

# 含潜伏时滞效应和非线性发生率的 SEIR模型的长时间行为\*

杨若晨<sup>1</sup>, 马明菊<sup>2</sup>, 齐逸飞<sup>3</sup>, 李君<sup>4</sup>

- (1. 圣约翰大学托宾商学院, 美国 纽约 NY11439;
2. 莆田学院数学学院, 福建 莆田 351100;
3. 西北师范大学经济学院, 甘肃 兰州 730070;
4. 西安电子科技大学, 陕西 西安 710071)

**摘要:** 研究了一类含有潜伏时滞和非线性发生率的 SEIR 流行病模型。给出了疾病流行的阈值条件, 并且得到了无病平衡点和流行病平衡点的局部稳定性条件。通过构造适当的 Lyapunov 泛函, 结合 LaSalle 不变集原理, 证明了当基本再生数  $R_0 \leq 1$  时, 无病平衡点是全局渐近稳定的; 但当  $R_0 > 1$  时, 流行病平衡点是全局渐近稳定的, 同时利用数值模拟验证了分析的结果。

**关键词:** 流行病; 数学模型; 潜伏期; 复发; 时滞; 全局稳定性

**中图分类号:** O175    **文献标志码:** A    **文章编号:** 0529-6579(2015)01-0024-07

## Long Time Behavior for an SEIR Epidemic Model with Latent Delay and Nonlinear Incidence Rate

YANG Ruochen<sup>1</sup>, MA Mingju<sup>2</sup>, QI Yifei<sup>3</sup>, LI Jun<sup>4</sup>

- (1. Tobin College of Business, St. John's University, New York NY11439, USA;
2. Department of Mathematics, Putian University, Putian 351100, China;
3. School of Economics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China;
4. School of Mathematics and Statistics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

**Abstract:** A mathematical model describing the transmission dynamics of disease with nonlinear incidence rate and delay is constructed. The local stability of the disease-free equilibrium and epidemic equilibrium is established by analyzing the corresponding characteristic equation. Using suitable Lyapunov function and LaSalle's invariance principle, it is proved that if  $R_0 \leq 1$  then the disease-free equilibrium is globally asymptotically stable, but if  $R_0 > 1$  then the epidemic equilibrium is globally asymptotically stable. Some numerical simulations are also given to explain the conclusions.

**Key words:** epidemic disease; mathematical model; incubation period; latent relapse; delay; global stability

在有关传染病模型的文献中, 常常假设疾病的潜伏期是可以忽略的, 基于这种假设的传染病模型被称为是模型, 但是在某些疾病中, 它们的潜伏期

是不能被忽略的, 例如结核, 流感, 麻疹等<sup>[1-2]</sup>。感染了相应病菌的染病者在潜伏期内是不具有传染性的, 他们会在发病前有一段潜伏期, 因此在描述

\* 收稿日期: 2014-07-31

基金项目: 福建省教育厅中青年骨干教师教育科研资助项目 (JA13283)

作者简介: 杨若晨 (1994 年生), 男; 研究方向: 微分方程与动力系统; 通讯作者: 李君; E-mail: j.lee.nx@gmail.com

这种潜伏期时，引入时滞的因素是合理的<sup>[3-5]</sup>。Van den Driessche 和 Zou 在文献 [6] 中指出，有些康复者会由于休眠致病菌的复原作用而复发成为感染者，例如人和牛肺结核<sup>[7-8]</sup>，及弓形体病毒感染<sup>[9]</sup>等。比率依赖型发生率最早是由 Arditì 等在文献 [10] 中引入，后来由 Li 等应用于传染病模型中<sup>[11]</sup>。受文献 [6] 和文献 [11] 的启发，考虑具有潜伏时滞影响的传染病模型。我们将人群分为四类，其人数分别记作易感者  $S(t)$ ，处于潜伏期的人  $E(t)$ ，感染者  $I(t)$ ，具有短暂免疫者  $R(t)$ 。

$$\begin{cases} S'(t) = A - \mu S(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + aS(t)} \\ E'(t) = \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + aS(t)} - \mu E(t) - \frac{\beta e^{-\mu\tau} S(t-\tau)I(t-\tau)}{1 + aS(t-\tau)} \\ I'(t) = \frac{\beta e^{-\mu\tau} S(t-\tau)I(t-\tau)}{1 + aS(t-\tau)} + \delta R(t) - (\mu + \gamma + \varepsilon)I(t) \\ R'(t) = \gamma I(t) - (\mu + \delta)R(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中  $A$  为常数再生速度， $\mu$  为人群的自然死亡率， $\varepsilon$  为感染者的因病死亡率， $\gamma$  表示染病者的治愈率， $\frac{\beta S(t)I(t)}{1 + aS(t)}$  表示有效感染率，非负参数  $\delta$  表示具有免疫能力的人群回到感染者行列的速度。当  $\delta = 0$  时，康复者具有永久免疫力；当  $\delta > 0$ ，康复者具有短暂免疫力。系统 (1) 的初始条件取如下形式

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \phi_1(\theta), E(\theta) = \phi_2(\theta), \\ I(\theta) &= \phi_3(\theta), R(\theta) = \phi_4(\theta), \\ \phi_i(\theta) &\geq 0, \theta \in [-\tau, 0], \\ \phi_i(0) &> 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{aligned} \quad (2)$$

