) \quad (7)$$

基于 Euler-Bernoulli 梁假设和小偏移性质,

Hamilton 原理允许以变分形式对运动方程求导^[13]，可得：

$$\int_{t_1}^{t_2} [\delta E_k(t) - \delta E_p(t) + \delta W(t)] dt = 0 \quad (8)$$

其中， δ 为变分操作符， t_1 和 t_2 为两个时刻， $t_1 < t_2$ 为操作时间间隔。将式 (1)、式 (2)、式 (7) 代入式 (8)，利用分部积分和变分方法，梁系统的控制方程为

$$\begin{cases} f = m_l \ddot{w} + EI w'''' - [T + 3\lambda (w')^2] w'' - T' w' + \\ c_1 \dot{w} - EA [v' w'' + v'' w' + \frac{3}{2} (w')^2 w''] , \\ 0 = m_l \ddot{v} + c_2 \dot{v} - EA (v'' + w' w'') \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\forall (x, t) \in (0, L) \times [0, +\infty)$ 。柔性梁的边界条件为

$$\begin{cases} w''(0, t) = w''(L, t) = w(0, t) = v(0, t) = 0, \\ -EI w''''(L, t) + EA v'(L, t) w'(L, t) + \\ \lambda [w'(L, t)]^3 + \\ T(L, t) w'(L, t) + \frac{1}{2} EA [w'(L, t)]^3 - \\ U_Y(L, t) = d_Y(t), \\ \frac{1}{2} EA [w'(L, t)]^2 + EA v'(L, t) - \\ U_X(L, t) = d_X(t) \end{cases} \quad (10)$$

其中 $\forall (t) \in [0, +\infty)$ 。系统相应的初始条件为 $w(x, 0) = v(x, 0) = \dot{w}(x, 0) = \dot{v}(x, 0) = 0$ (11)

假设 1 对于边界未知扰动 $d_X(t)$ 和 $d_Y(t)$ ，设存在常数 $a_1, a_2 \in \mathbf{R}^+$ ，则有 $|d_X(t)| \leq a_1$ ， $|d_Y(t)| \leq a_2$ ， $\forall (t) \in [0, +\infty)$ 。 $d_X(t)$ 和 $d_Y(t)$ 均为有限能量函数因而有界，所以此假设是合理的。

假设 2 对于分布未知扰动 $f(x, t)$ ，设存在常数 $a_3 \in \mathbf{R}^+$ ，则有 $|f(x, t)| \leq a_3$ ， $\forall (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty)$ 。 $f(x, t)$ 为有限能量函数因而有界，所以此假设是合理的。

2 控制设计

为了减小柔性梁因输入激励引起的振动，本文将设计二维 PD 边界控制器，通过控制器的控制作用，使梁的振动偏移量 $w(x, t)$ 和 $v(x, t)$ 最小化。

2.1 预备知识

为了便于边界控制器设计和柔性梁稳定性分析，本小节将列出一些引理和性质。

引理 1 令 $\varphi_1(t), \varphi_2(t) \in \mathbf{R}$ ，其中 $x \in [0,$

$L]$ ， $t \in [0, +\infty)$ ，则有如下不等式成立^[14]：

$$\begin{cases} \varphi_1 \varphi_2 \leq |\varphi_1 \varphi_2| \leq \varphi_1^2 + \varphi_2^2, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbf{R}, \\ |\varphi_1 \varphi_2| = \left| \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \varphi_1 \right) (\sqrt{\sigma} \varphi_2) \right| \leq \frac{1}{\sigma} \varphi_1^2 + \sigma \varphi_2^2, \sigma > 0 \end{cases} \quad (12)$$

引理 2 令 $\varphi(x, t) \in \mathbf{R}$ 为定义在和 $t \in [0, +\infty)$ 上的函数，且满足如下边界条件^[15]：

$$\varphi(0, t) = 0, \forall t \in [0, +\infty) \quad (13)$$

则有如下不等式成立：

$$\begin{cases} \int_0^L \varphi^2 dx \leq L^2 \int_0^L (\varphi')^2 dx, \\ \varphi^2 \leq L \int_0^L (\varphi')^2 dx, \forall x \in [0, L] \end{cases} \quad (14)$$

性质 1 若柔性梁系统的动能式 (1) 和势能式 (2) 在是有界的，则对于， $\dot{w}(x, t)$ ， $\dot{w}'(x, t)$ ， $\ddot{w}(x, t)$ ， $\dot{v}(x, t)$ ， $\dot{v}'(x, t)$ ， $\ddot{v}(x, t)$ 和 $w'(x, t)$ ， $w''(x, t)$ ， $w'''(x, t)$ ， $w''''(x, t)$ ， $v'(x, t)$ ， $v''(x, t)$ 也都是有界的^[15]。

