第 53 卷　第 1 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 53　No. 1
2014 年　1 月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　Jan.　2014

带分布时滞的具有尺度结构的种群模型的平衡指数增长*

柏　萌[1]，冯兆永[2]，徐士河[1]，刘成霞[3]
（1. 肇庆学院数学与信息科学学院，广东 肇庆 526061；
2. 中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275；
3. 广东省口腔医院，广东 广州 510280）

摘　要：研究一个带分布时滞的具有尺度结构的种群模型。此模型将个体分为“活跃”期和“休眠”期两个阶段研究。利用算子半群的理论证明了此模型的适定性并证明此模型的解具有平衡指数增长的性质。

关键词：尺度结构；分布时滞；适定性；平衡指数增长；算子半群
中图分类号：O175.22　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529－6579（2014）01－0022－06

Balanced Exponential Growth for a Size-structured Two-phase Population Model with Delayed Birth Process

BAI Meng[1], *FENG Zhaoyong*[2], *XU Shihe*[1], *LIU Chengxia*[3]
（1. School of Mathematics and Information Sciences, Zhaoqing University, Zhaoqing 526061, China;
2. School of Mathematics & Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;
3. Guangdong Provincial Stomatological Hospital, Guangzhou 510280, China）

Abstract: A size-structured two-phase population model with delayed birth process is studied. The well-posedness for this model is established. It is shown that the solution of this model has balanced exponential growth by means of semigroups.

Key words: size-structured populations; distributed delay; well-posedness; balanced exponential growth; semigroups

本文研究如下带分布时滞的具有尺度结构的种群方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial n}{\partial t}+\dfrac{\partial(\gamma_1(x)n)}{\partial x}= -\mu(x)n-\rho_1(x)n+\rho_2(x)m+\nu\displaystyle\int_0^{\bar a}\int_{-\tau}^0\beta(\sigma,x,y)n(t+\sigma,y)\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}y,\\
\qquad 0<x<\bar a,t>0,\\
\dfrac{\partial m}{\partial t}+\dfrac{\partial(\gamma_2(x)m)}{\partial x}=\rho_1(x)n-\rho_2(x)m+(1-\nu)\displaystyle\int_0^{\bar a}\int_{-\tau}^0\beta(\sigma,x,y)n(t+\sigma,y)\,\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}y,\\
\qquad 0<x<\bar a,t>0,\\
n(t,0)=0,t>0,\\
m(t,0)=0,t>0,\\
n(\sigma,x)=n(\sigma,x),\sigma\in[-\tau,0],0<x<\bar a,\\
m(\sigma,x)=m(\sigma,x),\sigma\in[-\tau,0],0<x<\bar a
\end{cases}
\tag{1}
$$

上述方程中未知函数和分别表示的是处于“活跃”期和处于“休眠”期的尺度为的个体在时刻的种群密度，其中表示的是个体的最大尺度。和分别为处于“活跃”期和处于“休眠”期的个体的生长率。$\rho_1(x)$ 和 $\rho_2(x)$ 分别为处于“活跃”期的个体转化为处于“休眠”期的个体和处于“活

* **收稿日期：**2013－05－09
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11171295，11226182，11301474）；肇庆学院自然科学基金资助项目
作者简介：柏萌（1982 年生），女；**研究方向：**偏微分方程；**通讯作者：**冯兆永；E-mail：fzhaoy@mail.sysu.edu.cn

跃”期的个体转化为处于“休眠”期的个体的转化率。只有处于“活跃”期的个体才有死亡和繁育，而且繁育出的新生个体可能处于“活跃”期或者“休眠”期，并且在出生时具有不同的尺度，所以 $\mu(x)$ 为处于“活跃”期的个体的死亡率，$\beta(\sigma,x,y)$ 为尺度为 y 的个体经过时间 $-\sigma(\sigma\in[-\tau,0])$ 的孕育过程产生尺度为 x 的新生个体的概率，其中 $\tau>0$ 最大时滞，并且 ν 是正常数，$0<\nu\leqslant1$。

另外，$\hat{n}(\sigma,x)$ 和 $\hat{m}(\sigma,x)$ 是给定的定义在 $[-\tau,0]\times[0,\bar{a}]$ 上的函数。本文记

$$\hat{n}_0(x)=\hat{n}(0,x),\hat{m}_0(x)=\hat{m}(0,x),\quad 对于 0\leqslant x\leqslant\bar{a} \tag{2}$$

