第 53 卷 第 1 期 2014 年 1 月
中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol. 53 No. 1 Jan. 2014

拟线性分数阶高阶脉冲微分方程边值问题解的存在性*

杨 军[1,2]，刘东利[1]，张 波[1]
（1. 燕山大学理学院，河北 秦皇岛 066004；
2. 河北省数学研究所，河北 石家庄 050000）

摘 要：研究了以下一类拟线性分数阶高阶脉冲微分方程边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^q y(t) = A(t,y)y(t) + f(t,y(t),\Phi y(t),\Psi y(t)), \forall t \in [0,1], q \in (n-1,n], \\ y^{(i)}(0) = 0, \Delta y^{(i)}\big|_{t=t_k} = 0, 1 \leqslant i \leqslant n-2, k = 1,2,\cdots,p, \\ \Delta y\big|_{t=t_k} = I_k(y(t_k)), \Delta y^{(n-1)}\big|_{t=t_k} = J_k(y(t_k)), k = 1,2,\cdots,p, \\ y(0) = y_0 + g(y), y^{(n-1)}(1) = y_1 + \sum_{j=1}^{m-2} b_j y^{(n-1)}(\xi_j) \end{cases}$$

解的存在性。通过定义一个压缩映射并利用 Banach 不动点定理和 Krasnoselskii's 不动点定理，得到了边值问题存在唯一解和至少存在一个解的充分条件，最后分别给出一个例子来验证主要结果。

关键词：分数阶微分方程；高阶；脉冲；Caputo 分数阶导数；不动点定理
中图分类号：O175.8 **文献标志码**：A **文章编号**：0529－6579（2014）01－0034－08

Existence of Solutions for High-order Impulsive Boundary Value Problem of Quasilinear Fractional Differential Equation

YANG Jun[1,2], *LIU Dongli*[1], *ZHANG Bo*[1]
(1. College of Science, Yanshan University, Qinhuangdao 066004, China;
2. Mathematics Research Center in Hebei Province, Shijiazhuang 050000, China)

Abstract: The existence of solutions for high-order impulsive boundary value problem of Caputo fractional differential equation in the form

$$\begin{cases} D_{0^+}^q y(t) = A(t,y)y(t) + f(t,y(t),\Phi y(t),\Psi y(t)), \forall t \in [0,1], q \in (n-1,n], \\ y^{(i)}(0) = 0, \Delta y^{(i)}\big|_{t=t_k} = 0, 1 \leqslant i \leqslant n-2, k = 1,2,\cdots,p, \\ \Delta y\big|_{t=t_k} = I_k(y(t_k)), \Delta y^{(n-1)}\big|_{t=t_k} = J_k(y(t_k)), k = 1,2,\cdots,p, \\ y(0) = y_0 + g(y), y^{(n-1)}(1) = y_1 + \sum_{j=1}^{m-2} b_j y^{(n-1)}(\xi_j) \end{cases}$$

is studied. By defining a contraction mapping and using the fixed point theorems, some sufficient conditions for the existence of one unique solution and at least a solution are established. Further, two examples are presented to illustrate the main results respectively.

Key words: fractional differential equations; high-order; impulsive; Caputo fractional derivative; fixed point theorems

* **收稿日期**：2013－04－16
基金项目：国家自然科学基金资助项目（60604004）；河北省应用基础研究计划重点基础研究资助项目（13961806D）；秦皇岛市科技支撑计划资助项目（201001A037，201101A168）
作者简介：杨军（1964 年生），女；**研究方向**：分数阶微分方程；**通讯作者**：刘东利；E-mail：liudongli1029@126.com

分数阶微分方程在诸多领域比如流体力学、粘弹性力学、分数阶控制器、多空结构以及电磁模型等的应用中具有重要的理论意义和学术价值[1-2]。特别地，由于近代科学技术的发展，脉冲分数阶微分方程也逐渐成为物理，化学，生物和社会科学中必不可少的数学工具[3-6]。近些年来，随着对分数阶微积分研究的不断深入[7-11]，其研究内容更加系统和广泛，如对于分数阶微分方程边值问题的研究思想和高阶分数阶微分方程的研究成果更为丰富。

2010 年田元生等[12]研究了非线性分数阶 $q(q\in(1,2])$ 阶脉冲微分方程边值问题

$$\begin{cases} {}^{C}D^{q}u(t)=f(t,u(t)),0<t<1,t\neq t_k, \\ k=1,2,\cdots,p, \\ \Delta u|_{t=t_k}=I_k(u(t_k)),\Delta u'|_{t=t_k}=\bar{I}_k(u(t_k)), \\ k=1,2,\cdots,p, \\ u(0)+u'(0)=0,u(1)+u'(\xi)=0 \end{cases}$$

解的存在性，其中 ${}^{C}D^{q}$ 是 Caputo 分数阶导数。这里 $f:[0,1]\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续函数，$I_k,\bar{I}_k:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\xi\in(0,1),\xi\neq t_k,k=1,2,\cdots,p$，并且 $\Delta u|_{t=t_k}=u(t_k^+)-u(t_k^-),\Delta u'|_{t=t_k}=u'(t_k^+)-u'(t_k^-),0=t_0<t_1<\cdots<t_p<t_{p+1}=1,k=1,2,\cdots,p$。

2011 年王旭焕[13]研究了如下非线性分数阶高阶脉冲微分方程

$$\begin{cases} {}^{C}D_{t_i}^{q}u(t)=f(t,u(t)),n-1<q\leqslant n, \\ \quad t\in J_i=(t_i,t_{i+1}], \\ \Delta u^{(j)}(t_k)=I_{j,k}(u(t_k))(j=0,1,\cdots,n-1), \\ \quad k=1,2,\cdots,p, \\ u^{(j)}(0)=u_j(j=0,1,\cdots,n-1) \end{cases}$$