2.2 边界控制

为使由式 (9) - (10) 所描述柔性梁系统稳定，本文设计二维 PD 边界控制律为：

$$\begin{cases} U_Y(L, t) = -k_1 \dot{w}(L, t) - k_3 w(L, t), \\ U_X(L, t) = -k_2 \dot{v}(L, t) - k_4 v(L, t) \end{cases} \quad (15)$$

注 2 二维 PD 边界控制器中所有信号均可由传感器测得或由向后差分算法获得。 $w(L, t)$ 和 $v(L, t)$ 可由梁顶端的激光位移传感器测得， $\dot{w}(L, t)$ 和 $\dot{v}(L, t)$ 可分别由 $w(L, t)$ 和 $v(L, t)$ 后向差分法得到。

设 Lyapunov 候选函数为

$$V(t) = V_1(t) + V_2(t) + V_3(t) \quad (16)$$

其中能量项 $V_1(t)$ ，交叉项 $V_2(t)$ 和附加项 $V_3(t)$ 分别为

$$\begin{cases} V_1(t) = \frac{EA}{2} \int_0^L [v' + \frac{1}{2} (w')^2]^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^L T (w')^2 dx + \\ \frac{EI}{2} \int_0^L (w'')^2 dx + \frac{m_l}{2} \int_0^L (\dot{w}^2 + \dot{v}^2) dx, \\ V_2(t) = \beta_1 m_l \int_0^L w \dot{w} dx + \beta_2 m_l \int_0^L v \dot{v} dx, \\ V_3(t) = \frac{k_3 + k_1 \beta_1}{2} [w(L, t)]^2 + \frac{k_4 + k_2 \beta_2}{2} [v(L, t)]^2 \end{cases} \quad (17)$$

其中， $\beta_1, \beta_2, k_1, k_2, k_3$ 和 k_4 均为正数。

引理 3 对于给定的 Lyapunov 候选函数式 (16) 具有如下上下界：

$$\begin{aligned} 0 \leq \vartheta_1 [V_1(t) + V_3(t)] \leq V(t) \leq \\ \vartheta_2 [V_1(t) + V_3(t)] \end{aligned} \quad (18)$$

其中, ϑ_1 和 ϑ_2 均为正权重系数。

证明 应用不等式 (12) 和式 (14), 由式 (17) 得:

$$|V_2(t)| \leq \beta_1 m_l \int_0^L \dot{w}^2 dx + \beta_1 m_l L^2 \int_0^L (w')^2 dx + \beta_2 m_l \int_0^L v^2 dx + \beta_2 m_l L^2 \int_0^L (v')^2 dx \leq \beta V_1(t) \quad (19)$$

$$\text{其中 } \beta = 2m_l \frac{\max(\beta_1, \beta_1 L^2, \beta_2, \beta_2 L^2)}{\min(m_l, EI, EA, T)}.$$

不等式 (19) 可改写为

$$-\beta V_1(t) \leq V_2(t) \leq \beta V_1(t) \quad (20)$$

适当的选择 β_3 和 β_4 , 可以得到如下等式:

$$\beta_3 = 1 - \beta > 0, \beta_4 = 1 + \beta > 1 \quad (21)$$

将式 (21) 应用于不等式 (20) 可进一步得到:

$$0 < \beta_3 V_1(t) \leq V_2(t) + V_1(t) \leq \beta_4 V_1(t) \quad (22)$$

基于 Lyapunov 函数式 (16), 再结合式 (22), 可得:

$$0 \leq \vartheta_1 [V_1(t) + V_3(t)] \leq v(t) \leq \vartheta_2 [V_1(t) + V_3(t)] \quad (23)$$

其中, $\vartheta_1 = \min[\beta_3, 0.5(k_3 + k_1\beta_1), 0.5(k_4 + k_2\beta_2)] > 0$, $\vartheta_2 = \max[\beta_4, 0.5(k_3 + k_1\beta_1), 0.5(k_4 + k_2\beta_2)] > 0$ 。证毕。

