

耦合集合卡尔曼滤波的非线性参数估计*

张亦汉¹, 乔纪纲¹, 陈逸敏²

- (1. 广东财经大学地理与旅游学院, 广东 广州 510320;
2. 中山大学地理科学与规划学院//广东省城市化与地理环境空间模拟重点实验室,
广东 广州 510275)

摘要: 准确的参数对于非线性模型或者函数有极为重要的意义。但是在实际应用中, 输入的参数常常带有一定的偏差, 因此在预测中非线性模型(函数)往往得不到满意的结果。把集合卡尔曼滤波方法引入到非线性模型(函数)的参数估计中, 并采用基于联合状态向量的方法在同化时刻同时更新模型(函数)的状态和参数, 该方法可以通过同化观测数据, 动态地调整参数和结果, 使得参数能够自适应地变化, 同时也能较好地释放积累的模型误差。将该方法应用于随时间变化的二维非线性模型(函数)中, 实验表明, 该方法能够准确地估计出模型参数值, 同时也表现出很好的鲁棒性和自适应性。

关键词: 非线性参数估计; 数据同化; 集合卡尔曼滤波; 联合状态向量

中图分类号: N93 文献标志码: A 文章编号: 0529-6579(2014)01-0028-06

Nonlinear Parameter Estimation by Coupling Ensemble Kalman Filter

ZHANG Yihan¹, QIAO Jigang¹, CHEN Yimin²

- (1. School of Geography and Tourism, Guangdong University of Finance and Economics,
Guangzhou 501320, China;
2. Guangdong Key Laboratory for Urbanization and Geo-simulation//School of Geography and Planning,
Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: It is very important for model or function to have exact input parameters. However, the input parameters often have some error in practical application. The parameter error will lead to larger model error in prediction of non-linear model (parameter). Ensemble Kalman filter is introduced into non-linear model (parameter) for parameter estimation. And joint state vector is used to update model parameter and state in the same assimilation time. The method can dynamically adjust model parameters and states according to changing environment by assimilating observation data. And more importantly, it can release the accumulated model error. The method is applied to two-dimension non-linear model which changes with time step. Studies show that the method can obtain ideal results in parameter estimation. It also has good performance in robustness and self-adaption.

Key words: nonlinear parameter estimation; data assimilation; ensemble Kalman filter; joint state vector

参数估计最早应用于线性模型。1794年, 高斯运用最小二乘法从有误差的观测值中得出待定的最优参数值, 而在1809年才正式发表他的方法。

而后马尔可夫于1900年证明了最小二乘法估计的方差是最小这一性质, 从而确定了该方法在模型参数估计中的地位^[1]。有些学者认为, 在估计参数

* 收稿日期: 2013-05-27

基金项目: 国家重点基础研究发展规划“973”资助项目(2011CB707103); 国家自然科学基金资助项目(41301408); 广东省自然科学基金资助项目(S2013040016071)

作者简介: 张亦汉(1985年生), 男; 研究方向: 地理信息模型; 通讯作者: 乔纪纲; E-mail: qjg821@263.net

之前，往往对参数已有一定认识的，称为先验信息。根据这种先验信息，将待估计的参数看作随机变量，并给出先验分布。再根据先验分布来进行估计。这种估计方法为贝叶斯方法，它可以充分顾及参数的先验信息，对参数做出更为精确有估计^[2]。随后，线性模型参数估计理论趋于成熟，成果也比较多^[3]。