解的存在性，其中 ${}^{C}D^{q}$ 是 Caputo 分数阶导数。

受到上述研究成果的启发，由此联想到拟线性分数阶高阶脉冲微分方程边值问题的解在适当的条件下就会存在。本文主要是利用不动点定理给出方程解的存在性的一些充分条件。

1　必要准备

本节主要介绍一些文中会用到的定义，定理以及预备知识。

定义 1　函数 $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 的 $q>0$ 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分定义为

$$I_{0^+}^{q}f(t)=\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}f(s)\mathrm{d}s$$

定义 2　连续函数 $f:[0,+\infty)\to\mathbf{R}$ 的 $q>0$ 阶 Caputo 分数阶导数定义为

$$D_{0^+}^{q}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-q)}\int_0^t(t-s)^{n-q-1}f^{(n)}(s)\mathrm{d}s,$$
$$n-1<q\leqslant n$$

引理 1（Banach 不动点定理）设 E 是 Banach 空间 X 的非空闭子集，$T:E\to E$ 为 E 上的压缩映射，则 T 有唯一的不动点 $x\in E$，使得 $Tx=x$。

引理 2　如果 $q>0$，且 $y\in C(0,1)\cap L(0,1),D_{0^+}^{q}y\in C(0,1)\cap L(0,1)$，则存在 $c_i\in\mathbf{R},i=0,1,2,\cdots,n-1,n=[q]+1$，使得

$$I_{0^+}^{q}D_{0^+}^{q}y(t)=y(t)+c_0+c_1t+c_2t^2+\cdots+c_{n-1}t^{n-1}$$

2　主要结果

如果 $J=[0,1],J_0=[0,t_1],J_k=(t_k,t_{k+1}],k=1,2,\cdots,p,J'=J\setminus\{t_1,t_2,\cdots,t_p\}$，并且 $C(J,\mathbf{R})$ 是连续函数 $x(t)$ 的 Banach 空间，且 $\|x\|_{C(J,\mathbf{R})}=\max_{t\in J}\|x(t)\|$。$B(\mathbf{R})$ 表示有界线性算子的 Banach 空间，且范数

$$\|A\|_{B(\mathbf{R})}=\sup\{\|A(z)\|:\|z\|=1\}$$

如果 $PC(J,\mathbf{R})=\{y:J\to\mathbf{R}\mid y\in C(J_k)$，且 $y(t_k^+),y(t_k^-)$ 存在$,k=0,1,\cdots,p\}$，显然 $PC(J,\mathbf{R})$ 是 Banach 空间，且范数

$$\|y\|=\sup_{t\in J}|y(t)|$$

定理 1　假设 $z(t)\in C[0,1]$，考虑如下线性分数阶高阶脉冲微分方程边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{q}y(t)+z(t)=0,0\leqslant t\leqslant 1, \\ \quad q\in(n-1,n],t\in J', \\ y^{(i)}(0)=0,\Delta y^{(i)}|_{t=t_k}=0,1\leqslant i\leqslant n-2, \\ \quad k=1,2,\cdots,p, \\ \Delta y|_{t=t_k}=I_k(y(t_k)),\Delta y^{(n-1)}|_{t=t_k}=J_k(y(t_k)), \\ \quad k=1,2,\cdots,p, \\ y(0)=y_0+g(y),y^{(n-1)}(1)=y_1+\sum_{j=1}^{m-2}b_jy^{(n-1)}(\xi_j) \end{cases}\tag{1}$$

这里 $y_0,y_1\in\mathbf{R},b_j\geqslant 0,0<\xi_j<1,j=1,2,\cdots,m-2,d=\sum_{j=1}^{m-2}b_j<1$，且 $D_{0^+}^{q}$ 是 Caputo 分数阶导数。为了方便，记 $\Sigma=\{(t,s):0\leqslant s\leqslant t\leqslant 1\}$，令

$$\Phi y(t)=\int_0^t\varphi(t,s,y(s))\mathrm{d}s,$$

$$\Psi y(t)=\int_0^t\psi(t,s,y(s))\mathrm{d}s$$

则边值问题（1）的唯一解是

$$y(t)=$$

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{\Gamma(q)}\displaystyle\int_0^t(t-s)^{q-1}z(s)\mathrm{d}s+c_1+\dfrac{c_{n-1}}{(n-1)!}t^{n-1},t\in J_0;\\ \begin{aligned}&-\dfrac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_1}^t(t-s)^{q-1}z(s)\mathrm{d}s-\dfrac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}z(s)\mathrm{d}s-\\&\quad\dfrac{(t-t_1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-n}z(s)\mathrm{d}s+\\&\quad\dfrac{(t-t_1)^{n-1}}{(n-1)!}J_1(y(t_1))+I_1(y(t_1))+c_1+\\&\quad\dfrac{c_{n-1}}{(n-1)!}[t_1^{n-1}+(t-t_1)^{n-1}],t\in J_1;\end{aligned}\\ \begin{aligned}&-\dfrac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_k}^t(t-s)^{q-1}z(s)\mathrm{d}s-\dfrac{1}{\Gamma(q)}\sum_{i=1}^k\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-1}z(s)\mathrm{d}s-\\&\quad\dfrac{(t-t_k)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\sum_{i=1}^k\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-n}z(s)\mathrm{d}s-\\&\quad\dfrac{\sum\limits_{i=2}^k\sum\limits_{j=i-1}^{k-1}(t_{j+1}-t_j)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\int_{t_{i-2}}^{t_{i-1}}(t_{i-1}-s)^{q-n}z(s)\mathrm{d}s+\\&\quad\dfrac{(t-t_k)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{i=1}^kJ_i(y(t_i))+\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k-1}\sum\limits_{j=i}^{k-1}(t_{j+1}-t_j)^{n-1}}{(n-1)!}J_i(y(t_i))+\\&\quad\sum_{i=1}^kI_i(y(t_i))+c_1+\dfrac{c_{n-1}}{(n-1)!}[(t-t_k)^{n-1}+\\&\quad\sum_{i=1}^k(t_i-t_{i-1})^{n-1}],t\in J_k,k=2,3,\cdots,p\end{aligned}\end{cases}\tag{2}$$