引理 4 在 PD 边界控制器式 (15) 作用下, 给定的 Lyapunov 候选函数式 (16) 对时间导数具有上界。

$$\dot{V}(t) \leq -\vartheta V(t) + \varepsilon \quad (24)$$

其中, ϑ 和 ε 均为正权重系数。

证明 对式 (16) 求时间导数, 有

$$\dot{V}(t) = \dot{V}_1(t) + \dot{V}_2(t) + \dot{V}_3(t) \quad (25)$$

其中, $V_1(t)$ 可表示为

$$V_1(t) = V_{11} + V_{12} + V_{13} + V_{14} \quad (26)$$

根据式 (17) 中第一项, 有

$$\begin{cases} V_{11} = m_l \int_0^L (\dot{w}\ddot{w} + \dot{v}\ddot{v}) dx, \\ V_{12} = EI \int_0^L w'' \dot{w}' dx, \\ V_{13} = EA \int_0^L [v' + \frac{1}{2}(w')^2] (\dot{v}' + w' \dot{w}') dx, \\ V_{14} = \int_0^L T w' \dot{w}' dx + \lambda \int_0^L \dot{w}' (w')^3 dx \end{cases} \quad (27)$$

将控制方程式 (9) 代入 V_{11} 中, 可得:

$$V_{11} = \int_0^L [-EI w'' \dot{w}' + EA v'' w' \dot{w}' + T w'' \dot{w}' + 3\lambda (w')^2 w'' \dot{w}' + T' w' \dot{w}' + f \dot{w}' +$$

$$\frac{3EA}{2} (w')^2 w'' \dot{w}' + EA v'' w'' \dot{w}' - c_1 \dot{w}'^2] dx + \int_0^L (EA v'' \dot{v}' + EA w'' w'' \dot{v}' - c_2 \dot{v}'^2) dx \quad (28)$$

应用分部积分和边界条件式 (10), V_{12} , V_{13} 和 V_{14} 可分别表示为

$$\begin{cases} V_{12} = EI \int_0^L \dot{w} w''' dx - EI w'''(L, t) \dot{w}(L, t), \\ V_{13} = EA v'(L, t) \dot{v}(L, t) + \frac{EA}{2} [w'(L, t)]^2 \dot{v}(L, t) + EA v'(L, t) w'(L, t) \dot{w}(L, t) + \frac{EA}{2} [w'(L, t)]^3 \dot{w}(L, t) - EA \int_0^L \dot{v} v'' dx - EA \int_0^L \dot{w} w' v'' dx - EA \int_0^L \dot{w} w'' v' dx - EA \int_0^L \dot{v} w' w'' dx - \frac{3EA}{2} \int_0^L \dot{w} (w')^2 w'' dx, \\ V_{14} = \{T(L, t) w'(L, t) + \lambda [w'(L, t)]^3\} \dot{w}(L, t) - \int_0^L \dot{w}' \{T w'' + T' w' + 3\lambda (w')^2 w''\} dx \end{cases} \quad (29)$$

应用边界条件式 (10), 并联合式 (28) - (29) 和不等式 (12) - (14), 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_1(t) &\leq \dot{w}(L, t) U_Y(L, t) + \dot{v}(L, t) U_X(L, t) - c_1 \int_0^L \dot{w}'^2 dx - c_2 \int_0^L \dot{v}'^2 dx + \frac{1}{\delta_1} \int_0^L f^2 dx + \\ &\delta_1 \int_0^L \dot{w}'^2 dx + d_Y(t) \dot{w}(L, t) + d_X(t) \dot{v}(L, t) \end{aligned} \quad (30)$$

其中 $\delta_1 > 0$ 。式 (25) 中 $\dot{V}_2(t)$ 可表示为

$$\dot{V}_2(t) = \dot{V}_{21} + \dot{V}_{22} + \dot{V}_{23} \quad (31)$$

根据式 (17) 中第二项, 有

$$\begin{cases} \dot{V}_{21} = \beta_1 m_l \int_0^L \dot{w} \ddot{w} dx, \\ \dot{V}_{22} = \beta_2 m_l \int_0^L \dot{v} \ddot{v} dx, \\ \dot{V}_{23} = \beta_1 m_l \int_0^L \dot{w}'^2 dx + \beta_2 m_l \int_0^L \dot{v}'^2 dx \end{cases} \quad (32)$$

将控制方程式 (9) 代入 V_{21} 中, 并应用分部积分、边界条件式 (10) 和不等式 (12) - (14), 可得:

$$\begin{aligned} \dot{V}_{21} &\leq \beta_1 w(L, t) U_Y(L, t) + \beta_1 w(L, t) d_Y(t) + \frac{\beta_1}{\delta_3} \int_0^L f^2 dx - \beta_1 \left(\frac{EA}{2} + \lambda\right) \int_0^L (w')^4 dx - \beta_1 \int_0^L T (w')^2 dx - \beta_1 EI \int_0^L (w'')^2 dx - \beta_1 EA \int_0^L (w')^2 v' dx + \frac{\beta_1 c_1}{\delta_2} \int_0^L \dot{w}'^2 dx + (\beta_1 \delta_3 L^2 + \beta_1 c_1 \delta_2 L^2) \int_0^L (w')^2 dx \end{aligned} \quad (33)$$