这里  $(\phi_1(\theta), \phi_2(\theta), \phi_3(\theta), \phi_4(\theta)) \in C([- \tau, 0], \mathbf{R}_{+0}^4)$  是 Banach 空间中从  $[- \tau, 0]$  到  $\mathbf{R}_{+0}^4$  的连续映射，其中  $\mathbf{R}_{+0}^4 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) : x_i \geq 0, i = 1, 2, 3, 4\}$ 。为了使得初值具有连续性，假设

$$E(0) = \int_{-\tau}^0 \frac{\beta e^{\mu\tau} \phi_1(\theta) \phi_3(\theta)}{1 + a\phi_1(\theta)} d\theta \quad (3)$$

由文献 [12]，系统 (1) 有满足初始条件 (2) 和 (3) 的唯一解  $(S(t), E(t), I(t), R(t))$ 。容易得到系统 (1) 初始值定义在  $[0, +\infty)$  的所有解，当  $t \geq 0$  时为正。

### 1 平衡点和局部稳定性

记系统 (1) 的基本再生数为  $R_0 = \frac{A\beta e^{-\mu\tau}(\mu + \delta)}{(aA + \mu)(\delta(\varepsilon + \mu) + \mu(\mu + \gamma + \varepsilon))}$ 。当  $R_0 \leq 1$

时，系统存在唯一的无病平衡点  $E_1(\frac{A}{\mu}, 0, 0, 0)$ ；当  $R_0 > 1$  时，系统还存在流行病平衡点  $E_2(S^*, E^*, I^*, R^*)$ ，平衡点  $E_2$  总是满足下面的关系

$$\begin{aligned} S^* &= \frac{\alpha}{\beta e^{-\mu\tau} - a\alpha}, \\ E^* &= \frac{\alpha(e^{\mu\tau} - 1)}{\mu} I^*, \\ R^* &= \frac{\gamma}{\mu + \delta} I^*, \end{aligned}$$

$$I^* = \frac{A(\beta e^{-\mu\tau} - a\alpha) - \mu\alpha}{\beta\alpha - a\alpha^2 e^{\mu\tau}} = \frac{e^{-\mu\tau}\beta(aA + \mu)(\mu + \delta)}{e^{-\mu\tau}(\mu + \delta) - a[\delta(\mu + \varepsilon) + \mu(\mu + \gamma + \varepsilon)]} (R_0 - 1) \quad (4)$$

其中  $\alpha = \mu + \gamma + \varepsilon - \frac{\gamma\delta}{\mu + \delta}$ 。事实上由于  $R_0 > 1$ ，那么

$$\begin{aligned} A\beta e^{-\mu\tau}(\mu + \delta) &> (aA + \mu) \cdot \\ &[\delta(\mu + \varepsilon) + \mu(\mu + \gamma + \varepsilon)] > \\ aA[\delta(\mu + \varepsilon) + \mu(\mu + \gamma + \varepsilon)] \end{aligned}$$

即

$$\beta e^{-\mu\tau}(\mu + \delta) > a[\delta(\mu + \varepsilon) + \mu(\mu + \gamma + \varepsilon)]$$

因此，当  $R_0 > 1$  时，正平衡点存在。系统 (1) 在无病平衡点处的特征方程为

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)^2 [\lambda^2 + P_1(\tau)\lambda + P_0(\tau) + \\ (Q_1(\tau)\lambda + Q_0(\tau))e^{-\lambda\tau}] = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} P_1(\tau) &= 2\mu + \delta + \gamma + \varepsilon, \\ P_0(\tau) &= (\mu + \delta)(\mu + \gamma + \varepsilon) - \delta\gamma, \end{aligned}$$

$$Q_1(\tau) = -\frac{\beta A e^{-\mu\tau}}{\mu + aA}, Q_0(\tau) = -(\mu + \delta) \frac{\beta A e^{-\mu\tau}}{\mu + aA}$$

显然，方程 (5) 有一个负实根  $\lambda = -\mu$ ，其余的根由下面的方程来决定

$$\begin{aligned} \lambda^2 + P_1(\tau)\lambda + P_0(\tau) + \\ (Q_1(\tau)\lambda + Q_0(\tau))e^{-\lambda\tau} = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

当  $\tau = 0$ ，方程 (6) 变为

$$\lambda^2 + (P_1(0) + Q_1(0))\lambda + P_0(0) + Q_0(0) = 0$$

直接计算得到

$$P_1(0) + Q_1(0) = \frac{(\mu + \gamma + \varepsilon)\mu + \delta(\mu + \varepsilon)}{\mu + \delta}$$

$$(1 - R_0) + \frac{(\mu + \delta + \gamma)(\mu + \delta) - \mu\gamma}{\mu + \delta} > 0,$$

$$P_1(0) + Q_1(0) =$$

$$[(\mu + \gamma + \varepsilon)\mu + \delta(\mu + \varepsilon)](1 - R_0) > 0$$

因此，当  $\tau = 0$  时，无病平衡点  $E_1$  是局部渐近稳定

的。当  $\tau > 0$  时, 设  $iw (w > 0)$  是方程 (5) 的一个纯虚根, 代入 (5) 式中, 分离实部、虚部, 直接计算得

$$w^2 - P_0(\tau) = Q_0(\tau) \cos w\tau + Q_1(\tau) w \sin w\tau,$$

$$P_1(\tau)w = Q_0(\tau) \sin w\tau + Q_1(\tau) w \cos w\tau$$

平方相加得

$$w^4 + (P_1^2(\tau) - 2P_0(\tau) - Q_1^2(\tau))w^2 + P_0^2(\tau) - Q_0^2(\tau) = 0 \quad (7)$$