其中

$$c_1=g_0+g(y),$$

$$\begin{aligned}c_{n-1}=&\frac{1}{(1-d)\Gamma(q-n+1)}\int_{t_p}^1(1-s)^{q-n}z(s)\mathrm{d}s+\\&\frac{1}{\Gamma(q-n+1)}\sum_{i=1}^p\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-n}z(s)\mathrm{d}s-\\&\frac{1}{(1-d)\Gamma(q-n+1)}\sum_{j=1}^{m-2}b_j\int_{t_p}^{\xi_j}(\xi_j-s)^{q-n}z(s)\mathrm{d}s-\\&\sum_{i=1}^pJ_i(y(t_i))+\frac{y_1}{1-d}\end{aligned}$$

证明 由边值条件 $y'(0)=y''(0)=\cdots=y^{(n-2)}(0)=0$ 和方程

$$D_{0^+}^qy(t)+z(t)=0,t\in[0,1]\tag{3}$$

可得

$$y(t)=-\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}z(s)\mathrm{d}s+y(0)+\frac{y^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}t^{n-1}$$

假设 $y(t)$ 是满足边值条件 $y'(0)=y''(0)=\cdots=y^{(n-2)}(0)=0$ 的（3）式的解，对于 $c_1,c_{n-1}\in\mathbf{R}$ 有

$$y(t)=-\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^t(t-s)^{q-1}z(s)\mathrm{d}s+c_1+\frac{c_{n-1}}{(n-1)!}t^{n-1},t\in J_0\tag{4}$$

则

$$y^{(n-1)}(t)=-\frac{1}{\Gamma(q-n+1)}\int_0^t(t-s)^{q-n}z(s)\mathrm{d}s+c_{n-1}$$

如果 $t\in J_1=(t_1,t_2]$，对于 $d_1,d_{n-1}\in\mathbf{R}$ 有

$$y(t)=-\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_1}^t(t-s)^{q-1}z(s)\mathrm{d}s+d_1+\frac{d_{n-1}}{(n-1)!}(t-t_1)^{n-1}$$

则

$$y^{(n-1)}(t)=-\frac{1}{\Gamma(q-n+1)}\int_{t_1}^t(t-s)^{q-n}z(s)\mathrm{d}s+d_{n-1}$$

于是

$$y(t_1^-)=-\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}z(s)\mathrm{d}s+c_1+\frac{c_{n-1}}{(n-1)!}t_1^{n-1},y(t_1^+)=d_1;$$

$$y^{(n-1)}(t_1^-)=-\frac{1}{\Gamma(q-n+1)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-n}z(s)\mathrm{d}s+c_{n-1},y^{(n-1)}(t_1^+)=d_{n-1}$$

考虑到

$$\Delta y|_{t=t_1}=y(t_1^+)-y(t_1^-)=I_1(y(t_1)),$$

$$\Delta y^{(n-1)}|_{t=t_1}=y^{(n-1)}(t_1^+)-y^{(n-1)}(t_1^-)=J_1(y(t_1))$$

有

$$d_1=-\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}z(s)\mathrm{d}s+c_1+\frac{c_{n-1}}{(n-1)!}t_1^{n-1}+I_1(y(t_1));$$

$$d_{n-1}=-\frac{1}{\Gamma(q-n+1)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-n}z(s)\mathrm{d}s+c_{n-1}+J_1(y(t_1))$$

因此可得

$$\begin{aligned}y(t)=&-\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_1}^t(t-s)^{q-1}z(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-1}z(s)\mathrm{d}s-\\&\frac{(t-t_1)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\int_0^{t_1}(t_1-s)^{q-n}z(s)\mathrm{d}s+\\&\frac{(t-t_1)^{n-1}}{(n-1)!}J_1(y(t_1))+I_1(y(t_1))+\\&c_1+\frac{c_{n-1}}{(n-1)!}[t_1^{n-1}+(t-t_1)^{n-1}],t\in J_1\end{aligned}$$

重复进行上述步骤，当 $t\in J_k=(t_k,t_{k+1}]$ 时，容易推出

$$\begin{aligned}y(t)=&-\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_k}^t(t-s)^{q-1}z(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{\Gamma(q)}\sum_{i=1}^k\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-1}z(s)\mathrm{d}s-\\&\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\sum_{i=1}^k\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-n}z(s)\mathrm{d}s-\end{aligned}$$

$$\frac{\sum_{i=2}^{k}\sum_{j=i-1}^{k-1}(t_{j+1}-t_j)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\int_{t_{i-2}}^{t_{i-1}}(t_{i-1}-s)^{q-n}z(s)\mathrm{d}s+$$

$$\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{k}J_i(y(t_i))+\frac{\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i}^{k-1}(t_{j+1}-t_j)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot$$

$$J_i(y(t_i))+\sum_{i=1}^{k}I_i(y(t_i))+c_1+$$

$$\frac{c_{n-1}}{(n-1)!}[(t-t_k)^{n-1}+\sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})^{n-1}],$$

$$t\in J_k,k=2,3,\cdots,p$$

根据边值条件 $y(0)=y_0+g(y)$，显然得

$$c_1=y_0+g(y) \tag{5}$$

又由 Caputo 分数阶导数的性质有

$$y^{(n-1)}(t)=-\frac{1}{\Gamma(q-n+1)}\int_{t_p}^{t}(t-s)^{q-n}z(s)\mathrm{d}s-$$