其中, $\delta_2, \delta_3 > 0$ 。应用上式 (33) 同样的方法, 可得

$$V_{22} \leq \beta_2 v(L, t) U_X(L, t) - \beta_2 EA \int_0^L (v')^2 dx - \frac{\beta_2 EA}{2} \int_0^L v'(w')^2 dx + \frac{\beta_2 c_2}{\delta_4} \int_0^L \dot{v}^2 dx + \beta_2 c_2 \delta_4 L^2 \int_0^L (v')^2 dx + \beta_2 v(L, t) d_X(t) \quad (34)$$

其中 $\delta_4 > 0$ 。联合式 (33) - (34) 和式 (32) 第三项, 可得

$$\begin{aligned} \dot{V}_2(t) \leq & \beta_1 w(L, t) U_Y(L, t) + \beta_2 v(L, t) U_X(L, t) + \beta_2 \left(\frac{c_2}{\delta_4} + m_l \right) \int_0^L \dot{v}^2 dx + \frac{\beta_1}{\delta_3} \int_0^L f^2 dx + \beta_1 \left(m_l + \frac{c_1}{\delta_2} \right) \int_0^L \dot{w}^2 dx - \beta_1 EI \int_0^L (w'')^2 dx - \beta_2 (EA - c_2 \delta_4 L^2) \int_0^L (v')^2 dx - \beta_1 (T_0 - c_1 \delta_2 L^2 - \delta_3 L^2) \int_0^L (w')^2 dx - \beta_1 \left(\frac{EA}{2} + 2\lambda \right) \int_0^L (w')^4 dx - \beta_1 \left(EA + \frac{\beta_2 EA}{2} \right) \int_0^L (w')^2 v' dx + \beta_1 w(L, t) d_Y(t) + \beta_2 v(L, t) d_X(t) \quad (35) \end{aligned}$$

对式 (17) 中第三项求时间导数, 可得:

$$\dot{V}_3(t) \leq (k_3 + k_1 \beta_1) w(L, t) \dot{w}(L, t) + (k_4 + k_2 \beta_2) v(L, t) \dot{v}(L, t) \quad (36)$$

将边界控制器式 (15)、式 (30)、式 (35) - (36) 代入式 (25), 有

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) \leq & -k_1 [\dot{w}(L, t)]^2 - k_3 \beta_1 [w(L, t)]^2 - k_2 [v(L, t)]^2 - k_4 \beta_2 [v(L, t)]^2 - \tau_1 \int_0^L \dot{w}^2 dx - \tau_2 \int_0^L \dot{v}^2 dx - \tau_3 \int_0^L (w'')^2 dx - \tau_4 \int_0^L (w')^4 dx - \tau_5 \int_0^L (w')^2 v' dx - \tau_6 \int_0^L (v')^2 dx - \tau_7 \int_0^L (w')^2 dx + \tau_8 \int_0^L f^2 dx + \varepsilon_1 \leq -\vartheta_3 [V_1(t) + V_3(t)] + \varepsilon_1 + \tau_8 \int_0^L f^2 dx \quad (37) \end{aligned}$$

其中, 可以通过选择恰当的参数值 $k_1, k_2, k_3, k_4, \beta_1, \beta_2, \delta_1, \delta_2, \delta_3$ 和 δ_4 满足如下条件:

$$\begin{aligned} \tau_1 = & (c_1 - \delta_1 - \beta_1 m_l - \frac{\beta_1 c_1}{\delta_2}) > 0, \tau_2 = (c_2 - \frac{\beta_2 c_2}{\delta_4} - \beta_2 m_l) > 0, \\ \tau_3 = & \beta_1 EA > 0, \tau_4 = (\frac{\beta_1 EA}{2} + 2\lambda \beta_1) > 0, \\ \tau_5 = & (\beta_1 EA + \frac{\beta_2 EA}{2}) > 0, \tau_6 = (\beta_2 EA - \beta_2 c_2 \delta_4 L^2) > 0, \\ \tau_7 = & (\beta_1 T_0 - \beta_1 c_1 \delta_2 L^2 - \beta_1 \delta_3 L^2) > 0, \end{aligned}$$

$$\tau_8 = (\frac{\beta_1}{\delta_3} + \frac{1}{\delta_1}) > 0,$$

$$\tau_9 = \max |[\beta_1 w(L, t) + \dot{w}(L, t)] d_Y(t)|,$$

$$\tau_{10} = \max |[\beta_2 v(L, t) + \dot{v}(L, t)] d_X(t)|,$$

$$\varepsilon_1 = \tau_9 + \tau_{10}, \vartheta_3 = \min(\frac{2\tau_1}{m_l}, \frac{2\tau_2}{m_l}, \frac{2\tau_3}{EI}, \frac{8\tau_4}{EA + 4\lambda},$$

$$\frac{2\tau_5}{EA}, \frac{2\tau_6}{EA}, \frac{2\tau_7}{T_0}, k_3 \beta_1, k_4 \beta_2)$$