显然  $P_0^2(\tau) - Q_0^2(\tau) > 0$ , 另一方面, 直接计算得有

$$P_1^2(\tau) - 2P_0(\tau) - Q_1^2(\tau) = \frac{1}{(\mu + \delta)^2} \cdot$$

$$[(\mu + \delta)^4 + \delta^2(\gamma(2\mu + 2\varepsilon + \gamma) + 2\delta\gamma(\mu + \delta)^2 + 2\mu\delta\gamma(\mu + \gamma + \varepsilon))] > 0$$

因此, 当  $R_0 < 1$  时, 方程 (7) 无实根。注意到无病平衡点  $E_1$  当  $\tau = 0$  时是局部渐近稳定的。由文献 [13] 的定理 4.1, 当  $R_0 < 1$  时, 无病平衡点  $E_1$  是局部渐近稳定的。

记

$$f(\lambda) = \lambda^2 + P_1(\tau)\lambda + P_0(\tau) + (Q_1(\tau)\lambda + Q_0(\tau))e^{-\lambda\tau}$$

如果  $R_0 > 1$ , 则

$$f(0) = (1 - R_0)[\mu(\mu + \gamma + \varepsilon) + \delta(\mu + \varepsilon)] < 0$$

另一方面, 当  $\lambda \rightarrow +\infty$  时,  $f(\lambda) \rightarrow +\infty$ , 故方程 (5) 至少有一个正实根, 因此当  $R_0 > 1$  时, 无病平衡点  $E_1$  不稳定。

下面考虑流行病平衡点  $E_2$  的稳定性。系统 (1) 在流行病平衡点  $E_2$  处的特征方程为

$$(\lambda + \mu)[\lambda^3 + p_2(\tau)\lambda^2 + p_1(\tau)\lambda + p_0 + (q_2(\tau)\lambda^2 + q_1(\tau)\lambda + q_0)e^{-\lambda\tau}] = 0 \quad (8)$$

这里

$$p_2(\tau) = 3\mu + \delta + \gamma + \varepsilon + \frac{BI^*}{(1 + aS^*)^2},$$

$$p_1(\tau) = \left(\mu + \frac{BI^*}{(1 + aS^*)^2}\right)$$

$$(2\mu + \delta + \gamma + \varepsilon) + \alpha(\mu + \delta) \cdot$$

$$p_0(\tau) = \left(\mu + \frac{BI^*}{(1 + aS^*)^2}\right)\alpha(\mu + \delta),$$

$$q_2(\tau) = -\alpha,$$

$$q_1(\tau) = -\alpha(2\mu + \delta),$$

$$q_0(\tau) = -\alpha\mu(\mu + \delta)$$

方程 (8) 有一个负实根  $\lambda = -\mu$ , 其余的根由下面的方程决定

$$\lambda^3 + p_2(\tau)\lambda^2 + p_1(\tau)\lambda + p_0 + (q_2(\tau)\lambda^2 + q_1(\tau)\lambda + q_0)e^{-\lambda\tau} = 0 \quad (9)$$

当  $\tau = 0$ , 方程 (9) 变为

$$\lambda^3 + (p_2(0) + q_2(0))\lambda^2 + (p_1(0) + q_1(0))\lambda + p_0(0) + q_0(0) = 0$$

当  $R_0 > 1$  时, 经过计算

$$p_2(\tau) + q_2(\tau) = 2\mu + \delta + \frac{\delta\gamma}{\mu + \delta} + \frac{BI^*}{(1 + aS^*)^2} > 0,$$

$$p_1(\tau) + q_1(\tau) = (2\mu + \delta + \gamma + \varepsilon) \cdot$$

$$\left(\mu + \frac{BI^*}{(1 + aS^*)^2}\right) - \mu\alpha > 0,$$

$$p_0(\tau) + q_0(\tau) = \alpha(\mu + \delta) \frac{BI^*}{(1 + aS^*)^2}$$

并且

$$(p_1(\tau) + q_1(\tau))(p_2(\tau) + q_2(\tau)) - (p_0(\tau) + q_0(\tau)) =$$

$$\left[\left(\mu + \frac{BI^*}{(1 + aS^*)^2}\right)(2\mu + \delta + \gamma + \varepsilon) - \mu\alpha\right] \cdot$$

$$\left[\frac{\delta\gamma}{\mu + \delta} + \frac{BI^*}{(1 + aS^*)^2}\right] +$$

$$(2\mu + \delta)[\mu(2\mu + \delta + \gamma + \varepsilon) - \mu\alpha] +$$

$$[(2\mu + \delta)(2\mu + \delta + \gamma + \varepsilon) - \alpha(\mu + \delta)] \cdot$$

$$\frac{BI^*}{(1 + aS^*)^2} = F_1 + F_2 + F_3$$

其中

$$F_1 = \left[\left(\mu + \frac{BI^*}{(1 + aS^*)^2}\right)(2\mu + \delta + \gamma + \varepsilon) - \mu\alpha\right] \cdot$$

$$\left[\frac{\delta\gamma}{\mu + \delta} + \frac{BI^*}{(1 + aS^*)^2}\right] > 0,$$

$$F_2 = (2\mu + \delta)[\mu(2\mu + \delta + \gamma + \varepsilon) - \mu\alpha] > 0,$$

$$F_3 = [(2\mu + \delta)(2\mu + \delta + \gamma + \varepsilon) - \alpha(\mu + \delta)] \cdot$$

$$\frac{BI^*}{(1 + aS^*)^2} > 0$$

因此, 当  $R_0 > 1$  时, 方程 (9) 没有正实根, 平衡点  $E_2$  当  $\tau = 0$  时是局部渐近稳定的。当  $\tau > 0$  时, 设  $iw (w > 0)$  是方程 (9) 的一个纯虚根, 代入 (9) 中, 分离实部、虚部, 直接计算得