$$\frac{1}{\Gamma(q-n+1)}\sum_{i=1}^{p}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-n}z(s)\mathrm{d}s+$$

$$\sum_{i=1}^{p}J_i(y(t_i))+c_{n-1}$$

结合边值条件 $y^{(n-1)}(1)=y_1+\sum_{j=1}^{m-2}b_jy^{(n-1)}(\xi_j)$ 易得

$$c_{n-1}=\frac{1}{(1-d)\Gamma(q-n+1)}\int_{t_p}^{1}(1-s)^{q-n}z(s)\mathrm{d}s+$$

$$\frac{1}{\Gamma(q-n+1)}\sum_{i=1}^{p}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-n}z(s)\mathrm{d}s-$$

$$\frac{1}{(1-d)\Gamma(q-n+1)}\sum_{j=1}^{m-2}b_j\int_{t_p}^{\xi_j}(\xi_j-s)^{q-n}z(s)\mathrm{d}s-$$

$$\sum_{i=1}^{p}J_i(y(t_i))+\frac{y_1}{1-d} \tag{6}$$

其中 $d=\sum_{j=1}^{m-2}b_j$。把（5）式和（6）式分别代入（4）式，即可得（2）式。证毕。

现在考虑拟线性分数阶高阶脉冲微分方程边值问题

$$\begin{cases} D_{0^+}^{q}y(t)=A(t,y)y(t)+f(t,y(t),\Phi y(t),\Psi y(t)), \\ \quad 0\leqslant t\leqslant 1,q\in(n-1,n],t\in J', \\ y^{(i)}(0)=0,\Delta y^{(i)}|_{t=t_k}=0,1\leqslant i\leqslant n-2, \\ \quad k=1,2,\cdots,p, \\ \Delta y|_{t=t_k}=I_k(y(t_k)),\Delta y^{(n-1)}|_{t=t_k}=J_k(y(t_k)), \\ \quad k=1,2,\cdots,p, \\ y(0)=y_0+g(y),y^{(n-1)}(1)=y_1+\sum_{j=1}^{m-2}b_jy^{(n-1)}(\xi_j) \end{cases} \tag{7}$$

解的存在性，其中 $A(t,y)$ 是 $\mathbf{R}$ 上的有界线性算子，$D_{0^+}^{q}$ 是 Caputo 分数阶导数，且函数 $f:J\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$；$\varphi,\psi:\Sigma\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 均是连续函数。

为了证明方程（7）的解的存在性，我们假设下列条件成立：

（H_1）对于函数 f，存在一个常数 $L>0$，则对于所有的 $x,y\in\mathbf{R}$ 有

$$\|f(t,x(t),\Phi(x(t)),\Psi(x(t)))-f(t,y(t),\Phi(y(t)),\Psi(y(t)))\|\leqslant L(\|x-y\|+\|\Phi x-\Phi y\|+\|\Psi x-\Psi y\|)$$

（H_2）函数 φ,ψ 是连续的，且存在正常数 L_1,L_2，对于所有的 $x,y\in\mathbf{R}$ 有

$$\|\varphi(t,s,x)-\varphi(t,s,y)\|\leqslant L_1\|x-y\|,$$

$$\|\psi(t,s,x)-\psi(t,s,y)\|\leqslant L_2\|x-y\|$$

（H_3）函数 $I_k,J_k:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的，且存在正常数 L_3,L_4，对于所有的 $x,y\in\mathbf{R}$ 有

$$\|I_k(x)-I_k(y)\|\leqslant L_3\|x-y\|,\|J_k(x)-J_k(y)\|\leqslant L_4\|x-y\|,(k=1,2,\cdots,p)$$

（H_4）函数 $g:PC(J,\mathbf{R})\to\mathbf{R}$ 连续，且存在常数 $G>0$，对于所有的 $x,y\in PC(J,\mathbf{R})$ 有

$$\|g(x)-g(y)\|\leqslant G\|x-y\|_{PC}$$

（H_5）函数 $A:J\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是连续的有界线性算子，且存在常数 $M>0$，对于所有的 $x,y\in\mathbf{R}$ 有

$$\|A(t,x)-A(t,y)\|_{B(\mathbf{R})}\leqslant M\|x-y\|$$

若对应于 $r>0$，有 $\Omega_r:=\{y\in\mathbf{R},\|y\|\leqslant r\}$，取

$$\rho=mL_3+\frac{m^2+2m+l}{(n-1)!}L_4,$$

$$\gamma=\frac{m+1}{\Gamma(q+1)}+\frac{m^2+2m+l}{(n-1)!\Gamma(q-n+2)}+\frac{(m+1)(1+\sum_{j=1}^{m-2}b_j\xi_j^{q-n+1})}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+2)},$$

$$K=\sup_{t\in J}\|A(t,0)\|,N=\max_{t\in J}\|f(t,0,0,0)\|,$$

$$N_1=\max_{(t,s)\in\Sigma}\|\varphi(t,s,0)\|,N_2=\max_{(t,s)\in\Sigma}\|\psi(t,s,0)\|$$

由条件（H_1）可得

$$\|A(t,y)\|\leqslant\|A(t,y)-A(t,0)\|+\|A(t,0)\|\leqslant M\|y\|+K\leqslant Mr+K$$

进一步假设

（H_6）$\|g_0\|+Gr+\|g(0)\|+\dfrac{(m+1)\|y_1\|}{(1-d)(n-1)!}+\gamma M_0+\rho r\leqslant r$，