问题（1）是一个具有“活跃”期和“休眠”期两个阶段且出生时状态不定的带尺度结构的种群模型。最近，文［1－2］研究了类似的无时滞的模型。在问题（1）中，考虑新生个体的产生是一个需要经过一段时间的过程。确切的说，问题（1）的分布时滞表示的是怀孕到生产或者产卵到孵化的时间间隔（参见文［3］）。并且这个时间间隔可以从 0 变到 τ。这种考虑分布时滞的思想来自于文献［4］，此文研究了一个带分布时滞的具有年龄结构的种群模型。更多的细节请读者参见文［4－6］。本文主要证明在对 μ，γ_1，γ_2，ρ_1，ρ_2，β 以及 $(\hat{n},\hat{m})$ 一定的假设下，问题（1）是全局适定的，而且其解具有平衡指数增长（balanced exponential growth）的性质。平衡指数增长的定义如下（参见文［1－2，4－5，7－8］）：令 $(T(t))_{t\geqslant0}$ 为 Banach 空间 X 上的强连续半群。$(T(t))_{t\geqslant0}$ 具有平衡指数增长的性质是指存在一个常数 $\lambda_0\in\mathbb{R}$ 和一个 X 上的投影算子 Π 使得

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}T(t)x=\Pi x,对于所有的 x\in X \tag{3}$$

本文将利用平衡指数增长的理论证明问题（1）的解具有这种性质。

本文假设 $\mu(x),\gamma_1(x),\gamma_2(x),\rho_1(x),\rho_2(x),\beta(\sigma,x,y)$ 具有如下性质：

（H1）μ，ρ_1 以及 ρ_2 为定义在 $[0,\bar{a}]$ 上的非负连续函数。

（H2）$\gamma_1,\gamma_2\in C^1[0,\bar{a}]$ 并且对于所有的 $x\in[0,\bar{a}]$，都有 $\gamma_1(x)>0$，$\gamma_2(x)>0$。

（H3）$\beta\in C([-\tau,0]\times[0,\bar{a}]\times[0,\bar{a}])$ 并且 $\beta\geqslant0$。

引入 $W^{1,1}((-\tau,0),L^1[0,\bar{a}]\times L^1[0,\bar{a}])$ 的子集 Λ 如下：

$$\Lambda:=\{(\hat{n},\hat{m})\in W^{1,1}((-\tau,0),L^1[0,\bar{a}]\times L^1[0,\bar{a}]):(\hat{n}_0,\hat{m}_0)\in W^{1,1}(0,\bar{a})\times W^{1,1}(0,\bar{a}),\ \hat{n}_0(0)=0,\hat{m}_0(0)=0\}$$

其中 $\hat{n}_0$，$\hat{m}_0$ 由（2）式定义。由于

$$W^{1,1}((-\tau,0),L^1[0,\bar{a}]\times L^1[0,\bar{a}])\subseteq C((-\tau,0),L^1[0,\bar{a}]\times L^1[0,\bar{a}])$$

则对于任意 $(\hat{n},\hat{m})\in W^{1,1}((-\tau,0),L^1[0,\bar{a}]\times L^1[0,\bar{a}])$，$(\hat{n}_0,\hat{m}_0)$ 的定义是成立。类似的，由于 $(\hat{n}_0,\hat{m}_0)\in W^{1,1}(0,\bar{a})\times W^{1,1}(0,\bar{a})\subseteq C[0,\bar{a}]\times C[0,\bar{a}]$，$(\hat{n}_0(0),\hat{m}_0(0))$ 的定义也是成立的。

本文的第一个定理建立问题（1）的适定性如下。

定理 1　对于任意 $(\hat{n},\hat{m})\in\Lambda$，问题（1）有唯一解 $(n,m)\in C([-\tau,\infty),L^1[0,\bar{a}]\times L^1[0,\bar{a}])\cap C([0,\infty),W^{1,1}(0,\bar{a})\times W^{1,1}(0,\bar{a}))\cap C^1([0,\infty),L^1[0,\bar{a}]\times L^1[0,\bar{a}])$。并且对于任意 $T>0$，由 Λ 到 $C([-\tau,T),L^1[0,\bar{a}]\times L^1[0,\bar{a}])\cap C([0,T),W^{1,1}(0,\bar{a})\times W^{1,1}(0,\bar{a}))\cap C^1([0,T),L^1[0,\bar{a}]\times L^1[0,\bar{a}])$ 的映射 $(\hat{n},\hat{m})\to(n,m)$ 是连续的。

此定理的证明在本文的第 1 节给出。

事实上，由定理 1 的证明过程，可得对于任意的 $F\in\Sigma$，这里

$$\Sigma:=L^1([-\tau,0],L^1[0,\bar{a}]\times L^1[0,\bar{a}])$$

问题（1）有唯一的温和解（mild solution）(n,m)，即函数 $[t\to[(\sigma,x)\to(n(t+\sigma,x),m(t+\sigma,x))]]\in C([0,\infty),\Sigma)$ 并且在适当的意义下满足一个与问题（1）等价的积分方程。对于每一个 $t\geqslant0$，这定义了一个算子 $\mathfrak{T}(t):\Sigma\to\Sigma$，$\mathfrak{T}(t)F:=(n(t+\cdot,\cdot),m(t+\cdot,\cdot))$。稍后将证明是 Σ 上的强连续半群。