在现实中，实际模型往往并不是线性的，而是非线性模型，甚至是高度非线性的。有些学者尝试用线性模型的近似方法来处理非线性问题。该方法是将非线性模型展开为泰勒级数，略去二阶以上的项，取剩下的部分。这种近似方法必然会带来模型误差，有时会得出与事实不相符的结果^[1]。因此，非线性模型应该用非线性的方法去处理。非线性问题要比线性问题复杂得多，许多国家专门成立了非线性研究机构，并设立相关的研究课题，因此引起了学者们的广泛关注，并开展了相关的研究工作^[1]。1980年，加拿大学者 Bates 和 Watts 引入曲率，非线性问题得到了快速的发展^[4]。Blaha 研究了非线性最小二乘无迭代求解理论^[5]。张松林和王新洲采用了半参数估计方法，他们把非线性模型泰勒展开式中的高阶部分用光滑非参数向量来表示^[6]。有些学者认为扩展卡尔曼滤波（Extended Kalman Filter, EKF）是解决非线性模型的参数估计问题的最常用的方法^[7]。但是 EKF 有一个弱点就是在强非线性条件下容易造成发散，同时该方法还需要模型的切线性模型和用于计算误差协方差矩阵的巨大运算量^[8]。为了能够在强非线性模型中控制算法的发散，Evensen 根据 Epstein 的随机动力预报理论提出了集合卡尔曼滤波（EnKF）算法，该算法避免了 EKF 需要模型切线性模型的问题，也避免了计算误差协方差矩阵^[9]。Aksoy 认为采用联合状态向量策略的集合卡尔曼滤波还能够很好地进行参数估计^[10]。

本文拟引入基于联合状态向量的集合卡尔曼滤波到非线性模型中以实现模型的参数估计与状态估计。基于联合状态矩阵的集合卡尔曼滤波同化方法最大的特点是能够在同化时刻同时更新模型参数和状态，即，在动态调整模型参数的同时也能有效地减少模型误差积累。它特别适用于模拟时间较长的复杂非线性系统中。本文尝试把联合状态向量的集合卡尔曼滤波引入到二维非线性函数中，对函数中的多个参数进行估计。通过引入多个时间段的观测资料对参数进行校正，使得模能够动态调整参数和状态，实现函数参数的自适应。

1 基于联合状态向量的集合卡尔曼滤波方法

数据同化是通过某种方法有效整合观测数据和时空过程模型，得到更为客观的分析结果的一个过程^[11]。集合卡尔曼滤波（EnKF）方法是数据同化中最常用的方法。它先运用蒙特卡罗和集合预报的思想生成初始集合，然后把初始集合输入到待估计模型中进行预测并得出预测集合。再整合预测集合和观测集合到集合卡尔曼滤波的更新方程里得到纠正后的预测集合，即分析集合。最后把分析集合重新输入到模型中进行下一时间的预测，如此循环^[9,12]。该方法能够有效地纠正模型误差，但是对于模型参数却没有涉及。因此，Aksoy 等提出联合状态矩阵方法^[10]。该方法整合状态集合和参数集合到同一矩阵（即，联合状态矩阵）中，并在同化时刻同时更新由状态和参数组成的联合状态矩阵。其实现步骤包括如下：

1) 初始阶段，参数集合初始化。假设待估计的参数个数为 M ，集合个数为 N ，参数扰动方程如下

$$b_0^{i,k} = \hat{b}_0^k + e_0^{i,k} \quad (1)$$

式中： $b_0^{i,k}$ 为扰动后第 k 个参数中第 i 个集合成员的值， \hat{b}_0^k 为第 k 个参数初始估计值， $e_0^{i,k}$ 为扰动噪声，其分布符合正态分布。上标 k 是参数序号， $i = 1, 2, \dots, M$ 。上标 i 是集合成员序号， $i = 1, 2, \dots, N$ ，下标 ‘0’ 表示 $t = 0$ 时刻。

2) 预测阶段，将第 i ($i = 1, 2, \dots, N$) 组参数输入到模型中，并预测至下一个观测时刻 t 并得到预测状态（结果），再整合预测状态和模型参数成为一个联合状态向量（Joint state vector）中，其过程可表示如下：

$$X_t^- = f(X_{t-1}^+, b_t^{i,1}, b_t^{i,2}, \dots, b_t^{i,k}, \dots, b_t^{i,M}) \quad (2)$$

$$\text{combine}(X_t^-, b_t^{i,1}, b_t^{i,2}, \dots, b_t^{i,k}, \dots, b_t^{i,M}) = X_t^{i,-} \quad (3)$$

$$\hat{Y}_t = H(X_t^{i,-}) \quad (4)$$

其中：上标表示 $-$, $+$ 更新前与更新后， X_{t-1}^+ 为时刻 $t-1$ 更新后的状态变量， X_t^- 为时刻 t 更新前的状态变量， f 为用于预测的模型（或者函数）， \hat{Y}_t 为映射到观测空间的模拟观测变量， $X_t^{i,-}$ 为由模型状态和参数构成的联合状态向量， H 为观测算子。