其中 $M_0=(Mr+K)r+Lr+LL_1r+LL_2r+LN_1+LN_2+N$。

（H_7）令 $p^*=G+\gamma(2Mr+K+L+LL_1+LL_2)+\rho$，则 $0\leqslant p^*<1$。

定理 2　如果满足条件（H_1）－（H_7），则拟线

性分数阶高阶脉冲微分方程边值问题（7）在 J 上存在唯一解。

证明 令 $V=C(J,\Omega_r)$，定义算子 $T:V\to V$。为了方便，记

$$\sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})^q<m_1,\ \sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})^{q-n+1}<m_2,$$
$$\sum_{i=1}^{k}(t_i-t_{i-1})^{n-1}<m_3,$$
$$\sum_{i=2}^{k}\sum_{j=i-1}^{k-1}(t_{j+1}-t_j)^{n-1}(t_{i-1}-t_{i-2})^{q-n+1}<l_1,$$
$$\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i}^{k-1}(t_{j+1}-t_j)^{n-1}<l_2,k=1,2,\cdots,p$$

取 $m=\max\{m_1,m_2,m_3,k\},l=\max\{l_1,l_2,k\}$。

首先，需要证明 $T(\Omega_r)\subset\Omega_r$。由假设可得

$$\begin{aligned}
&\|(Ty)(t)\|\leqslant\|g_0\|+\|g(y)\|+\\
&\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{q-1}\|A(s,y)\|\,\|y(s)\|\mathrm{d}s+\\
&\frac{1}{\Gamma(q)}\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-1}\|A(s,y)\|\,\|y(s)\|\mathrm{d}s+\\
&\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-n}\cdot\\
&\|A(s,y)\|\,\|y(s)\|\mathrm{d}s+\\
&\frac{\sum_{i=2}^{k}\sum_{j=i-1}^{k-1}(t_{j+1}-t_j)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\int_{t_{i-2}}^{t_{i-1}}(t_{i-1}-s)^{q-n}\cdot\\
&\|A(s,y)\|\,\|y(s)\|\mathrm{d}s+\\
&\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_k}^{t}(t-s)^{q-1}\|f(s,y(s),\Phi y(s),\Psi y(s))\|\mathrm{d}s+\\
&\frac{1}{\Gamma(q)}\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-1}\|f(s,y(s),\Phi y(s),\Psi y(s))\|\mathrm{d}s+\\
&\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\sum_{i=1}^{k}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-n}\cdot\\
&\|f(s,y(s),\Phi y(s),\Psi y(s))\|\mathrm{d}s+\\
&\frac{\sum_{i=2}^{k}\sum_{j=i-1}^{k-1}(t_{j+1}-t_j)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\int_{t_{i-2}}^{t_{i-1}}(t_{i-1}-s)^{q-n}\cdot\\
&\|f(s,y(s),\Phi y(s),\Psi y(s))\|\mathrm{d}s+\\
&\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{k}\|J_i(y(t_i))\|+\frac{\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i}^{k-1}(t_{j+1}-t_j)^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\\
&\|J_i(y(t_i))\|+\sum_{i=1}^{k}\|I_i(y(t_i))\|+\\
&\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\int_{t_p}^{1}(1-s)^{q-n}\cdot\\
&\|A(s,y)\|\,\|y(s)\|\mathrm{d}s+\\
&\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\sum_{i=1}^{p}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-n}\cdot\\
&\|A(s,y)\|\,\|y(s)\|\mathrm{d}s+\\
&\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\sum_{j=1}^{m-2}b_j\int_{t_p}^{\xi_j}(\xi_j-s)^{q-n}\cdot\\
&\|A(s,y)\|\,\|y(s)\|\mathrm{d}s+\\
&\frac{\sum_{r=1}^{k}(t_r-t_{r-1})^{n-1}}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\int_{t_p}^{1}(1-s)^{q-n}\cdot\\
&\|A(s,y)\|\,\|y(s)\|\mathrm{d}s+\\
&\frac{\sum_{r=1}^{k}(t_r-t_{r-1})^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\sum_{i=1}^{p}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-n}\cdot\\
&\|A(s,y)\|\,\|y(s)\|\mathrm{d}s+\\
&\frac{\sum_{r=1}^{k}(t_r-t_{r-1})^{n-1}}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\sum_{j=1}^{m-2}b_j\int_{t_p}^{\xi_j}(\xi_j-s)^{q-n}\cdot\\
&\|A(s,y)\|\,\|y(s)\|\mathrm{d}s+\\
&\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\int_{t_p}^{1}(1-s)^{q-n}\cdot\\
&\|f(s,y(s),\Phi y(s),\Psi y(s))\|\mathrm{d}s+\\
&\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\sum_{i=1}^{p}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-n}\cdot\\
&\|f(s,y(s),\Phi y(s),\Psi y(s))\|\mathrm{d}s+\\
&\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\sum_{j=1}^{m-2}b_j\int_{t_p}^{\xi_j}(\xi_j-s)^{q-n}\cdot\\
&\|f(s,y(s),\Phi y(s),\Psi y(s))\|\mathrm{d}s+\\
&\frac{\sum_{r=1}^{k}(t_r-t_{r-1})^{n-1}}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\int_{t_p}^{1}(1-s)^{q-n}\cdot\\
&\|f(s,y(s),\Phi y(s),\Psi y(s))\|\mathrm{d}s+\\
&\frac{\sum_{r=1}^{k}(t_r-t_{r-1})^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\sum_{i=1}^{p}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-n}\cdot\\
&\|f(s,y(s),\Phi y(s),\Psi y(s))\|\mathrm{d}s+\\
&\frac{\sum_{r=1}^{k}(t_r-t_{r-1})^{n-1}}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\sum_{j=1}^{m-2}b_j\int_{t_p}^{\xi_j}(\xi_j-s)^{q-n}\cdot\\
&\|f(s,y(s),\Phi y(s),\Psi y(s))\|\mathrm{d}s+\\
&\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{p}\|J_i(y(t_i))\|+\frac{\sum_{r=1}^{k}(t_r-t_{r-1})^{n-1}}{(n-1)!}\cdot\\
&\sum_{i=1}^{p}\|J_i(y(t_i))\|+\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(1-d)(n-1)!}\|y_1\|+\\
&\frac{\sum_{r=1}^{k}(t_r-t_{r-1})^{n-1}}{(1-d)(n-1)!}\|y_1\|\leqslant\\
&\|g_0\|+\|g(y)\|+\frac{(m+1)\|y_1\|}{(1-d)(n-1)!}+
\end{aligned}$$