本文的第二个结论研究此半群的渐近性态如下：

定理 2　存在 Σ 上的投影算子 Π 以及常数 $\lambda_0\in\mathbb{R}$，$\varepsilon>0$，$M\geqslant1$ 使得

$$\|\mathrm{e}^{-\lambda_0 t}\mathfrak{T}(t)-\Pi\|\leqslant M\mathrm{e}^{-\varepsilon t},对于 t\geqslant0,$$

这里 $\|\cdot\|$ 表示的是 Σ 上的算子范数。

此定理的证明将在第 2 节给出。特别地，参数 λ_0 被称为本质自然增长率（intrinsic rate of natural increase）或者是马尔萨斯参数（参见文［7］）。

本文的结构如下：第 1 节将问题（1）转化为 Banach 空间上的抽象柯西问题并利用强连续算子半群理论建立其适定性。第 2 节将证明问题（1）的解具有平衡指数增长的性质。

1　转化及适定性

本节将问题（1）转化为抽象的柯西问题并利

用强连续算子半群方法建立其适定性。读者可以在文献［4－6］中找到相似的转化方法。

首先，引入 Banach 空间 $X:=L^1[0,\bar{a}]\times L^1[0,\bar{a}]$ 和 $E:=L^1([-\tau,0],X)$ 中的算子

$A(u,v)=(-(\gamma_1(\cdot)u)',-(\gamma_2(\cdot)v)')$

定义域 $D(A)=\{(u,v)\in W^{1,1}(0,\bar{a})\times W^{1,1}(0,\bar{a}):u(0)=0,v(0)=0\}$；

$B(u,v)=(-(\mu(\cdot)+\rho_1(\cdot))u+\rho_2(\cdot)v,\rho_1(\cdot)u-\rho_2(\cdot)v)$，对于 $(u,v)\in X$；

$C(\tilde{u},\tilde{v})=(\nu C_1(\tilde{u},\tilde{v}),(1-\nu)C_1(\tilde{u},\tilde{v}))$，对于 $(\tilde{u},\tilde{v})\in E$

此处

$$C_1(\tilde{u},\tilde{v})=\int_0^{\bar{a}}\int_{-\tau}^0\beta(\sigma,\cdot,y)\tilde{u}(\sigma,y)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}y$$

注意到 $A\in L(D(A),X)$，$B\in L(X)$ 以及 $C\in L(E,X)$。利用以上记号，将问题（1）重新写为 Banach 空间 X 上的延迟微分方程的初边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}U(t)}{\mathrm{d}t}=(A+B)U(t)+CU_t,t\geqslant 0,\\ U(0)=(\hat{n}_0,\hat{m}_0),\\ U_0=(\hat{n},\hat{m})\end{cases}\tag{4}$$

这里 $U:[0,+\infty)\to X$ 定义为 $U(t):=(n(t,\cdot),m(t,\cdot))$，$U_t:[-\tau,0]\to X$ 定义为 $U_t(\sigma):=(n(t+\sigma,\cdot),m(t+\sigma,\cdot))$，$\sigma\in[-\tau,0]$。

注 1 如果函数 $U:[-\tau,+\infty]\to X$ 满足 $U\in C([-\tau,+\infty),W^{1,1}(0,\bar{a})\times W^{1,1}(0,\bar{a}))\cap C([0,+\infty),D(A))\cap C^1([0,+\infty),X)$ 且在通常的意义下满足问题（4），则称此函数是问题（4）的一个经典解。显然，问题（4）有经典解的必要条件是 $(\hat{n},\hat{m})\in W^{1,1}([-\tau,0],X)$ 且由（2）式定义的 $(\hat{n}_0,\hat{m}_0)\in D(A)$。

接下来，引入 Banach 空间 E 上的如下算子。

$$(G\tilde{U})(\sigma):=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma}\tilde{U}$$

定义域 $D(G)=W^{1,1}([-\tau,0],X)$；

$$Q\tilde{U}:=\tilde{U}(0)\text{，对于 }\tilde{U}\in D(G)$$

注意到 $G\in L(D(G),E)$ 且 $Q\in L(D(G),X)$。现在令 $\mathfrak{E}:=E\times X$，并引入 $\mathfrak{E}$ 上的算子 $\mathbb{A}_0$，$\mathbb{B}$ 和 $\mathbb{A}$ 如下：

$$\mathbb{A}_0\begin{pmatrix}\tilde{U}\\ U\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}G & 0\\ 0 & A+B\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{U}\\ U\end{pmatrix},\text{定义域 }D(\mathbb{A}_0):=\left\{\begin{pmatrix}\tilde{U}\\ U\end{pmatrix}\in D(G)\times D(A):Q\tilde{U}=U\right\};$$

$$\mathbb{B}\begin{pmatrix}\tilde{U}\\ U\end{pmatrix}:=\begin{pmatrix}0 & 0\\ C & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{U}\\ U\end{pmatrix},\text{对于}\begin{pmatrix}\tilde{U}\\ U\end{pmatrix}\in\mathfrak{E},$$

$$\mathbb{A}=\mathbb{A}_0+\mathbb{A},\text{定义域 }D(\mathbb{A}):=D(\mathbb{A}_0)$$

注意到 $\mathbb{A}_0\in L(D(\mathbb{A}),\mathfrak{E})$，$\mathbb{B}\in L(\mathfrak{E},\mathfrak{E})$ 以及 $\mathbb{A}\in L(D(\mathbb{A}),\mathfrak{E})$。利用上述记号，问题（4）可以等价写为 Banach 空间 $\mathfrak{E}$ 中的抽象微分方程的初值问题

$$\begin{cases}\mathbb{U}'(t)=\mathbb{A}\mathbb{U}(t),t>0,\\ \mathbb{U}(0)=\mathbb{U}_0\end{cases}\tag{5}$$