把每组模型参数分别输入到模型中并预测，可得出 N 组预测结果 $X_t^{i,-}$, $i = (1, 2, \dots, N)$ 。然后再把这些预测结果和模型参数整合成 N 个联合状态向量 $X_t^{i,-}$ ，最后整合所有状态向量组成一个单独的联合状态矩阵 X_t^- 。根据公式 (4) 可以得出 \hat{Y}_t 。

3) 分析阶段, 融合联合状态矩阵 $X_{j_i}^-$ 和观测集合 Y_i , 并根据集合卡尔曼滤波更新方法, 得出新的联合状态矩阵, 其中包括新的参数和状态

$$X_{j_i}^+ = X_{j_i}^- + K_i [Y_i - \hat{Y}_i] \quad (5)$$

其中, $X_{j_i}^-$ 与 $X_{j_i}^+$ 分别为更新前后的联合状态矩阵, Y_i 为观测矩阵, K_i 是用于更新联合状态矩阵的卡尔曼增益, 其计算如下

$$K_i = P_i^- H^T [HP_i^- H^T + R_i]^{-1} \quad (6)$$

其中

$$P_i^- = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_{j_i}^{i-} - \overline{X_{j_i}^-}) (\overline{X_{j_i}^-} - X_{j_i}^{i-})^T \cdot \overline{X_{j_i}^-} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{j_i}^{i-} \quad (7)$$

式中: P_i^- 为预测误差协方差矩阵, 在实际中, 常常直接计算 $P_i^- H^T$ 与 $HP_i^- H^T$ 以减少计算量^[13-15], R_i 是观测误差协方差矩阵, $\overline{X_{j_i}^-}$ 是 t 状态变量平均值, N 为集合个数。

4) 判断是否到结束时刻, 若未到, 将分析阶段中得出的新模型参数和新状态输入到模型中, 返回步骤②进行模拟预测, 否则结束。

2 实验及分析

由于现有的研究中没有标准的随时间变化的非线性测试函数, 因此本文选择的测试函数是在经典的参数优化函数 Branins's rcos 函数基础上改写而成的

$$f = A[(y - t * 0.1) - B(x - t * 0.1)]^2 + C(x - t * 0.1)]^2 + B \cos(x - t * 0.1) + C \quad (8)$$

其中, A, B, C 为待估计的参数, 其真实值分别为 2, 3, -3; $x, y \in [-1, 1]$; 格网密度为 0.1, 即每隔 0.1 取一个值; t 为时间。当 $t=0, 10, 20, 30$ 时的函数图形见图 1, 该图直观地显示出函数是随时间变化的。

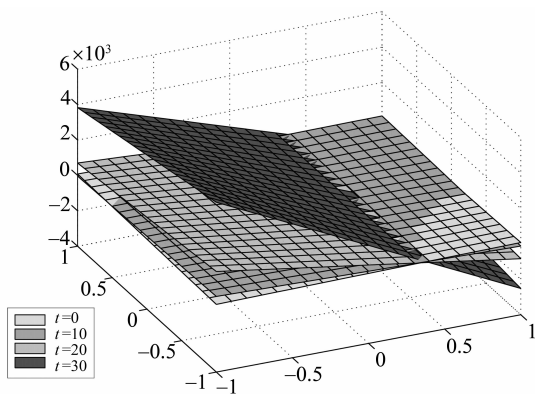


图 1 随时间变化的测试函数

Fig. 1 Test function changing with time

本文拟对测试函数进行参数敏感性分析, 以检验基于联合状态向量的集合卡尔曼滤波方法在参数估计中的运用情况。文中涉及的参数主要有集合大小、初值、观测误差、模型误差等, 我们将对以上各个参数分别进行分析。

2.1 集合大小

在集合卡尔曼滤波中, 集合大小对运算结果的精度和运算效率有很大影响。集合过小, 在运算过程中会有较大的统计噪声, 难以体现参数的统计特征, 因而精度较低; 集合过大, 则会产生巨大的运算量, 消耗过多的计算资源^[11,16]。