$$\left[\frac{m+1}{\Gamma(q+1)}+\frac{m^2+2m+l}{(n-1)!\Gamma(q-n+2)}+\frac{(m+1)(1+\sum_{j=1}^{m-2}b_j\xi_j^{q-n+1})}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+2)}\right]\times$$
$$[(Mr+K)r+Lr+LL_1r+LL_2r+LN_1+LN_2+N]+$$
$$\left(mL_3+\frac{m^2+2m+l}{(n-1)!}L_4\right)r\leqslant\|g_0\|+Gr+$$
$$\|g(0)\|+\frac{(m+1)\|y_1\|}{(1-d)(n-1)!}+\gamma M_0+\rho r\leqslant r$$

因此，算子 T 将 Ω_r 映射到 Ω_r。

其次，对于任意的 $x,y\in V$ 有

$$\|(Tx)(t)-(Ty)(t)\|\leqslant$$
$$\left\{G+\left[\frac{m+1}{\Gamma(q+1)}+\frac{m^2+2m+l}{(n-1)!\Gamma(q-n+2)}+\frac{(m+1)(1+\sum_{j=1}^{m-2}b_j\xi_j^{q-n+1})}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+2)}\right]\times\right.$$
$$[2Mr+K+L+LL_1+LL_2]\|+$$
$$\left.mL_3+\frac{(m^2+2m+l)L_4}{(n-1)!}\right\}\|x-y\|\leqslant p^*\|x-y\|$$

由于 $0\leqslant p^*<1$，所以 T 是压缩映射，因此，存在唯一的不动点 $y\in V$，使得 $(Ty)(t)=y(t)$。

而 T 的这个不动点就是方程（7）的解。证毕。

为了证明方程（7）至少存在一个解，我们引入 Krasnoselskii's 不动点定理。

引理 3　假设 K 是 Banach 空间 E 的有界闭凸集，$T,S:K\to E$ 满足下列条件：

(i) 对任意的 $x,y\in K$，有 $Tx+Sy\in K$；

(ii) T 是压缩映射；

(iii) S 在 K 上是全连续的，则 $T+K$ 在 K 内至少存在一个不动点 $z\in K$，使得 $z=Tz+Sz$。

(H_8) 函数 f 满足：$\|f(t,y(t),\Phi y(t),\Psi y(t))\|\leqslant y(t)$。

定理 3　假设 $f:J\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是联合连续的，并且 f 将 $J\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 的有界集映射到 R 的相对紧集，同时条件 $(H_1)-(H_5)$ 和 (H_8) 成立，且

$$p_1^*=G+\left[\frac{m}{\Gamma(q+1)}+\frac{m^2+2m+l}{(n-1)!\Gamma(q-n+2)}+\frac{(m+1)(1+\sum_{j=1}^{m-2}b_j\xi_j^{q-n+1})}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+2)}\right]\times$$
$$[2Mr+K+L\|+\|LL_1+LL_2]+\rho<1$$

则拟线性分数阶高阶脉冲微分方程（7）在 J 上至少存在一个解。

证明　令 $G_0=\sup_{y\in PC(J,R)}\|g(y)\|$，选择 $\Omega_r:=\{y\in\mathbf{R},\|y\|\leqslant r\}$，固定

$$r\geqslant\|g_0\|+G_0+\frac{(m+1)\|y_1\|}{(1-d)(n-1)!}+$$
$$\|y\|_{L^1}\left\{\frac{m+1}{\Gamma(q+1)}+\frac{m^2+2m+l}{(n-1)!\Gamma(q-n+2)}+\frac{(m+1)(1+\sum_{j=1}^{m-2}b_j\xi_j^{q-n+1})}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+2)}\right\}$$

在 Ω_r 上定义算子 T_1 和 T_2，

$$(T_1y)(t)=g_0+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_k}^t(t-s)^{q-1}A(s,y)y(s)\mathrm{d}s+\frac{1}{\Gamma(q)}\int_{t_k}^t(t-s)^{q-1}f(s,y(s),\Phi y(s),\Psi y(s))\mathrm{d}s;$$