其中 $\mathbb{U}(t)=\begin{pmatrix}U_t\\ U(t)\end{pmatrix}$ 以及 $\mathbb{U}_0=\begin{pmatrix}U_0\\ U(0)\end{pmatrix}$。

注 2 称函数 $\mathbb{U}:\mathbb{R}_+:=[0,+\infty)\to\mathfrak{E}$ 是问题（5）的经典解，如果 $\mathbb{U}\in C([0,+\infty),D(\mathbb{A}))\cap C^1([0,+\infty),\mathfrak{E})$ 且在通常的意义下满足问题（5）。

为更清晰说明问题。写出如下引理：

引理 1 令注记 2 中的必要条件满足。则如果 $U:[-\tau,+\infty)\to X$ 是问题（4）的经典解，则 $\mathbb{U}(t)=\begin{pmatrix}U_t\\ U(t)\end{pmatrix}$ 是问题（5）的经典解。反之，如果 $\mathbb{U}$ 是问题（5）的经典解，则 $\mathbb{U}$ 对于所有的 $t\geqslant 0$，有如下形式 $\mathbb{U}(t)=\begin{pmatrix}U_t\\ U(t)\end{pmatrix}$，并且将第二分支 $U=U(t)$ 扩展到 $[-\tau,+\infty)$ 使得当 $t\in[-\tau,0)$ 时，$U(t)=U_0$，即可得问题（4）的经典解。

证明 仅需要证明如果 $\mathbb{U}$ 是问题（5）的一个经典解，则 $\mathbb{U}$ 对于所有 $t\geqslant 0$ 如下形式 $\mathbb{U}(t)=\begin{pmatrix}U_t\\ U(t)\end{pmatrix}$。为此假设对于 $t\geqslant 0$，$\mathbb{U}(t)=\begin{pmatrix}H(t)\\ U(t)\end{pmatrix}$。由于 $\mathbb{U}\in C([0,+\infty),D(\mathbb{A}))$，对于所有的 $t\geqslant 0$，有 $QH(t)=U(t)$，即对于所有的 $t\geqslant 0$，$H(t)(0)=U(t)$（已知对于每个 $t\geqslant 0$，$H(t)\in W^{1,1}([-\tau,0],X)$）。令 $V(t,\sigma)=H(t)(\sigma)$（对于 $t\geqslant 0$ 以及 $\sigma\in[-\tau,0)$）。于是由 H 满足的方程可得 V 满足方程 $\partial V/\partial t-\partial V/\partial\sigma=0$，因此这是一个左行波，即，有 $V(t,\sigma)=L(t+\sigma)$，此处 $L(s)=(l_1(s),l_2(s))$ 为定义在 $s\geqslant-\tau$ 上的函数。对于 $s\geqslant 0$，有 $L(s)=V(s,0)=H(s)(0)=U(s)$。因此，对于 $t+\sigma\geqslant 0$，有

$$H(t)(\sigma)=V(t,\sigma)=L(t+\sigma)=U(t+\sigma)=U_t(\sigma)$$

另外，由于 $H(0)(\sigma)=(\hat{n}(\sigma,\cdot),\hat{m}(\sigma,\cdot))$ 以及当 $-\tau\leqslant t+\sigma<0$ 时，$H(t)(\sigma)=V(t,\sigma)=L(t+\sigma)$，有当 $s\in[-\tau,0)$ 时，$L(s)=(\hat{n}(s,\cdot),\hat{m}(s,\cdot))$ 以及当 $t+\sigma\in[-\tau,0)$ 时，$H(t)(\sigma)=(\hat{n}(t+\sigma,\cdot),\hat{m}(t+\sigma,\cdot))$。因此，通过定义

$U(t) = (\hat{n}(t,\cdot),\hat{m}(t,\cdot))(t \in [-\tau,0])$，可得对于所有的 $t \geq 0$ 和 $\sigma \in [-\tau,0]$，$H(t)(\sigma) = U_t(\sigma)$。此引理得证。

接下来，考虑由算子 $\mathbb{A}$ 生成的半群。对于算子 $\mathbb{A}$ 的主要部分 $\mathbb{A}_0$，有如下引理：

引理 2　矩阵算子 $\mathbb{A}_0$ 中的元素算子 $A+B$ 在 X 上生成强连续半群 $(T_0(t))_{t\geq 0}$。

证明　算子 A 生成 X 上的幂零半群（见文［1］中定理 2.1 与文［9］中定理 2.1）。因为 $B \in L(X)$，由 Banach 空间强连续半群生成元的扰动定理（见文［8］中的定理 III. 1.3），此引理得证。