结合式 (23) 和式 (37), 可得出式 (24) 的证明结果

$$\dot{V}(t) \leq -\vartheta V(t) + \varepsilon \quad (38)$$

其中, $\vartheta = (\frac{\vartheta_3}{\vartheta_2}) > 0, \varepsilon = \varepsilon_1 + \tau_8 a_3^2 L$ 。证毕。

根据上述引理, 可推导出下列闭环柔性梁系统的稳定性定理。

定理 1 式 (9) - (10) 所描述的柔性梁系统, 在边界控制器式 (15) 作用下, 有如下关系式成立:

① 一致有界: 闭环柔性梁的状态量 $w(x, t)$ 和 $v(x, t)$ 一致包含于紧集 Ω_1 中:

$$\begin{aligned} \Omega_1 := & \{w(x, t), v(x, t) \in R \mid |w(x, t)| \leq \chi_1, \\ & |v(x, t)| \leq \chi_2, \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty]\} \quad (39) \end{aligned}$$

其中, $\chi_1 = \sqrt{\frac{2L}{T_0 \vartheta_1} [V(0) + \frac{\varepsilon}{\vartheta}]}, \chi_2 = \sqrt{\frac{2L}{EA \vartheta_1} [V(0) + \frac{\varepsilon}{\vartheta}]}$ 。

② 指数稳定: 在无边界和分布未知扰动情况下, 闭环柔性梁状态量 $w(x, t)$ 和 $v(x, t)$ 一致包含于紧集 Ω_2 中:

$$\begin{aligned} \Omega_2 := & \{w(x, t), v(x, t) \in R \mid |w(x, t)| \leq \chi_3, \\ & |v(x, t)| \leq \chi_4, \forall (x, t) \in [0, L] \times [0, +\infty]\} \quad (40) \end{aligned}$$

其中, $\chi_3 = \sqrt{\frac{2L}{T_0 \vartheta_1} [V(0) e^{-\vartheta t}]}, \chi_4 = \sqrt{\frac{2L}{EA \vartheta_1} [V(0) e^{-\vartheta t}]}$ 。

证明 将不等式 (38) 左右同时乘以 $e^{\vartheta t}$, 可得

$$\begin{aligned} V(t) e^{\vartheta t} \leq & -\vartheta V(t) e^{\vartheta t} + \varepsilon e^{\vartheta t} \Rightarrow \frac{d}{dt} [V(t) e^{\vartheta t}] \leq \varepsilon e^{\vartheta t} \quad (41) \end{aligned}$$

对不等式 (41) 积分, 可得

$$\begin{aligned} V(t) \leq & [V(0) - \frac{\varepsilon}{\vartheta}] e^{-\vartheta t} + \frac{\varepsilon}{\vartheta} \leq V(0) e^{-\vartheta t} + \frac{\varepsilon}{\vartheta} \quad (42) \end{aligned}$$

其中, 上式 (42) 表明 $V(t)$ 是有界的。

由式 (17) 第一项, 并结合式 (14) 和式

(23), 可得

$$\begin{cases} \frac{T_0}{2L} w^2 \leq \frac{T_0}{2} \int_0^L (w')^2 dx \leq V_1(t) \leq \\ [V_1(t) + V_3(t)] \leq \frac{1}{\vartheta_1} V(t), \\ \frac{EA_0}{2L} v^2 \leq \frac{EA_0}{2} \int_0^L (v')^2 dx \leq V_2(t) \leq \\ [V_1(t) + V_3(t)] \leq \frac{1}{\vartheta_1} V(t) \end{cases} \quad (43)$$

根据不等式 (42) - (43), 可得出如下结论:

$$\begin{cases} |w(x,t)| \leq \sqrt{\frac{2L}{T_0 \vartheta_1} [V(0)e^{-\vartheta t} + \frac{\varepsilon}{\vartheta}]} \leq \\ \sqrt{\frac{2L}{T_0 \vartheta_1} [V(0) + \frac{\varepsilon}{\vartheta}]} = \chi_1, \\ |v(x,t)| \leq \sqrt{\frac{2L}{EA \vartheta_1} [V(0)e^{-\vartheta t} + \frac{\varepsilon}{\vartheta}]} \leq \\ \sqrt{\frac{2L}{EA \vartheta_1} [V(0) + \frac{\varepsilon}{\vartheta}]} = \chi_2 \end{cases} \quad (44)$$

其中 $\forall (x,t) \in [0,L] \times [0, +\infty)$.