$$(T_2y)(t)=g(y)+$$
$$\frac{1}{\Gamma(q)}\sum_{i=1}^k\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-1}A(s,y)y(s)\mathrm{d}s+$$
$$\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\sum_{i=1}^k\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-n}A(s,y)y(s)\mathrm{d}s+$$
$$\frac{\sum_{i=2}^k\sum_{j=i-1}^{k-1}(t_{j+1}-t_j)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\int_{t_{i-2}}^{t_{i-1}}(t_{i-1}-s)^{q-n}A(s,y)y(s)\mathrm{d}s+$$
$$\frac{1}{\Gamma(q)}\sum_{i=1}^k\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-1}f(s,y(s),\Phi y(s),\Psi y(s))\mathrm{d}s+$$
$$\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\sum_{i=1}^k\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-n}\cdot$$
$$f(s,y(s),\Phi y(s),\Psi y(s))\mathrm{d}s+$$
$$\frac{\sum_{i=2}^k\sum_{j=i-1}^{k-1}(t_{j+1}-t_j)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\int_{t_{i-2}}^{t_{i-1}}(t_{i-1}-s)^{q-n}f(s,y(s),$$
$$\Phi y(s),\Psi y(s))\mathrm{d}s+\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{i=1}^kJ_i(y(t_i))+$$
$$\frac{\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{j=i}^{k-1}(t_{j+1}-t_j)^{n-1}}{(n-1)!}J_i(y(t_i))+\sum_{i=1}^kI_i(y(t_i))+$$
$$\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\int_{t_p}^1(1-s)^{q-n}A(s,y)y(s)\mathrm{d}s+$$
$$\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\sum_{i=1}^p\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-n}A(s,y)y(s)\mathrm{d}s+$$
$$\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\cdot$$
$$\sum_{j=1}^{m-2}b_j\int_{t_p}^{\xi_j}(\xi_j-s)^{q-n}A(s,y)y(s)\mathrm{d}s+$$
$$\frac{\sum_{r=1}^k(t_r-t_{r-1})^{n-1}}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\int_{t_p}^1(1-s)^{q-n}A(s,y)y(s)\mathrm{d}s+$$
$$\frac{\sum_{r=1}^k(t_r-t_{r-1})^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\sum_{i=1}^p\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-n}A(s,y)y(s)\mathrm{d}s+$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{k}(t_r-t_{r-1})^{n-1}}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\cdot$$
$$\sum_{j=1}^{m-2}b_j\int_{t_p}^{\xi_j}(\xi_j-s)^{q-n}A(s,y)y(s)\mathrm{d}s+$$
$$\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\int_{t_p}^{1}(1-s)^{q-n}\cdot$$
$$f(s,y(s),\Phi y(s),\Psi y(s))\mathrm{d}s+$$
$$\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\sum_{i=1}^{p}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-n}f(s,y(s),$$
$$\Phi y(s),\Psi y(s))\mathrm{d}s+\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\cdot$$
$$\sum_{j=1}^{m-2}b_j\int_{t_p}^{\xi_j}(\xi_j-s)^{q-n}f(s,y(s),\Phi y(s),\Psi y(s))\mathrm{d}s+$$
$$\frac{\sum_{r=1}^{k}(t_r-t_{r-1})^{n-1}}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\int_{t_p}^{1}(1-s)^{q-n}\cdot$$
$$f(s,y(s),\Phi y(s),\Psi y(s))\mathrm{d}s+$$
$$\frac{\sum_{r=1}^{k}(t_r-t_{r-1})^{n-1}}{(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\sum_{i=1}^{p}\int_{t_{i-1}}^{t_i}(t_i-s)^{q-n}\cdot$$
$$f(s,y(s),\Phi y(s),\Psi y(s))\mathrm{d}s+\frac{\sum_{r=1}^{k}(t_r-t_{r-1})^{n-1}}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+1)}\cdot$$
$$\sum_{j=1}^{m-2}b_j\int_{t_p}^{\xi_j}(\xi_j-s)^{q-n}f(s,y(s),\Phi y(s),\Psi y(s))\mathrm{d}s+$$
$$\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{p}J_i(y(t_i))+\frac{\sum_{r=1}^{k}(t_r-t_{r-1})^{n-1}}{(n-1)!}\sum_{i=1}^{p}J_i(y(t_i))+$$
$$\frac{(t-t_k)^{n-1}}{(1-d)(n-1)!}y_1+\frac{\sum_{r=1}^{k}(t_r-t_{r-1})^{n-1}}{(1-d)(n-1)!}y_1$$

对于 $x,y\in\Omega_r$ 得

$$\|T_1x+T_2y\|\leqslant$$
$$\|g_0\|+G_0+\frac{(m+1)\|y_1\|}{(1-d)(n-1)!}+\|y\|_{L^1}\cdot$$
$$\left\{\frac{m+1}{\Gamma(q+1)}+\frac{m^2+2m+l}{(n-1)!\Gamma(q-n+2)}+\frac{(m+1)(1+\sum_{j=1}^{m-2}b_j\xi_j^{q-n+1})}{(1-d)(n-1)!\Gamma(q-n+2)}\right\}$$

因此 $T_1x+T_2y\in\Omega_r$。根据假设，当 $p_1^*<1$ 时，T_2 是压缩映射。

由于 f 和 A 是连续的，从而 $(T_1y)(t)$ 是连续的，注意到

$$\|(T_1y)(t)\|\leqslant\|g_0\|+\frac{\|y\|_{L^1}}{\Gamma(q+1)}$$

故 T_1 在 Ω_r 上是一致有界的。下面证明 $(T_1y)(t)$ 是全连续的。因为 f 在紧集 $J\times\Omega_r\times\Omega_r\times\Omega_r$ 上是有界的，因此定义 $\sup_{(t,y,\Phi y,\Psi y)\in J\times\Omega_r\times\Omega_r\times\Omega_r}\|f(t,y,\Phi y,\Psi y)\|=f_{\max}<\infty$，有

$$\|(T_1y)(t_2)-(T_1y)(t_1)\|\leqslant$$
$$\frac{f_{\max}+(Mr+K)r}{\Gamma(q+1)}|2(t_2-t_1)^q+(t_1-t_k)^q-(t_2-t_k)^q|$$

当 $t_1\to t_2$ 时，$y\in\Omega_r$ 是独立的，因此，T_1 在 Ω_r 上相对紧的，故由 Arzela－Ascoli's 定理可得 T_1 在 Ω_r 上是紧的。所以由引理 3 可知拟线性分数阶高阶脉冲微分方程边值问题（7）在 J 上至少存在一个解。证毕。