引理 3　算子 $\mathbb{A}_0$ 生成 $\mathfrak{E}$ 上的强连续半群 $(\mathbb{T}_0(t))_{t\geq 0}$，如下

$$\mathbb{T}_0(t) := \begin{pmatrix} S(t) & T_t \\ 0 & T_0(t) \end{pmatrix} \tag{6}$$

其中 $(S(t))_{t\geq 0}$ 是 E 上的幂零左移半群，如下

$$(S(t)\tilde{F})(\sigma,x) = \begin{cases} \tilde{F}(t+\sigma,x), 如果\ \sigma+t \leq 0, \\ 0, 如果\ \sigma+t > 0 \end{cases} \tag{7}$$

以及 $T_t:X \to E$ 是如下定义的线性算子：

$$T_t(t)F = \begin{cases} T_0(t+\sigma)F, 如果\ \sigma+t > 0, \\ 0, 如果\ \sigma+t \leq 0 \end{cases} \tag{8}$$

证明　见文［6］中命题 3.1 和文［8］中引理 IV. 1.2。

因为 $\mathbb{B} \in L(\mathfrak{E})$，根据 Banach 空间强连续算子生成元的扰动定理（见文［8］中定理 III. 1.3），可得如下引理：

引理 4　算子 $\mathbb{A}$ 生成 $\mathfrak{E}$ 上的强连续半群 $(\mathbb{T}(t))_{t\geq 0}$。

由以上引理与强连续算子半群理论，可得以下结论。

定理 3　对于任意给定的初值 $\mathbb{U}_0 = \begin{pmatrix} U_0 \\ U(0) \end{pmatrix} \in D(\mathbb{A})$，问题（5）有唯一解 $\mathbb{U} \in C([0,+\infty),D(\mathbb{A})) \cap C^1([0,+\infty),\mathfrak{E})$，如下：

$$\mathbb{U}(t) = \mathbb{T}(t)\begin{pmatrix} U_0 \\ U(0) \end{pmatrix}, 对于\ t \geq 0$$

由引理 1 和定理 3，可得定理 1 成立。

2　平衡指数增长

本节研究问题（1）的渐近性态。将证明半群 $(\mathbb{T}(t))_{t\geq 0}$ 在 $\mathfrak{E}$ 上具有平衡指数增长的性质。回忆文［8］和［10］中的几个概念：称 Banach 空间 X 上的强连续半群 $(T(t))_{t\geq 0}$ 是正的，如果对于所有的 $t \geq 0$，都有当 $0 \leq f \in X$ 时，$T(t)f \geq 0$；称其是最终紧的，如果存在 $t_0 \geq 0$，使得对于所有的 $t \geq t_0$，算子 $T(t)$ 是紧的。记 $s(A)$ 为半群 $(T(t))_{t\geq 0}$ 生成元算子 A 的谱上界，即

$$s(A) = \sup\{\mathrm{Re}\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$$

$\omega_{ess}(A)$ 为半群 $(T(t))_{t\geq 0}$ 生成元算子 A 的本质谱，即

$$\omega_{ess}(A) = \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\log T(t)_{ess} \tag{9}$$

如果证明了 $s(\mathbb{A}) \in \sigma(\mathbb{A})$ 且半群 $(\mathbb{T}(t))_{t\geq 0}$ 是本质紧的，即，$\omega_{ess}(\mathbb{A}) < s(\mathbb{A})$，根据强连续半群的理论[1,8,10-11]，半群 $(\mathbb{T}(t))_{t\geq 0}$ 在 $\mathfrak{E}$ 上具有平衡指数增长的性质。

引理 5　由算子 $\mathbb{A}$ 生成的半群 $(\mathbb{T}(t))_{t\geq 0}$ 是正的。

证明　由于 $\mathbb{B}$ 是 $\mathfrak{E}$ 上正的有界线性算子，那么只要证明由 $\mathbb{A}_0$ 生成的半群 $(\mathbb{T}_0(t))_{t\geq 0}$ 是正的，此引理即可得证（见文［8］中的推论 VI. 1.11）。由于 $(S(t))_{t\geq 0}$ 是正的，从 $(\mathbb{T}_0(t))_{t\geq 0}$ 的表达式（6）可得，只用证明了由 $A+B$ 生成的半群 $(T_0(t))_{t\geq 0}$ 是正的。为此，将算子 B 分成两个算子的和，即 $B = B_0 + B_1$，其中

$$B_0(u,v) = (-(\mu(\cdot)+\rho_1(\cdot))u, -\rho_2(\cdot)v), 对于(u,v) \in X \tag{10}$$

$$B_1(u,v) = (\rho_2(\cdot)v, \rho_1(\cdot)u), 对于(u,v) \in X \tag{11}$$

则 $A+B = A+B_0+B_1$。由于 B_1 是 X 上的正的有界线性算子，现只用证明由 $A+B_0$ 生成的半群 $(T_1(t))_{t\geq 0}$ 是正的即可。