当边界未知扰动和分布未知扰动均不存在情况下, 即式 (38) 中 $\varepsilon = 0$, 由式 (44), 可得:

$$\begin{cases} |w(x,t)| \leq \sqrt{\frac{2L}{T_0 \vartheta_1} [V(0)e^{-\vartheta t}]} = \chi_3, \\ |v(x,t)| \leq \sqrt{\frac{2L}{EA \vartheta_1} [V(0)e^{-\vartheta t}]} = \chi_4 \end{cases} \quad (45)$$

其中 $\forall (x,t) \in [0,L] \times [0, +\infty)$. 证毕。

注 3 对于 $\forall (x,t) \in [0,L] \times [0, +\infty)$, 由式 (43) 可知 $V_1(t)$ 有界, 所以 $\dot{w}(x,t), \dot{v}(x,t), w'(x,t), v'(x,t)$ 和 $w''(x,t)$ 有界, 由性质 1 可知 $\dot{w}(x,t), \dot{w}'(x,t), \dot{w}''(x,t), \dot{v}(x,t), \dot{v}'(x,t), \dot{v}''(x,t), w'''(x,t), w''''(x,t), v''(x,t)$ 有界, 再由假设 1 和系统模型式 (9) - (10) 可知 $\ddot{w}(x,t)$ 和 $\ddot{v}(x,t)$ 有界. 因此, 由以上证明和分析得出, 柔性梁振动偏移量一致有界。

注 4 因 $\dot{w}(x,t), \dot{v}(x,t), w(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 有界, 所以本文设计的控制器式 (15) 也有界。

3 仿真研究

本文以具有未知扰动和变张力柔性梁为对象, 对其振动进行二维振动控制仿真研究, 验证所设计 PD 控制律式 (15) 的有效性, 柔性梁初始状态为静止. 式 (46) 给出了纵向和横向边界未知扰动 $d_y(t)$ 和 $d_x(t)$, 式 (47) 给出了作用在柔性梁上的分布未知扰动 f , 即 $f(x,t)$. 表 1 为柔性梁系统的相关参数.

$$d_y(t) = d_x(t) = 1 + 0.1 \sin(0.1t) + 0.3 \sin(0.3t) + 0.5 \sin(0.5t) \quad (46)$$

$$f = [3 + \sin(\pi x t) + \sin(2\pi x t) + \sin(3\pi x t)] x \quad (47)$$

表 1 柔性梁系统的相关参数

Table 1 Parameters of the flexible beam

参数	参数值	参数	参数值	参数	参数值	参数	参数值
EI	10Nm ²	c_2	5Ns/m ²	L	10 m	T_0	50N
EA	1 000N	c_1	5Ns/m ²	m_l	1 Kg/m	λ	10

本文给出了柔性梁振动控制的四种验证结果:

- ① 无控制输入情况下柔性梁的振动偏移 $w(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 仿真研究结果, 见图 2;
- ② 仅有横向控制输入情况下柔性梁的振动偏移 $w(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 仿真研究结果, 见图 3;
- ③ 仅有纵向控制输入情况下柔性梁的振动偏移 $w(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 仿真研究结果, 见图 4;
- ④ 同时具有横向和纵向控制输入情况下柔性梁的振动偏移 $w(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 仿真研究结果, 见图 5。