$$p_1(\tau)w - w^3 =$$

$$(q_0(\tau) - q_2(\tau)w^2)\sin w\tau - q_1(\tau)w\cos w\tau$$

$$p_2(\tau)w^2 - p_0(\tau) =$$

$$(q_0(\tau) - q_2(\tau)w^2)\cos w\tau - q_1(\tau)w\sin w\tau$$

平方相加得到

$$w^6 + a_{4,0}w^4 + a_{2,0}w^2 + a_{0,0} = 0$$

其中,

$$a_{4,0} = p_2^2(\tau) - 2p_1(\tau)p_2(\tau) - q_2^2(\tau) =$$

$$\left(\frac{BI^*}{(1 + aS^*)^2}\right)^2 + (\mu + \delta)^2 + (\mu + \gamma + \varepsilon)^2 + 2\delta\gamma - \alpha^2 > 0,$$

$$a_{2,0} = p_1^2(\tau) - 2p_0(\tau)p_2(\tau) +$$

$$\begin{aligned}
 & 2q_0(\tau)q_2(\tau) - q_1^2(\tau) = \\
 & \left(\mu + \frac{BI^*}{1 + \alpha S^*}\right)^2 [(\mu + \gamma + \varepsilon)^2 + (\mu + \delta)^2 + 2\delta\gamma] - \\
 & \mu^2 \left(\mu + \gamma + \varepsilon - \frac{\delta\gamma}{\mu + \delta}\right)^2 > \\
 & \mu^2 \left\{ (\mu + \gamma + \varepsilon)^2 + (\mu + \delta)^2 + \right. \\
 & \left. 2\delta\gamma - \left(\mu + \gamma + \varepsilon - \frac{\delta\gamma}{\mu + \delta}\right)^2 \right\} > 0, \\
 & a_{0,0} = p_0^2(\tau) - q_0^2(\tau) = \\
 & \alpha^2(\mu + \delta)^2 \frac{BI^*}{(1 + \alpha S^*)^2} (2\mu + \frac{BI^*}{(1 + \alpha S^*)}) > 0
 \end{aligned}$$

因此若  $R_0 > 1$  时, 方程 (9) 没有实根。注意到平衡点  $E_2$  当  $\tau = 0$  时是局部渐近稳定的, 根据文献 [13] 定理 4.1, 得到当  $R_0 > 1$  时, 平衡点  $E_2$  存在并且是局部渐近稳定的。有下面的结论。

**定理 1** 对于系统 (1) 有,

(i) 若  $R_0 < 1$  无病平衡点  $E_1$  是局部渐近稳定的; 如果  $R_0 > 1, E_1$  是不稳定的。

(ii) 若  $R_0 > 1$ , 系统 (1) 有唯一的流行病平衡点  $E_2$ , 并且它是局部渐近稳定的。

## 2 全局稳定性

通过构造合适的 Lyapunov 泛函并利用 LaSalle 不变集原理讨论系统 (1) 的无病平衡点  $E_1$  和流行病平衡点  $E_2$  的全局稳定性。注意到在  $E(t)$  系统 (1) 的第一、第三和第四个方程中并未出现, 因此只需要考虑系统 (1) 的子系统的稳定性

$$\begin{cases}
 S'(t) = A - \mu S(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha S(t)} \\
 I'(t) = \frac{\beta e^{-\mu\tau} S(t-\tau)}{1 + \alpha S(t-\tau)} + \delta R(t) - (\mu + \gamma + \varepsilon)I(t) \\
 R'(t) = \gamma I(t) - (\mu + \delta)R(t)
 \end{cases} \quad (10)$$

显然, 系统 (10) 总存在平衡点  $E_1^0 = (A/\mu, 0, 0)$ 。并且系统 (10) 当  $R_0 > 1$  时存在一个平衡点  $E_2^0 = (S^*, I^*, R^*)$ , 这里的  $S^*, I^*, R^*$  由 (4) 式所定义。由上述部分的讨论, 容易得到平衡点  $E_1^0$  当  $R_0 < 1$  时是局部渐近稳定的, 当  $R_0 > 1$  时不稳定。平衡点  $E_2^0$  当  $R_0 > 1$  时存在, 且为局部渐近稳定的。首先证明  $E_1^0$  的全局稳定性。

**定理 2** 若  $R_0 < 1$ , 系统 (10) 的平衡点  $E_1^0$  在  $\mathbf{R}_3^+$  中是全局渐近稳定的。

**证明** 记  $S_0 = A/\mu, (S(t), I(t), R(t))$  是系统 (10) 具有初始条件 (2) 的解。定义

$$\begin{aligned}
 V_1(t) &= \frac{S_0}{1 + \alpha S_0} \left( \frac{S(t)}{S_0} - 1 - \ln \frac{S(t)}{S_0} \right) + \\
 & e^{\mu\tau} I(t) + \frac{\delta e^{\mu\tau}}{\mu + \delta} R(t)
 \end{aligned}$$

则  $V_1(t)$  沿着系统 (10) 的全导数为

$$\begin{aligned}
 \frac{dV_1(t)}{dt} &= \frac{1}{1 + \alpha S_0} \left( 1 - \frac{S_0}{S(t)} \right) \cdot \\
 & \left( A - \mu S(t) - \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha S(t)} \right) + \frac{\beta S(t-\tau)I(t-\tau)}{1 + \alpha S(t-\tau)} + \\
 & \delta e^{\mu\tau} R(t) - (\mu + \gamma + \varepsilon) e^{\mu\tau} I(t) + \\
 & \frac{\delta e^{\mu\tau}}{\mu + \delta} \left( \gamma I(t) - (\mu + \delta) R(t) \right) \quad (11)
 \end{aligned}$$