令 $F \in X$ 并且 $U(t) = T_1(t)F$。如果令 $F = (f_1,f_2)$ 以及 $U(t) = (u_1(t,\cdot),u_2(t,\cdot))$，则 (u_1,u_2) 是如下问题的解

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + \dfrac{\partial(\gamma_1(x)u_1)}{\partial x} = -(\mu(x)+\rho_1(x))u_1(t,x), \\ \quad 0 \leq x \leq \bar{a}, t > 0, \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} + \dfrac{\partial(\gamma_2(x)u_2)}{\partial x} = -\rho_2(x)u_2(t,x), \\ \quad 0 \leq x \leq \bar{a}, t > 0, \\ u_1(t,0) = 0, t > 0, \\ u_2(t,0) = 0, t > 0, \\ u_1(0,x) = f_1(x), 0 \leq x \leq \bar{a}, \\ u_2(0,x) = f_2(x), 0 \leq x \leq \bar{a} \end{cases} \tag{12}$$

如果令 $\gamma_i(t,x)(i=1,2)$ 为以下方程的解

$$\frac{\mathrm{d}\gamma_i(t,x)}{\mathrm{d}t} = \gamma_i(\gamma_i(t,x)), \gamma_i(0,x) = x,$$

$$对于\ i=1,2 \tag{13}$$

可得

$$\nu_i(t,x)=\Gamma_i^{-1}(t+\Gamma_i(x)),对于\ i=1,2$$

其中

$$\Gamma_i(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}\xi}{\gamma_i(\xi)}$$

于是问题（12）的解有如下表示：对于 $i=1,2$，

$$u_i(t,x)=\begin{cases}\dfrac{E_i(x)\gamma_i(\gamma_i(-t,x))}{\gamma_i(x)E_i(\gamma_i(-t,x))}f_i(\gamma_i(-t,x)),\\ \qquad 当\ 0<\gamma_i(-t,x)\ 时,\\ 0,其它\end{cases} \tag{14}$$

其中

$$E_1(x)=\exp\left\{-\int_0^x\frac{\lambda+\mu(s)+\rho_1(s)+\gamma'_1(s)}{\gamma_1(s)}\mathrm{d}s\right\},$$

$$E_2(x)=\exp\left\{-\int_0^x\frac{\lambda+\rho_2(s)+\gamma'_2(s)}{\gamma_2(s)}\mathrm{d}s\right\}$$

由上述式子可见如果 $(f_1,f_2)\geqslant 0$，则对于所有的 $t\geqslant 0$，都有 $(u_1(t,\cdot),u_2(t,\cdot))\geqslant 0$。综上所述，此引理得证。

引理 6 由算子 $\mathbb{A}$ 生成的半群 $(\mathbb{T}(t))_{t\geqslant 0}$ 是最终紧的。

证明 由文献［1］中引理 3.6 的证明，可得当 $t>\Gamma$ 时，$\mathbb{T}_0(t)=0$，此处 $\Gamma=\max\{\Gamma_1(\bar{a}),\Gamma_2(\bar{a})\}$。由（8）式可得当 $t>\Gamma+\tau$ 时，$T_t(t)=0$。因此，由（6）式可得当 $t>\Gamma+\tau$ 时，半群 $\mathbb{T}_0(t)=0$。这表明对于所有的 $t>\Gamma+\tau$，是紧的。所以，由文［8］中命题 III. 1.14，只要证明了 $\mathbb{B}$ 是紧的，此引理即可得证。由于算子矩阵 $\mathbb{B}$ 中唯一的非零元素是 $C:E\to X$，则利用类似于文［1］中引理 3.6 以及文［2］中定理 12 的方法证明算子 C 是紧的。由

$$\left|\int_0^{\bar{a}}\int_{-\tau}^0\beta(\sigma,x,y)\tilde{u}(\sigma,y)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}y-\int_0^{\bar{a}}\int_{-\tau}^0\beta(\sigma,x',y)\tilde{u}(\sigma,y)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}y\right|\leqslant$$
$$\int_0^{\bar{a}}\int_{-\tau}^0|\beta(\sigma,x,y)-\beta(\sigma,x',y)\|\tilde{u}(\sigma,y)|\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}y\leqslant$$
$$\|\beta(\sigma,x,y)-\beta(\sigma,x',y)\|_\infty\|\tilde{u}(\sigma,y)\|_{L^1([-\tau,0],L^1[0,\bar{a}])} \tag{15}$$

以及 β 的连续性，根据 L^1 中的 Fréchet-Kolmogorov 紧性准则，可得算子 C 是紧的。因此此引理得证。

由引理 6 的证明，可得当 $t>\Gamma+\tau$ 时，半群 $\mathbb{T}_o(t)=0$。则由定义（10），得 $\omega_{ess}(\mathbb{A}_0)=-\infty$。因为 $\mathbb{B}$ 在 $\mathfrak{E}$ 上是紧的，根据文［8］中命题 IV 2.12，可得如下结论。