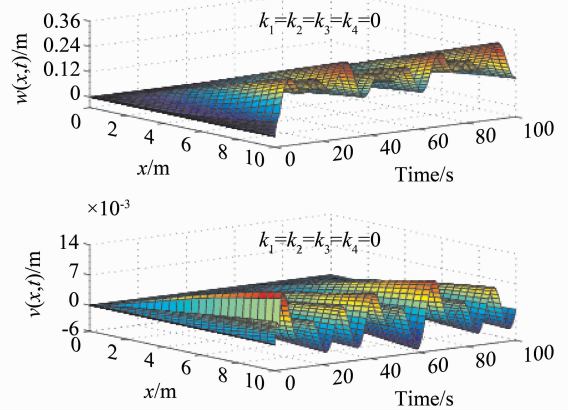


图 2 无控制作用时梁的偏移量

Fig. 2 Displacements of beam without control

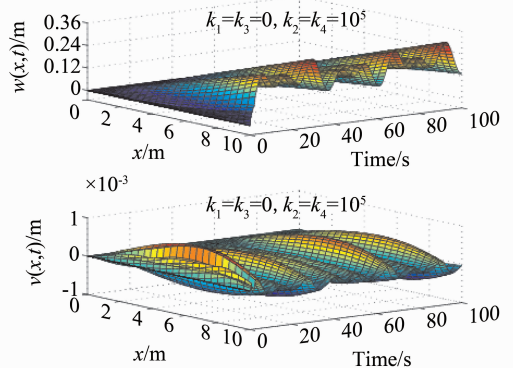


图 3 仅有横向控制作用梁的偏移量

Fig. 3 Displacements of beam with transverse control

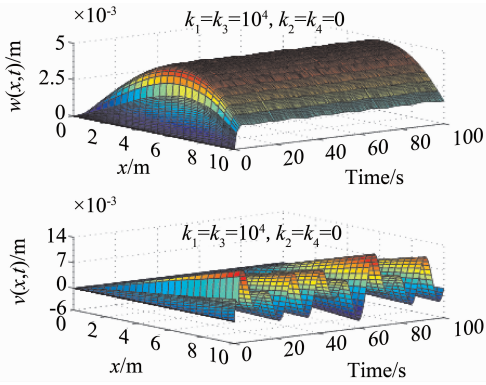


图 4 仅有纵向控制作用梁的偏移量

Fig. 4 Displacements of beam with longitudinal control

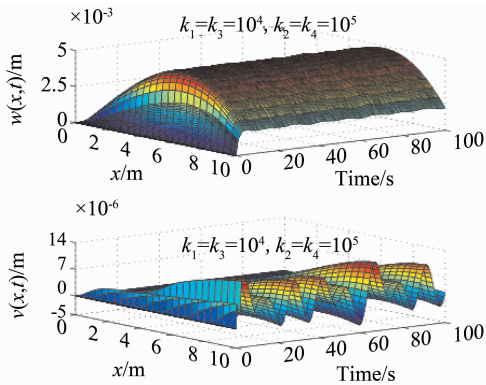


图 5 纵向和横向控制作用梁的偏移量

Fig. 5 Displacements of beam with both transverse and longitudinal control

注 5 为保证仿真精度，仿真中的时间和距离步长都很小，直接导致仿真结果数据非常大，计算机无法显示所有数据。因而，三维图 2 - 图 5 是取其中每隔一秒的数据绘制的。

图 6 和图 7 分别给出了柔性梁中部 ($x = 5 \text{ m}$) 和右边界 ($x = 10 \text{ m}$) 处的振动偏移量变化情况对比结果。图 8 则给出了纵向控制 $U_y(t)$ 和横向控制 $U_x(t)$ 的变化情况。由仿真结果图 2 - 图 8 可得如下结论：

① 由仿真结果图 2 - 图 7 可知，当将本文设计的二维 PD 边界控制器式 (15) 应用于柔性梁的振动控制时，在上述四种情况下梁的振动都有十分显著的减弱，偏移量 $w(x,t)$ 和 $v(x,t)$ 都有数百倍至数千倍的减少，表明本文设计的二维 PD 控制算法对抑制柔性梁的纵向和横向振动都十分有效。

② 由仿真结果图 6 和图 7 可知，虽然在柔性梁中部 ($x = 5 \text{ m}$) 并未布置控制器，但柔性梁中部的振动也有十分显著的减弱（控制后偏移量非常接近于零），体现了边界控制方法在柔性梁振动控制方面的独特优势。在柔性梁右边界 ($x = 10 \text{ m}$)

处，加入控制后，梁振动偏移已几乎为零，也验证了所设计控制算法的有效性。

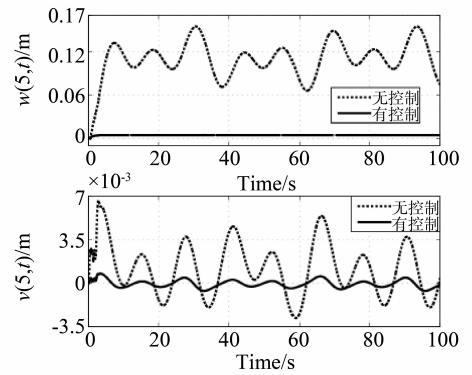


图 6 有无控制作用时梁在 $x = 5 \text{ m}$ 处偏移量

Fig. 6 Displacement of beam at $x = 5 \text{ m}$ with or without control

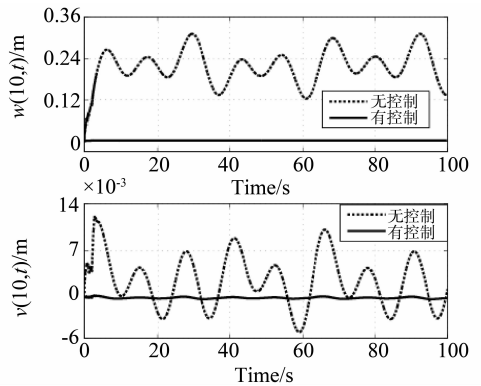


图 7 有无控制作用时梁在 $x = 10 \text{ m}$ 处偏移量

Fig. 7 Displacement of beam at $x = 10 \text{ m}$ with or without control

③ 由图 8 可知，系统纵向控制输入范围为 $-12 \sim 36 \text{ N}$ ，横向控制输入范围为 $-250 \sim 250 \text{ N}$ ，而正的纵向控制输入表明纵向控制作用力与作用力 $f(x,t)$ 反向。