将  $A = \mu S_0$  代入 (11) 式有

$$\begin{aligned}
 \frac{dV_1(t)}{dt} &= \frac{S(t) - S_0}{S(t)(1 + \alpha S_0)} \left( \mu(S_0 - S(t)) - \right. \\
 & \left. \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha S(t)} \right) + \frac{\beta S(t-\tau)I(t-\tau)}{1 + \alpha S(t-\tau)} + \delta e^{\mu\tau} R(t) - \\
 & (\mu + \gamma + \varepsilon) e^{\mu\tau} I(t) + \frac{\delta e^{\mu\tau}}{\mu + \delta} (\gamma I(t) - (\mu + \delta) R(t)) = \\
 & - \frac{\mu(S(t) - S_0)^2}{S(t)(1 + \alpha S_0)} - \frac{\beta I(t)(S(t) - S_0)}{(1 + \alpha S(t))(1 + \alpha S_0)} + \\
 & \frac{\beta S(t-\tau)I(t-\tau)}{1 + \alpha S(t-\tau)} - \alpha e^{\mu\tau} I(t) \quad (12)
 \end{aligned}$$

其中  $\alpha$  如 (4) 式所定义。构造如下形式的 Lyapunov 泛函

$$V(t) = V_1(t) + \int_{t-\tau}^t \frac{\beta S(\theta)I(\theta)}{1 + \alpha S(\theta)} d\theta \quad (13)$$

由 (12) 式和 (13) 式

$$\begin{aligned}
 \frac{dV(t)}{dt} &= - \frac{\mu(S(t) - S_0)^2}{S(t)(1 + \alpha S_0)} - \alpha e^{\mu\tau} I(t) - \\
 & \frac{\beta I(t)(S(t) - S_0)}{(1 + \alpha S(t))(1 + \alpha S_0)} + \frac{\beta S(t)I(t)}{1 + \alpha S(t)} = \\
 & - \frac{\mu(S(t) - S_0)^2}{S(t)(1 + \alpha S_0)} + \frac{\beta S_0 I(t)}{1 + \alpha S_0} - \alpha e^{\mu\tau} I(t) = \\
 & - \frac{\mu(S(t) - S_0)^2}{S(t)(1 + \alpha S_0)} + \frac{e^{\mu\tau} (\delta(\mu + \varepsilon) + \mu(\mu + \gamma + \varepsilon))}{\mu + \delta} \cdot \\
 & (R_0 - 1)I(t) \quad (14)
 \end{aligned}$$

当  $R_0 < 1$  时, 由 (14) 式知  $V'(t) \leq 0$ 。由文献 [14] 的定理 5.3.1, 定义  $M$  为集合  $\{V'(t) = 0\}$  的最大不变子集。又由 (14) 式,  $\{V'(t) = 0\}$  当且仅当  $S(t) = 0, I(t) = 0$ 。注意到集合  $M$  是不变的, 对于集合  $M$  中的每个元素, 有  $I(t) = 0, I'(t) = 0$ 。因此由 (10) 的第二个方程,

$$0 = I'(t) = \delta R(t)$$

即就是  $R(t) = 0$ 。因此,  $V'(t) = 0$  当且仅当  $(S(t), I(t), R(t)) = (S_0, 0, 0)$ 。当  $R_0 < 1$  时, 平

平衡点  $E_0$  是局部渐近稳定的。由时滞微分方程的 La-Salle 不变集原理<sup>[15]</sup>, 平衡点  $E_1^0$  是全局渐近稳定的。

**推论 1** 若  $R_0 < 1$ , 系统 (1) 的无病平衡点  $E_1$  是  $\mathbf{R}_4^+$  中的全局渐近稳定平衡点。

**证明** 设  $(S(t), E(t), I(t), R(t))$  是系统 (1) 满足初始条件 (2) - (3) 的正解, 由系统 (1) 的第二个方程和条件 (3) 得到

$$E(t) = \int_{t-\tau}^t \frac{\beta S(\eta) I(\eta)}{1 + aS(\eta)} e^{-\eta(t-\eta)} d\eta \quad (15)$$

再由定理 2, 当  $R_0 < 1, t \rightarrow \infty$  时,

$$S(t) \rightarrow \frac{A}{\mu}, I(t) \rightarrow 0, R(t) \rightarrow 0 \quad (16)$$

由 (15) - (16) 式, 得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{t-\tau}^t \frac{\beta S(\eta) I(\eta)}{1 + aS(\eta)} e^{-\eta(t-\eta)} d\eta = 0$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{\beta S(t) I(t)}{1 + aS(t)} - \frac{\beta e^{-\mu\tau} S(t-\tau) I(t-\tau)}{1 + aS(t-\tau)} \right] = 0$$

注意到当  $R_0 < 1$  时, 系统 (1) 的无病平衡点  $E_1$  是局部稳定的, 因此  $E_1$  是全局渐近稳定的, 证毕。

下面为了证明系统 (1) 的正平衡点  $E_2$  的全局稳定性, 首先来证明系统 (10) 的正平衡点  $E_2$  的全局渐近稳定性。

**定理 3** 若  $R_0 > 1$ , 那么系统 (10) 的正平衡点  $E_2^0$  在  $\mathbf{R}_4^+$  中是全局渐近稳定的。

**证明** 设  $(S(t), I(t), R(t))$  是系统 (10) 具有初始条件 (2) 的正解, 定义

$$V_{2,0}(t) = S(t) - S^* - \int_{S^*}^{S(t)} \frac{1 + a\eta}{1 + aS^*} \frac{S^*}{\eta} d\eta +$$

$$e^{\mu\tau} \left( I(t) - I^* - I^* \ln \frac{I(t)}{I^*} \right) +$$

$$\frac{\delta e^{\mu\tau}}{\mu + \delta} \left( R(t) - R^* - R^* \ln \frac{R(t)}{R^*} \right)$$