文中设置参数 A, B 和 C 的初始估计值分别为 0.8, 1.2 和 -1; 观测误差 0.05; 模型误差为 0.1; 观测点个数为 15 个, 观测点位置图见图 2, 观测点的位置和个数在整个同化过程中保持不变。进行测试的集合分别为 5, 20, 50, 500。从图 3 可以发现, 当集合较小时 (5 或 20) 时, 待估计的参数在初期会波动较大。特别是当集合个数为 5 时, 前期的波动幅度过大, 甚至会远远偏离真实值。当集合个数为 20 时, 仍然有小幅波动。当集合个数较大时 (50 和 500), 参数会非常平滑且迅速收敛于真实值。同时, 也可以发现集合为 50 和集合为 500 时参数的收敛情况基本相似。由于集合越大, 所需的运算量也会越大, 消耗时间会越长 (表 1)。因此, 在能够获得较好结果的前提下, 为了减少运算量, 以下的敏感性实验的集合大小均设置为 50。

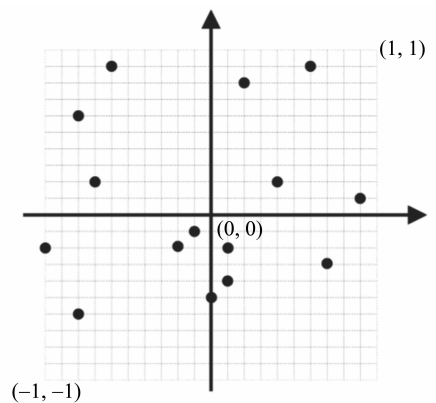


图 2 观测点位置图

Fig. 2 Position of observations

表 1 不同集合大小的运算时间

Table 1 Operation time of different ensemble size

集合大小	5	20	50	500
时间/s	4.089	4.515	8.029	66.276

2.2 初始估计值

参数估计中的初始值（即，初始集合平均值）是集合卡尔曼滤波中的重要参数。它是根据先验知识而给出的。在运算过程中，通过结合观测资料，可以有效地提高反演结果的稳定性，也可以避免产生病态结果。

根据前面的实验结果采用集合大小为 50，并设定观测误差 0.05、模型误差为 0.1、观测点个数为 15 个。图 4 给出了在不同初始均值条件下，参

数 A、B 和 C 的均值随滤波的进行而演化的过程。可以看出，对于不同的初始值，三个待估计的参数都能够在较少的同化次数内收敛于真值，同时也可以发现估计的初始值越准确，整个估计过程会越稳定且精确。从这个实验可以看出，EnKF 参数估计的结果能够很好的整合集合初始值，但又不依赖于初始值，也能说明 EnKF 可以很好地避免其它滤波（标准卡尔曼滤波，扩展卡尔曼滤波）对初始敏感的问题。