引理 7 $\omega_{ess}(\mathbb{A})=-\infty$。

为了证明 $\omega_{ess}(\mathbb{A})<s(\mathbb{A})$，需证如下引理：

引理 8 $s(\mathbb{A})>-\infty$。

证明 假设 $0\leqslant\beta^*(\sigma,x,y)=\beta_1(x)\beta_2(\sigma,y)\leqslant\beta(\sigma,x,y)$（参见文［1-2］），并定义 C^* 和 $\mathbb{B}^*$ 为相应的由 β^* 定义的算子。考虑算子 $\mathbb{A}^*=\mathbb{A}_0^*+\mathbb{B}^*$，这里

$$\mathbb{A}_0^*\begin{pmatrix}\tilde{U}\\ U\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}G & 0\\ 0 & A+B_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{U}\\ U\end{pmatrix},$$

定义域 $\qquad D(\mathbb{A}_0^*)=D(\mathbb{A}_0)$

并且 B_0 由（10）式定义。由文［8］中的推论 VI 1.11，可得 $s(\mathbb{A}^*)\leqslant s(\mathbb{A})$。如果证明了 $s(\mathbb{A}^*)>-\infty$，则此引理得证。为此需证 $\mathbb{A}^*$ 的谱不是空集。考虑特征问题

$$(\lambda I-\mathbb{A}^*)\mathbb{U}=0 \tag{16}$$

令 $\mathbb{U}=(\tilde{U}(\sigma,x),U(x))$，此处 $\tilde{U}(\sigma,x)=(\tilde{u}(\sigma,x),\tilde{v}(\sigma,x))$ 以及 $U(x)=(u(x),v(x))$，可将上述特征问题写为如下方程

$$\begin{cases}\lambda\tilde{u}(\sigma,x)-\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\tilde{u}(\sigma,x)=0,\\ \qquad -\tau<\sigma<0,0<x<\bar{a},\\ \lambda\tilde{v}(\sigma,x)-\dfrac{\partial}{\partial\sigma}\tilde{v}(\sigma,x)=0,\\ \qquad -\tau<\sigma<0,0<x<\bar{a},\\ \lambda u(x)+\dfrac{\mathrm{d}(\gamma_1(x)u(x))}{\mathrm{d}x}=\\ \qquad -\mu(x)u(x)-\rho_1(x)u(x)+\\ \nu\displaystyle\int_0^{\bar{a}}\int_{-\tau}^0\beta_1(x)\beta_2(\sigma,y)u(y)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}y,0<x<\bar{a},t>0,\\ \lambda v(x)+\dfrac{\mathrm{d}(\gamma_2(x)v(x))}{\mathrm{d}x}=-\rho_2(x)v(x)+\\ \qquad (1-\nu)\displaystyle\int_0^{\bar{a}}\int_{-\tau}^0\beta_1(x)\beta_2(\sigma,y)u(y)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}y,\\ \qquad 0<x<\bar{a},t>0,\\ \tilde{u}(0,x)=u(x),0<x<\bar{a},\\ \tilde{v}(0,x)=v(x),0<x<\bar{a},\\ u(0)=0,\\ v(0)=0\end{cases} \tag{17}$$

则

$$u=vE_{1\lambda}(x)\int_0^x E_{1\lambda}(s)\gamma_1(s)^{-1}\beta_1(s)\cdot$$
$$\int_0^{\bar{a}}\int_{-\tau}^0\beta_2(\sigma,y)\mathrm{e}^{\lambda\sigma}u(y)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}y\mathrm{d}s \tag{18}$$

此处 $E_{1\lambda}(x)=\exp\left\{-\int_0^x\dfrac{\lambda+\mu(s)+\rho_1(s)+\gamma'_1(s)}{\gamma_1(s)}\mathrm{d}s\right\}$

将（18）式两边同时乘以 $\beta_2(\sigma,x)\mathrm{e}^{\lambda\sigma}$ 并且关于 σ 从 $-\tau$ 积分到 0，关于 x 从 0 积分到 m，可得

$$\int_0^{\bar{a}}\int_{-\tau}^0\mathrm{e}^{\lambda\sigma}\beta_2(\sigma,x)u(x)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}x=$$

$$\int_0^{\bar{a}}\int_{-\tau}^0 e^{\lambda\sigma}\beta_2(\sigma,y)u(y)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}y \cdot$$

$$\int_0^{\bar{a}}\int_{-\tau}^0 e^{\lambda\sigma}\beta_2(\sigma,x)\int_0^x \frac{E_{1\lambda}(x)\beta_1(s)}{E_{1\lambda}(s)\gamma_1(s)}\mathrm{d}s\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}x \quad (19)$$