那么

$$\frac{dV_{2,0}(t)}{dt} = \left( 1 - \frac{1 + aS(t)}{1 + aS^*} \frac{S^*}{S(t)} \right) \left[ \mu(S^* - S(t)) + \frac{\beta S^* I^*}{1 + aS^*} - \frac{\beta S(t) I(t)}{1 + aS(t)} \right] + \delta e^{\mu\tau} R(t) + \left( 1 - \frac{I^*}{I(t)} \right) \cdot$$

$$\left[ \frac{\beta S(t-\tau) I(t-\tau)}{1 + aS(t-\tau)} - (\mu + \gamma + \varepsilon) e^{\mu\tau} I(t) \right] + \frac{\delta e^{\mu\tau}}{\mu + \delta} \cdot$$

$$\left[ \gamma I(t) - (\mu + \delta) R(t) - \gamma I(t) \frac{R^*}{R(t)} + (\mu + \delta) R^* \right]$$

另外, 定义

$$V_{2,1}(t) = \beta \int_{S^*}^{S(t)} \left[ \frac{S(\eta) I(\eta)}{1 + aS(\eta)} - \frac{S^* I^*}{1 + aS^*} - \frac{S^* I^*}{1 + aS^*} \ln \frac{S(\eta) I(\eta) (1 + aS^*)}{S^* I^* (1 + aS(\eta))} \right] d\eta$$

构造如下形式的 Lyapunov 泛函

$$V_2(t) = V_{2,0}(t) + V_{2,1}(t)$$

那么

$$\frac{dV_2(t)}{dt} = \left( 1 - \frac{1 + aS(t)}{1 + aS^*} \frac{S^*}{S(t)} \right) \cdot$$

$$\left[ \mu(S^* - S(t)) + \frac{\beta S^* I^*}{1 + aS^*} \right] + \frac{1 + aS(t)}{1 + aS^*} \frac{S^*}{S(t)} \cdot$$

$$\frac{\beta S(t) I(t)}{1 + aS(t)} - (\mu + \gamma + \varepsilon) e^{\mu\tau} I(t) -$$

$$\frac{I^*}{I(t)} \frac{\beta S(t-\tau) I(t-\tau)}{1 + aS(t-\tau)} - \delta e^{\mu\tau} R(t) \frac{I^*}{I(t)} +$$

$$(\mu + \gamma + \varepsilon) e^{\mu\tau} I^* + \frac{\delta e^{\mu\tau}}{\mu + \delta} \gamma I(t) - \frac{\delta e^{\mu\tau}}{\mu + \delta} \gamma I(t) \frac{R^*}{R(t)} +$$

$$\delta e^{\mu\tau} R^* - \frac{\beta S^* I^*}{1 + aS^*} \ln \frac{1 + aS^*}{S^* I^*} \frac{S(t) I(t)}{1 + aS(t)} +$$

$$\frac{\beta S^* I^*}{1 + aS^*} \ln \frac{1 + aS^*}{S^* I^*} \frac{S(t-\tau) I(t-\tau)}{1 + aS(t-\tau)} =$$

$$\left( 1 - \frac{1 + aS(t)}{1 + aS^*} \frac{S^*}{S(t)} \right) \left[ \mu(S^* - S(t)) + \frac{\beta S^* I^*}{1 + aS^*} \right] +$$

$$\frac{1 + aS(t)}{1 + aS^*} \frac{S^*}{S(t)} \frac{\beta S(t) I(t)}{1 + aS(t)} - (\mu + \gamma + \varepsilon) e^{\mu\tau} \cdot$$

$$I^* \frac{I(t)}{I^*} - \frac{\beta S^* I^*}{1 + aS^*} \frac{1 + aS^*}{S^* I^*} \frac{S(t-\tau) I(t-\tau)}{1 + aS(t-\tau)} -$$

$$\delta e^{\mu\tau} R^* \frac{I^*}{R^*} \frac{R(t)}{I(t)} + (\mu + \gamma + \varepsilon) e^{\mu\tau} I^* +$$

$$\frac{\delta e^{\mu\tau}}{\mu + \delta} \gamma I^* \frac{I(t)}{I^*} - \frac{\gamma \delta e^{\mu\tau}}{\mu + \delta} I^* \frac{R^*}{I^*} \frac{I(t)}{R(t)} + \frac{\delta e^{\mu\tau}}{\mu + \delta} \gamma I^* +$$

$$\frac{\beta S^* I^*}{1 + aS^*} \ln \frac{1 + aS(t)}{S(t) I(t)} \frac{S(t-\tau) I(t-\tau)}{1 + aS(t-\tau)} =$$

$$- \mu \frac{(S(t) - S^*)^2}{S(t) (1 + aS^*)} + \frac{\gamma \delta e^{\mu\tau}}{\mu + \delta} I^* \cdot$$

$$\left( 2 - \frac{I^*}{R^*} \frac{R(t)}{I(t)} - \frac{R^*}{I^*} \frac{I(t)}{R(t)} \right) + \frac{\beta S^* I^*}{1 + aS^*} \cdot$$

$$\left[ 2 - \frac{S^*}{S(t)} \frac{1 + aS(t)}{1 + aS^*} + \frac{I(t)}{I^*} - \frac{1 + aS^*}{S^* I^*} \frac{S(t-\tau) I(t-\tau)}{1 + aS(t-\tau)} + \right.$$