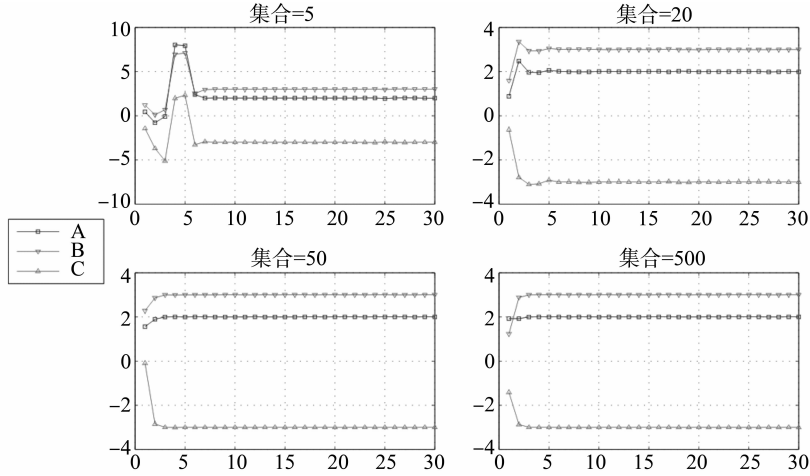


图 3 集合大小与参数估计

Fig. 3 Estimation results of different ensemble size

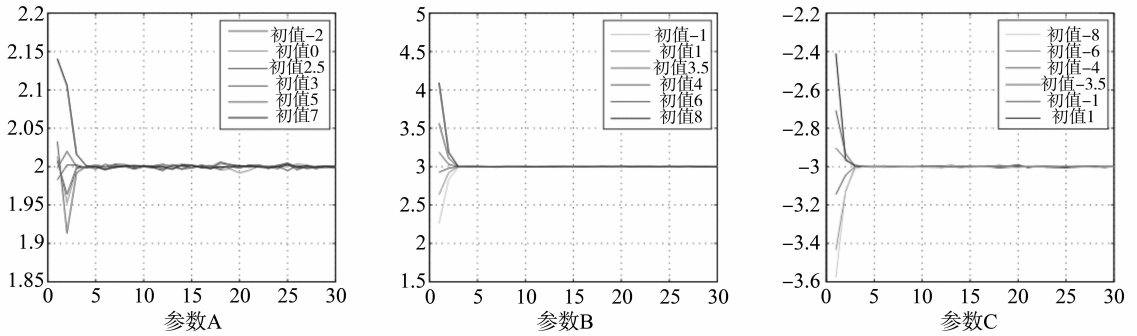


图 4 初值与参数估计

Fig. 4 Estimation results of different initial value

2.3 观测误差

观测数据常常含有一定的观测误差，这些误差往往是由于观测手段引起的或者仪器设备的误差，属于一种随机过程的状态估计量。文中采用 Monte Carlo 方法模拟产生随机的观测噪声，加入到观测值中，以检验 EnKF 方法的抗噪声干扰能力。

图 5 给出了在不同随机噪声比例时参数 A、B 和 C 的均值随滤波的进行而演化过程。从图中可以看出，文中的参数估计方法显示了很好的抗噪能

力。同时，也能够看出，噪声越大，收敛于真值的过程会越慢。噪声越小，参数估计的过程会越稳定，收敛效果会越好。虽然观测噪声的大小对参数估计有一定的影响，但各个待估计的参数都能够在允许的观测噪声范围内快速收敛，而且得出较为稳定的结果。可见，EnKF 方法具有较强的抗噪能力，能够在噪声中提取出有用的信息，并有效地对模型参数进行估计。

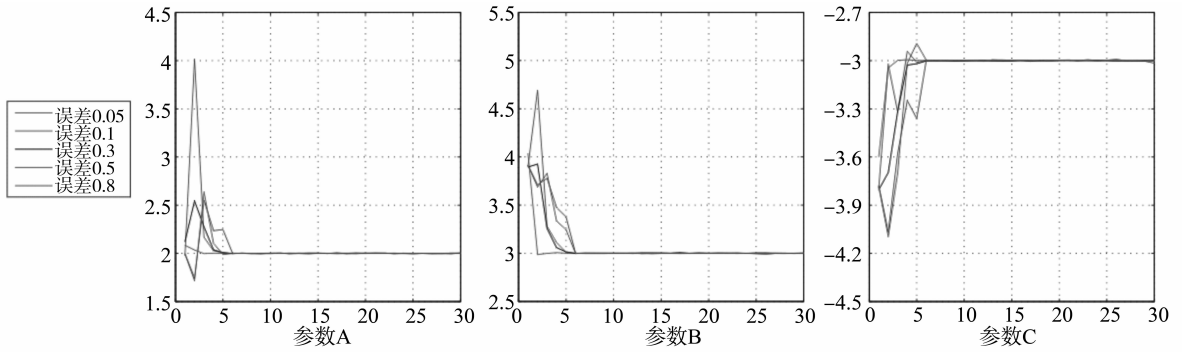


图 5 观测误差与参数估计

Fig. 5 Estimation results of different observation error

2.4 模型误差

在实际应用中,有些模型(模式)由于本身的偏差,即使输入精确的背景场(初始场),模型的预测结果也是很难与真实结果一样,总会有一定的误差。因此有必要对模型结果作合理地先验估计,对模型的输出作出正确的分析,以避免在同化过程中低估背景场误差协方差。