由于 $\int_0^{\bar{a}}\int_{-\tau}^0 e^{\lambda\sigma}\beta_2(\sigma,x)u(x)\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}x \neq 0$，则由（19）式可得

$$1 = \int_0^{\bar{a}}\int_{-\tau}^0 e^{\lambda\sigma}\beta_2(\sigma,x)\int_0^x \frac{\beta_1(s)}{\gamma_1(s)} \cdot \exp\left\{-\int_s^x \frac{\lambda+\mu(s)+\rho_1(s)+\gamma'_1(s)}{\gamma_1(s)}\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}s\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}x \quad (20)$$

令 $K(\lambda) = \int_0^{\bar{a}}\int_{-\tau}^0 e^{\lambda\sigma}\beta_2(\sigma,x)\int_0^x \frac{\beta_1(s)}{\gamma_1(s)} \cdot \exp\left\{-\int_s^x \frac{\lambda+\mu(s)+\rho_1(s)+\gamma'_1(s)}{\gamma_1(s)}\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}s\mathrm{d}\sigma\mathrm{d}x$

函数 $K(\lambda)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是连续严格递增的，并且有 $\lim_{\lambda\to+\infty} K(\lambda) = 0$ 以及 $\lim_{\lambda\to-\infty} K(\lambda) = +\infty$。于是，方程 $K(\lambda) = 1$ 有唯一实数解 λ_0。因此，$\mathbb{A}^*$ 的谱不是空集。此引理得证。

由半群 $(\mathbb{T}(t))_{t\geqslant 0}$ 的正性和 $s(\mathbb{A}) > -\infty$（见文［8］中的定理 *VI*. 1. 10），以及引理 7 和引理 8，可得如下结论：

推论 1　$s(\mathbb{A}) \leqslant \sigma(\mathbb{A})$ 且 $\omega_{ess}(\mathbb{A}) < s(\mathbb{A})$。

由引理 7 和推论 1，可得存在一个 $\mathfrak{E}$ 上的投影算子 Π 以及常数 $\varepsilon > 0$ 和 $M \geqslant 1$ 使得

$\| e^{-s(\mathbb{A})t}\mathbb{T}(t) - \Pi \| \leqslant Me^{-\varepsilon t}$，对于所有的 $t \geqslant 0$

其中 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathfrak{E}$ 上的算子范数。于是定理 2 得证。

参考文献：

［1］ FARKAS J Z, HINOW P. On a size-structured two-phase population model with infinite states-at-birth［J］. Positivity, 2010, 14(3): 501－514.

［2］ FARKAS J Z, GREEN D W, HINOW P. Semigroup analysis of structured parasite populations［J］. Mathematical Modelling of Natural Phenomena, 2010, 5: 94－114.

［3］ AUSLANDER D M, OSTER G F, HUFFAKER C B. Dynamics of interacting populations［J］. J Franklin Inst, 1974, 297: 345－376.

［4］ PIAZZERA S, TONETTO L. Asynchronous exponential growth for an age dependent population equation with delayed birth process［J］. J Evol Equ, 2005, 5: 61－77.

［5］ PIAZZERA S. An age dependent population equation with delayed birth process［J］. Math Methods Appl Sci, 2004, 27: 427－439.

［6］ BÁTKAI A, PIAZZERA S. Semigroups and linear partial differential equations with delay［J］. J Math Anal Appl, 2001, 264: 1－20.

［7］ THIEME H R. Balanced exponential growth of operator semigroups［J］. J Math Anal Appl,1998,223:30－49.

［8］ ENGEL K J, NAGEL R. One-parameter semigroups for linear evolution equations［M］. New York: Springer, 2000.

［9］ FARKAS J Z, HAGEN T. Stability and regularity results for a size-structured population model［J］. J Math Anal Appl, 2007, 328: 119－136.

［10］ ARENDT W, GRABOSCH A, GREINER G, et al. One-parameter semigroups of positive operators［M］. Berlin: Springer-Verlag, 1986.

［11］ CLÉMENT P, HEIJMANS H, ANGENENT S, et al. One-parameter semigroups［M］. Amsterdam: North-holland, 1987.

（上接第 21 页）

［9］ DAHMEN W, GOODMAN T N T, MICCHELLI A. Compactly supported fundamental functions for spline interpolation［J］. Numerische Mathematik, 1988, 52(6): 639－664.

［10］ RIEMENSCHNEIDER S D, SHEN Z W. General interpolation on the lattices: compactly supported fundamental solutions［J］. Numerische Mathematik, 1995, 70: 331－351.

［11］ 余建德，黄静. 基于多结点样条的自由曲线最小误差逼近及其应用［C］//全国 15 届电脑辅助设计与图形学学术会议 CADCG2008, 2008.

［12］ FORSEY D R, BARTELS R H. Surface fitting with hierarchical spline［J］. ACM Transactions on Graphics, 1995, 14(2): 134－161.

［13］ 平劲松，黄倩，鄢建国，等. 基于嫦娥一号卫星激光测高观测的月球地形模型 CLTM-s01［J］. 中国科学, 2008, 53（11）: 1601－1612.