$$\ln \frac{1 + aS(t)}{S(t) I(t)} \frac{S(t-\tau) I(t-\tau)}{1 + aS(t-\tau)} \left. \right] =$$

$$- \mu \frac{(S(t) - S^*)^2}{S(t) (1 + aS^*)} + \frac{\gamma \delta e^{\mu\tau}}{\mu + \delta} I^* \cdot$$

$$\left( 2 - \frac{I^*}{R^*} \frac{R(t)}{I(t)} - \frac{R^*}{I^*} \frac{I(t)}{R(t)} \right) + \frac{\beta S^* I^*}{1 + aS^*} \cdot$$

$$\left[ 1 - \frac{S^*}{S(t)} \frac{1 + aS(t)}{1 + aS^*} + \ln \frac{S^*}{S(t)} \frac{1 + aS(t)}{1 + aS^*} + \right.$$

$$1 - \frac{1 + aS^*}{S^* I^*} \frac{S(t-\tau) I(t-\tau)}{1 + aS(t-\tau)} +$$

$$\left. \ln \frac{1 + aS^*}{S^* I^*} \frac{S(t-\tau) I(t-\tau)}{1 + aS(t-\tau)} \right]$$

函数

$$H(t) = 1 - f(t) + \ln f(t)$$

对任意的  $f(t) > 0$ ，都有  $H(t) \leq 0$ ，当且仅当  $f(t) = 1$  时， $H(t) = 0$ 。由上面的讨论和算数几何平均不等式，容易得到  $dV_2/dt \leq 0$  成立，当且仅当  $S(t) = S^*, I(t) = I^*, R(t) = R^*$  时， $dV_2/dt = 0$ 。并注意到当  $R_0 > 1$  时，平衡点  $E_2^0$  是局部渐近稳定的，由和定理 2 类似的证明， $E_2^0$  是全局渐近稳定的，证毕。

**推论 2** 如果  $R_0 > 1$ ，那么系统 (1) 的流行病平衡点  $E_2$  在  $\mathbf{R}_+^4$  的内部是全局渐近稳定的。

### 3 数值模拟

在本部分中，对前面的相关的分析结果做数值模拟，以验证这些结果。其中所采用的数据均是估算值。

**例 1** 取参数值： $A = 0.9, \mu = 0.2, \beta = 0.3, a = 0.2, \delta = 0.2, \gamma = 0.2, \varepsilon = 0.2, \tau = 8$ ，此时经计算  $R_0 = 0.286906 < 1$ ，由推论 1，无病平衡点是全局渐近稳定的。如图 1 所示。

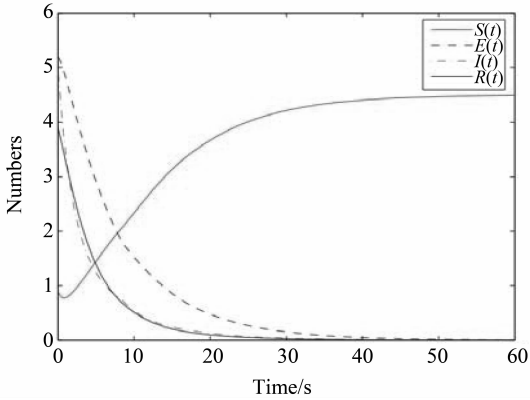


图 1 当  $R_0 < 1$  时，系统 (1) 的无病平衡点  $E_1$  是全局渐近稳定的

Fig. 1 The disease free- equilibrium  $E_1$  is globally asymptotically stable when  $R_0 < 1$

**例 2** 取参数值： $A = 0.9, \mu = 0.2, \beta = 0.3, a = 0.2, \delta = 0.2, \gamma = 0.2, \varepsilon = 0.2, \tau = 0.6$ ，此时经计算  $R_0 = 1.26036 > 1$ ，由推论 2，无病平衡点是全局渐近稳定的。如图 2 所示。

### 4 讨论

在本文中，综合考虑了一类同时具有潜伏时滞，复发因素的 SEIR 传染病模型，并完整地分析了模型的全局稳定性，得到了疾病流行的基本再生

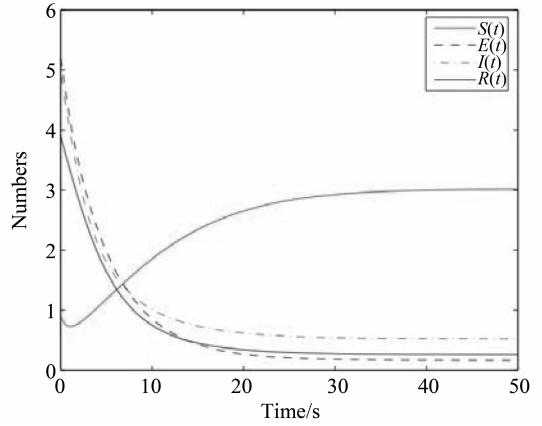


图 2 当  $R_0 > 1$  时，系统 (1) 的流行病平衡点  $E_2$  是全局渐近稳定的

Fig. 2 The epidemic equilibrium  $E_2$  is globally asymptotically stable when  $R_0 > 1$

数  $R_0$ 。如果  $R_0 < 1$ ，系统 (1) 的无病平衡点是全局渐近稳定的。相反，如果  $R_0 > 1$ ，流行病平衡点全局渐近稳定。由基本再生数的表达式容易得到，潜伏时滞越大，有效接触率越低，基本再生数越小而且这种影响对于疾病的流行是指数级的。换言之，有效的控制疾病的潜伏期对于该类疾病的控制起着至关重要的作用，稍加延长疾病处在潜伏期内的时间就有可能大大减少疾病流行的可能性。