图 6 中可以看出,利用不同程度的误差对模型

结果进行扰动后,模型参数的估计结果呈现出类似的趋势。模型误差越大,被估计的参数波动会越激烈,得出的参数均值往往偏离实际值。模型误差越小,被估计的参数会相对稳定,而且得出的参数会较好地收敛于真值。从图中可以得出,当模型误差大于 50% 时,参数估计的结果会很不稳定,结果不理想;当模型误差小于 30% 的情况下均能得到较为满意的结果。

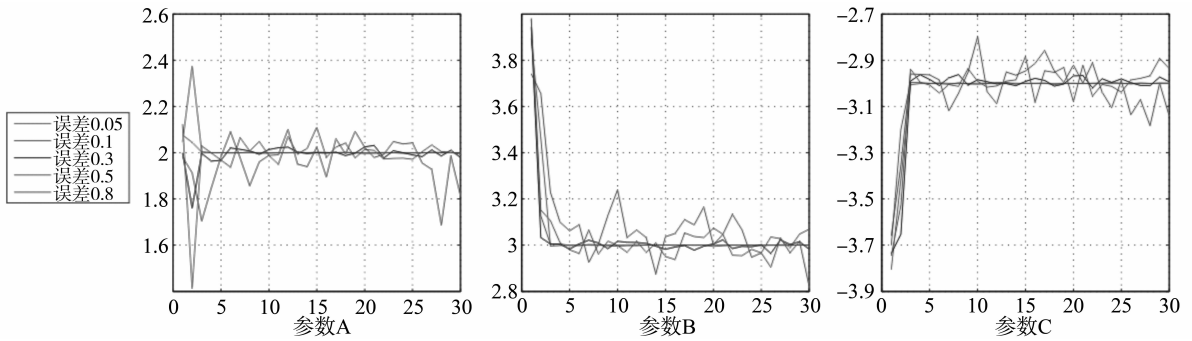


图 6 模型误差与参数估计

Fig. 6 Estimation results of different model error

根据以上的实验,我们设定参数估计的集合大小为 50,观测误差为 0.05、模型误差为 0.1、观测点个数为 15 个,参数 A、B 和 C 的初始估计值分别为 0.8, 1.2 和 -1。为了更好的对比估计前后的效果,我们计算了误差积累情况,误差计算公式如下

$$Err = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{\text{num_grid}} (Z_{\text{estim}_i} - Z_{\text{true}_i})^2}{\text{num_grid}}} \quad (9)$$

其中, num_grid 为格点个数,在本文是 $20 \times 20 = 400$; Z_{estim_i} 格点上未进行同化的模拟值或进行同化后的模拟值。 Z_{true_i} 为格点上对应的真实值。

图 7 的左图给出了在滤波过程中待估计参数

A、B 和 C 的演化。可以看出,随着时间的增加,各个待估计参数的均值均收敛于真值,且收敛所需的时间很短,只需要少数的几个同化过程。这说明以上的参数设置非常有效,能够准确、快速地估计出参数值。图 7 的右图也给出了在整个滤波过程中,函数的误差积累。可以看出,采用有偏差的参数,其误差积累越来越快,呈抛物线上升。但是,经过参数估计后的误差积累迅速下降,误差水平一直在很低的水平。由于参数估计非常精确,故误差积累基本上维持在小于 3 的水平,而未估计的误差在时刻 30 时高达 2 500,此时的误差已经不在同一个数量级了。

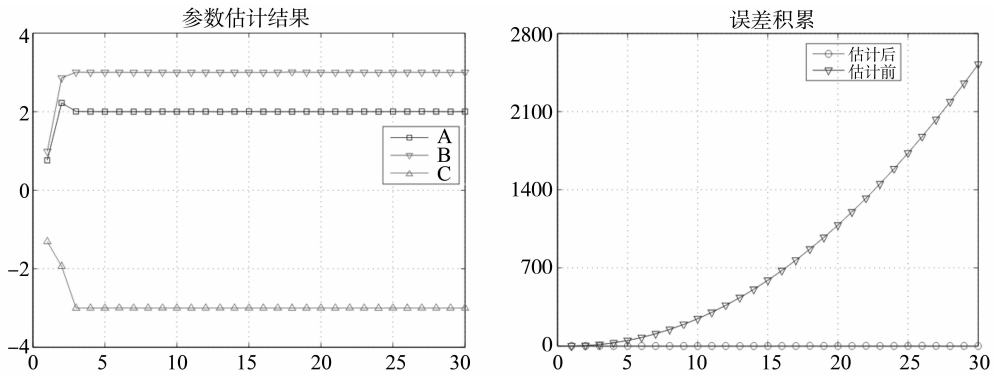


图 7 函数的估计结果

Fig. 7 Estimation results of test function

3 结 论

本文采用了基于联合状态向量的 EnKF 参数估计方法, 该方法能够根据观测和模型结果的先验估计, 得出准确的模型参数, 满足应用需求。通过本文的实验, 我们得出如下几个结论:

1) 集合大小对参数估计的结果和运算效率有重要影响, 集合越大对参数估计越稳定越精确, 但是所需要的运算量也越大。

2) 集合初值对于参数估计的结果影响不明显, 文中的实验表明在一定的误差范围内, 文中采用的方法均能够很好的估计出参数, 得到良好的效果。

3) 观测误差对估计参数的收敛速度有影响, 观测误差越大, 参数收敛于真值的速度就越慢, 所需要的观测资料越多才能获得较多的信息。

4) 模型误差对估计参数有重要影响。模型误差越大, 参数估计的波动会越大, 收敛于直值的可能性会越小。

5) 下一步拟对更多的参数进行估计, 对不同的函数类型进行参数估计。

参考文献:

[1] 王新洲. 非线性模型参数估计理论与应用[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2002: 28-36.

[2] BERGER J. Multivariate estimation: Bayes, empirical Bayes, and stein approaches[M]. Philadelphia: SIAM, 1986: 1-10.

[3] 王松桂. 线性模型的理论及其应用[M]. 合肥: 安徽教育出版社, 1987: 1-23.

[4] BATES D M, WATTS D G. Nonlinear regression analysis & its applications[M]. New York: Wiley, 2008: 1-21.

[5] BLAHA G. Non-iterative approach to nonlinear least-squares adjustment[J]. Manuscript Geodaetica, 1994, 19: 199-212.

[6] 张松林, 王新洲. 非线性模型的一种半参数估计方法

[J]. 测绘通报, 2004, 11: 26-28.

[7] BARSHALOM Y, LI X R, KIRUBARAJAN T. Estimation with applications to tracking and navigation: theory, algorithm and software[M]. New York: Wiley, 2001: 135-158.

[8] REICHLER R H, WALKER J P. Extended versus ensemble Kalman filtering for land data assimilation[J]. Journal of Hydrometeorology, 2002, 3(6): 728-740.

[9] EVENSEN G. Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte-Carlo methods to forecast error statistics[J]. Journal of Geophysical Research, 1994, 99(C5): 10143-10162.

[10] AKSOY A, ZHANG F Q, NIELSEN-GAMMON J W. Ensemble-based simultaneous state and parameter estimation in a two-dimensional sea-breeze model[J]. Monthly Weather Review, 2006, 134(10): 2951-2970.

[11] REICHLER R H, LAUGHLIN D B, ENTEKHABI D. Hydrologic data assimilation with the ensemble Kalman filter[J]. Monthly Weather Review, 2002, 130(1): 103-114.

[12] 李新, 摆玉龙. 顺序数据同化的 bayes 滤波框架[J]. 地球科学进展, 2010, 25(5): 515-522.

[13] LIN C, WANG Z, ZHU J. An ensemble Kalman filter for severe dust storm data assimilation over China[J]. Atmospheric Chemistry and Physics, 2008, 8(11): 2975-2983.

[14] TONG M J, XUE M. Simultaneous estimation of microphysical parameters and atmospheric state with simulated radar data and ensemble square-root Kalman filter. Part II: parameter estimation experiments[J]. Monthly Weather Review, 2008, 136: 1649-1668.

[15] ZHENG D Q, LEUNG J K C, LEE B Y. Online update of model state and parameters of a Monte Carlo atmospheric dispersion model by using ensemble Kalman filter[J]. Atmospheric Environment, 2009, 43: 2005-2011.

[16] CROW W T, WOOD E F. The assimilation of remotely sensed soil brightness temperature imagery into a land surface model using ensemble Kalman filtering: a case study based on ES-TAR measurements during SGP97[J]. Advance Water Resources, 2003, 26: 137-149.