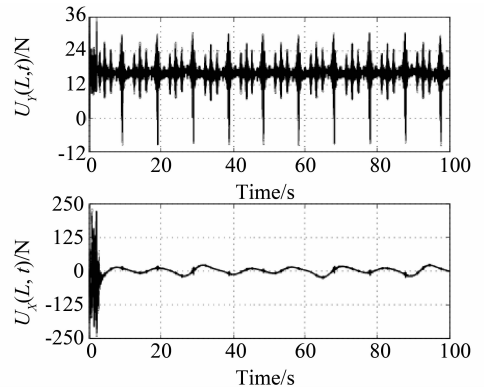


图 8 纵向和横向控制输入

Fig. 8 Control input $U_y(L, t)$ and $U_x(L, t)$

4 结 语

本文研究了具有未知扰动和变张力柔性梁的二维振动控制问题。基于柔性梁原始无穷维分布参数 PDEs 模型, 结合边界控制技术和 Lyapunov 直接法, 设计了纵向和横向二维控制器用以抑制柔性梁的振动, 避免了基于截断模型而导致的稳定性等问题, 应用设计的控制方法, 柔性梁的振动得到很好的抑制, 且系统的指数稳定性和一致有界性得以保证。本文设计的控制器在本质上具有 PD 控制器特性, 因而控制实施简单有效且独立于柔性梁系统参数, 因此具有较好的实时性和鲁棒性。最后对所设计控制方法的有效性进行了仿真验证。

参考文献:

- [1] 谢卓伟, 石明礼, 王斌, 等. 气动驱动的移动柔性臂振动控制[J]. 华南理工大学学报: 自然科学版, 2011, 39(4): 62-65.
- [2] 马天兵, 裘进浩, 季宏丽, 等. 基于鲁棒模型参考控制器的智能结构振动主动控制研究[J]. 振动与冲击, 2012, 31(7): 14-18.
- [3] BALAS M J. Feedback control of flexible systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 1978, 23(4): 673-679.
- [4] MEIROVITCH L, BARUH H. On the problem of observation spillover in self-adjoint distributed systems [J]. Journal of Optimization Theory and Applications, 1983, 39(2): 269-291.
- [5] BELISHEV M. Recent progress in the boundary control method [J]. Inverse Problems, 2007, 23(5): R1-R64.
- [6] QUEIROZ M S, RAHN C D. Boundary control of vibration and noise in distributed parameter systems: An overview [J]. Mechanical Systems and Signal Processing, 2002, 16(1): 19-38.
- [7] 吴忻生, 邓军. 末端有未知扰动的分布参数柔性机械臂的鲁棒边界控制[J]. 控制理论与应用, 2011, 28(4): 511-518.
- [8] LEE T H, GE S S, WANG Z. Adaptive robust controller design for multi-link flexible robots [J]. Mechatronics, 2001, 11(8): 951-967.
- [9] SMYSHLYAEV A, CERPA E, KRSTIC M. Boundary stabilization of a 1-D wave equation with in-domain anti-dumping [J]. Journal of Control and Optimization, 2010, 48(6): 4014-4031.
- [10] MEURER T, KUGI A. Tracking control for boundary controlled parabolic PDEs with varying parameters: Combining backstepping and differential flatness [J]. Automatica, 2009, 45(5): 1182-1194.
- [11] KRSTIC M, GUO B, BALOGH A, et al. Output-feedback stabilization of an unstable wave equation [J]. Automatica, 2008, 44(1): 63-74.
- [12] QU Z. Robust and adaptive boundary control of a stretched string on a moving transporter [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2001, 46(3): 470-476.
- [13] GOLDSTEIN H, POOLE C P, SAFKO J L. Classical mechanics [M]. New York: Addison Wesley Press, 1951.
- [14] RAHN C D. Mechanronic control of distributed noise and vibration [M]. New York: Springer, 2001.
- [15] QUEIROZ M S, DAWSON D M, NAGARKATTI S P, et al. Lyapunov based control of mechanical systems [M]. Boston: Birkhauser, 2000.