3 应用例子

例 1 特殊地，令 $n=2$，则 $q\in(1,2]$，考虑如下分数阶积分微分方程

$$\begin{cases}D_{0^+}^{\frac{3}{2}}y(t)=\frac{1}{20}\sin(y(t))y(t)+\frac{t}{30}\frac{|y|}{1+|y|}+\\ \quad\frac{1}{30}\int_0^t\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}y(s)}\mathrm{d}s+\frac{1}{30}\int_0^t\mathrm{e}^{-\frac{1}{16}y(s)}\mathrm{d}s,t\in[0,1],\\ \Delta y|_{t=\frac{1}{3}}=\frac{y(\frac{1}{3})}{16+y(\frac{1}{3})},\Delta y'|_{t=\frac{1}{3}}=\frac{y(\frac{1}{3})}{32+y(\frac{1}{3})},\\ y(0)=y_0,y'(1)=\frac{1}{2}\end{cases}\tag{8}$$

对于 $x,y\in[0,1]$ 有

$$\|\Phi x-\Phi y\|\leqslant\frac{1}{8}|x-y|,\|\Psi x-\Psi y\|\leqslant$$
$$\frac{1}{16}|x-y|,\|f(t,x,\Phi x,\Psi x)-f(t,y,\Phi y,\Psi y)\|\leqslant$$
$$\frac{1}{30}(|x-y|+\|\Phi x-\Phi y\|+\|\Psi x-\Psi y\|)$$

因此，取 $M=\frac{1}{8},L=\frac{1}{20},L_1=\frac{1}{2},L_2=\frac{1}{4}$，可得 $K=\frac{1}{8}$。

由于 $L_3=\frac{1}{16},L_4=\frac{1}{32}$，选择 $r=1,m=1,p=1$，可得下面的条件成立

$$\gamma(2Mr+K+L+LL_1+LL_2)+\rho<1$$

所以由定理 2 可得方程（8）在 $[0,1]$ 上有唯一解。

例 2 设在有限维欧式空间 $\mathbf{R}^d$ 中，仍然令 $n=2$，则 $q\in(1,2]$，考虑以下分数阶积分微分方程

$$\begin{cases} D_{0^+}^{\frac{3}{2}}y(t) = \dfrac{t}{30 + y(t)}y(t) + \dfrac{t}{20}\sin y^2(t), t \in [0,1], \\ \Delta y|_{t=\frac{1}{3}} = \dfrac{y(\frac{1}{3})}{16 + y(\frac{1}{3})}, \Delta y'|_{t=\frac{1}{3}} = \dfrac{y(\frac{1}{3})}{32 + y(\frac{1}{3})}, \\ y(0) = y_0, y'(1) = \dfrac{1}{6} \end{cases} \tag{9}$$

对于 $x,y \in [0,1]$ 有

$$\|f(t,x) - f(t,y)\| \leqslant \frac{1}{10}\|x - y\|,$$

$$\|f(t,y)\| \leqslant y^2(t)$$

因此，取 $M = \frac{1}{4}, L = \frac{1}{8}$，可得 $K = \frac{1}{4}$。

由于 $L_3 = \frac{1}{16}$，$L_4 = \frac{1}{32}$，选择 $r = 1$，$m = 1$，$p = 1$，可得 $p_1^* < 1$。又因为在有限维欧式空间中，$t\sin y^2(t)$ 是联合连续的且为有界集，从而是相对紧集，满足定理3 的条件，故方程（9）在 $[0,1]$ 上至少存在一个解。

参考文献：

[1] HILFER R. Applications of fractional calculus in physics [M]. Singapore: World Scientific, 2000.

[2] LAKSHMIKANTHAM V, LEELA S, VASUNDHARA DEVI J. Theory of fractional dynamic systems [M]. Cambridge: Cambridge Academic Publishers, 2009.

[3] BALACHANDRAN K, KIRUTHIKA S, TRUJILLO J J. Existence results for fractional impulsive integro differential equations in Banach spaces [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simulat, 2011, 16(4):1970 – 1977.

[4] WANG G T, AHMAD B, ZHANG L H. Impulsive anti-periodic boundary value problem for nonlinear differential equations of fractional order [J]. Nonlinear Anal, 2011, 74(3):792 – 804.

[5] WANG X H. Impulsive boundary value problem for nonlinear differential equations of fractional order [J]. Computers and Mathematics with Application, 2011, 62(5): 2383 – 2391.

[6] WANG J R, ZHOU Y, FECKAN M. Nonlinear impulsive problems for fractional differential equation and Ulam stability [J]. Computers and Mathematics with Application, 2012, 64(10): 3008 – 3020.

[7] MA J C, YANG J. Existence of solutions for multi-point boundary value problem of fractional q-differential equation [J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2011, 92: 1 – 10.

[8] MA J C, YANG J. Existence and uniqueness of solutions for multi-point fractional boundary value problems for nonlinear fractional integro-differential equations [J]. Mathematica Applicata, 2011, 24(3): 575 – 580.

[9] 杨军,马俊驰,赵硕,等. 分数阶微分方程多点分数阶边值问题[J]. 数学实践与认识, 2011,41(11): 188 – 194.

[10] MA J C, YANG J. Positive solutions of the multiple point boundary value problems for nonlinear fractional differential equations [C]//The 2nd International Conference on Multimedia Technology, Hangzhou, 2011: 2293 – 2296.

[11] ZHAO Y L, CHEN H B, HUANG L. Existence of positive solutions for nonlinear fractional functional differential equation [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2012, 64(10): 3456 – 3467.

[12] TIAN Y S, BAI Z B. Existence results for the three-point impulsive boundary value problem involving fractional differential equations [J]. Computers and Mathematics with Applications, 2010, 59(8):2601 – 2609.

[13] WANG X H. Existence of solutions for nonlinear impulsive high order fractional differential equations [J]. Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, 2011, 80:1 – 12.