### 参考文献：

- [1] FENG Z, HUANG W, CASTILLO-CHAVEZ C. On the role of variable latent periods in mathematical models for tuberculosis [J]. J Dynam Differential Equations, 2001, 13: 425 - 452.
- [2] HUO H, FENG L. Global stability for an HIV/AIDS epidemic model with different latent stages and treatment [J]. Appl Math Model, 2013, 37: 1480 - 1489.
- [3] HETHCOTE H W, VAN DEN DRIESSCHE P. An SIS epidemic model with variable population size and a delay [J]. J Math Biol, 1995, 34: 177 - 194.
- [4] HETHCOTE H W, VAN DEN DRIESSCHE P. Two SIS epidemic models with delays [J]. J Math Biol, 2000, 40: 3 - 26.
- [5] GAO S, CHEN L, TENG Z. Pulse vaccination of an SEIR epidemic model with time delay [J]. Nonlinear Anal, Real World Appl, 2008, 9: 599 - 607.
- [6] VAN DEN DRIESSCHE P, ZOU X. Modeling relapse in infectious diseases [J]. Math Biosci, 2007, 207: 89 - 103.
- [7] CHIN J. Control of communicable diseases manual [M]. Washington: American Public Health Association, 1999.

- recognition of landslide events [J]. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*, 2011, 66(3): 327 - 336.
- [12] 邢正全, 邓喀中. 三维激光扫描技术应用于边坡位移监测[J]. *地理空间信息*, 2011, 1: 68 - 70 + 12.
- [13] MEHRDAD A, MAHDI M, MAHMUD H H. Slope stability assessment of the sarcheshmeh landslide, northeast Iran, investigated using InSAR and GPS observations [J]. *Remote Sensing*, 2013, 5(8): 3681 - 3700.
- [14] LOWRY B, GOMEZ F, ZHOU W, et al. High resolution displacement monitoring of a slow velocity landslide using ground based radar interferometry [J]. *Engineering Geology*, 2013, 166: 160 - 169.
- [15] CHEON D S, JUNG Y B, PARK E S, et al. Evaluation of damage level for rock slopes using acoustic emission technique with waveguides [J]. *Engineering Geology*, 2011, 121(11): 75 - 88.
- [16] 田增国, 陈翠梅, 刘祖强. 三峡工程永久船闸高边坡岩体变形声发射监测[J]. *工程勘察*, 2009, 10: 82 - 86.
- [17] BERY A A, ROSLI S. High resolution time-domain induced polarization tomography with merging data levels by two different optimized arrays for slope monitoring study [J]. *Electronic Journal of Geotechnical Engineering*, 2013, 18: 5921 - 5928.
- [18] 谭捍华, 傅鹤林. TDR 技术在公路边坡监测中的应用试验[J]. *岩土力学*, 2010, 4: 1331 - 1336.
- [19] OCCHIENA C, COVIELLO V, ARATTANO M. Analysis of microseismic signals and temperature recordings for rock slope stability investigations in high mountain areas [J]. *Natural Hazards and Earth System Sciences*, 2012, 12(7): 2283 - 2298.
- [20] 徐奴文, 唐春安, 沙椿, 等. 锦屏一级水电站左岸边坡微震监测系统及其工程应用[J]. *岩石力学与工程学报*, 2010, 5: 915 - 925.
- [21] 何满潮. 滑坡地质灾害远程监测预报系统及其工程应用[J]. *岩石力学与工程学报*, 2009, 28(6): 1081 - 1090.
- [22] 周翠英, 刘祚秋, 尚伟, 等. 膨胀土和软岩边坡加固优化设计的几个关键问题——以东深供水改造工程中 B III<sub>2</sub> 边坡为例[J]. *中山大学学报: 自然科学版*, 2003, 42(3): 127 - 128.
- [23] 张泽鹏, 朱凤贤, 黄放军, 等. 复杂地质条件下高边坡加固设计与综合治理研究——以梅河高速公路某高边坡治理为例[J]. *中山大学学报: 自然科学版*, 2006, 45(4): 44 - 48.

(上接第 29 页)

- [8] MARTIN S W. Livestock disease eradication: evaluation of the cooperative state-federal bovine tuberculosis eradication program [M]. Washington: National Academy Press, 1994.
- [9] VANLANDINGHAM K E, MARSTELLER H B, ROSS G W, et al. Relapse of herpes simplex encephalitis after conventional acyclovir therapy [J]. *JAMA, Am Med Assoc*, 1988, 259: 1051 - 1053.
- [10] ARDITI R, GINZBURG L R. Coupling in predator-prey dynamics: ratio-dependence [J]. *J Theor Biol*, 1989, 139: 311 - 326.
- [11] LI D, MA W. Asymptotic properties of an HIV - 1 infection model with time delay [J]. *J Math Anal Appl*, 2007, 335: 683 - 691.
- [12] COOKE K, VAN DEN DRIESSCHE P. Analysis of an SEIRS epidemic model with two delays [J]. *J Math Biol*, 1996, 35: 240 - 260.
- [13] KUANG Y. Delay differential equations with applications in population dynamics [M]. New York: Academic Press, 1993.
- [14] HALE J K, VERDUYN LUNEL S. Introduction to functional differential equations [M]. New York: Springer, 1993.
- [15] HADDOCK J R, TERJEKI J. Liapunov-Razumikhin functions and an invariance principle for functional-differential equations [J]. *J Differ Equations*, 1983, 48: 95 - 122.