第 52 卷 第 6 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 52 No. 6
2013 年 11 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Nov. 2013

一类二阶非线性时标动态方程新的 Kamenev 型振动准则*

邱仰聪[1]，王其如[2]
（1. 顺德职业技术学院人文社科学院，广东 佛山 528333；
2. 中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275）

摘 要：主要利用 $H(t,s,t_0)$ 型函数和广义 Riccati 变换技巧，给出了一类二阶非线性时标动态方程 $(p(t)\psi(x(t))x^{\Delta}(t))^{\Delta}+f(t,x(\sigma(t)))=0$ 新的 Kamenev 型振动准则。

关键词：二阶非线性时标动态方程；Kamenev 型；振动准则；广义 Riccati 技巧

中图分类号：O175 **文献标志码**：A **文章编号**：0529－6579（2013）06－0026－05

New Kamenev-Type Oscillation Criteria for Second-Order Nonlinear Dynamic Equations on Time Scales

QIU Yangcong[1], *WANG Qiru*[2]
(1. School of Humanities and Social Science Shunde Polytechnic, Foshan 528333, China;
2. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: By using functions of the form $H(t,s,t_0)$ and a generalized Riccati transformation technique, new Kamenev-type oscillation criteria are established for second-order nonlinear dynamic equations on time scales of the form $(p(t)\psi(x(t))x^{\Delta}(t))^{\Delta}+f(t,x(\sigma(t)))=0$

Key words: second-order nonlinear dynamic equations on time scales; Kamenev-type; oscillation criteria; generalized Riccati technique

1988 年，在导师 Bernd Aulbach 的指导下，德国数学家 Stefan Hilger 在他的博士论文中首次提出测度链的概念，从而创立了测度链上的微分方程理论，引起了国际数学界的普遍关注。后来，Bohner 和 Peterson 系统分析了测度链上动态方程的重要一类：时标动态方程（Dynamic Equations on Time Scales），见文［1－2］。在最近这些年里，国际上有许多数学家投入到对时标动态方程的解的振动性研究中，并得到了一系列有意义的研究成果[1-8]。

1 概 述

本文将研究时标 $\mathbb{T}$ 上的二阶非线性时标动态方程

$$(p(t)\psi(x(t))x^{\Delta}(t))^{\Delta}+f(t,x(\sigma(t)))=0 \quad (1)$$

并假设以下条件总成立：

（C1）$p\in C_{rd}(\mathbb{T},(0,\infty))$；

（C2）$\psi\in C(\mathbb{R},(0,\eta])$，这里 η 为某个正常数；

（C3）$f\in C(\mathbb{T}\times\mathbb{R},\mathbb{R})$，且存在一个函数 $q\in C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ 且 $q(t)$ 不最终恒等为 0，使得 $uf(t,u)\geqslant q(t)u^2$。

方程（1）的一个解 x 称为在 $t^*\in\mathbb{T}$ 有一个广义零点，如果 $x(t^*)x(\sigma(t*))\leqslant 0$；称 $x(t)$ 在 $\mathbb{T}$ 是非振动的，如果存在 $t_0\in\mathbb{T}$ 使得 $\forall t>t_0$ 有 $x(t)x(\sigma(t))>0$。否则，就称 $x(t)$ 为振动的。如果方程（1）的所有解都是振动的，就称方程（1）

* **收稿日期**：2013－02－26
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11271379）
作者简介：邱仰聪（1984 年生），男；**研究方向**：时标动态方程的振动性；**通讯作者**：王其如；E-mail：mcswqr@mail.sysu.edu.cn

是振动的；否则，就称方程（1）是非振动的。

2012－2013 年，Qiu 等[3-4]中利用了 $H(t,s)$ 型函数和广义 Riccati 变换技巧，分别给出方程（1）的区间和 Kamenev 型振动准则。在文［5］中，Del Medico 和 Kong 考虑了二阶非线性时标动态方程

$$(p(t)x^{\Delta}(t))^{\Delta}+q(t)x(\sigma(t))=0$$

提出使用 $H(t,s,t_0)$ 型函数，给出了一种新的 Kamenev 型振动准则。受 Del Medico 等[5]的启发，本文利用 $H(t,s,t_0)$ 型函数和广义 Riccati 变换技巧，建立方程（1）新的 Kamenev 型振动准则，并给出例子对相关的定理进行说明。

为了简化记号，使本文更加简洁，在本文里记 $(a,b)\cap\mathbb{T}=(a,b)_{\mathbb{T}}$，其中 $a,b\in\mathbb{R}$，至于 $[a,b]_{\mathbb{T}}$，$[a,b)_{\mathbb{T}}$ 和 $(a,b]_{\mathbb{T}}$ 等也采用类似的记法。限于文章篇幅，相关的时标理论的预备知识请参考文献［1－2］。

2　基本引理

下面，先给出以下引理：

引理 1　假设 $x(t)$ 是方程（1）的一个解，满足当 $t\in[t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$，$t_0\in\mathbb{R}_+$ 时 $x(t)>0$。定义

$$u(t)=A(t)\frac{p(t)\psi(x(t))x^{\Delta}(t)}{x(t)}+B(t)\qquad(2)$$

其中 $A\in C_{rd}^1(\mathbb{T},\mathbb{R}_+\setminus\{0\})$，$B\in C_{rd}^1(\mathbb{T},\mathbb{R})$，则 $u(t)$ 满足

$$\mu(t)u(t)-\mu(t)B(t)+\eta A(t)p(t)>0\qquad(3)$$

且

$$u^{\Delta}(t)+\Phi(t)+\frac{A(t)u^2(t)-[(A^{\sigma}(t)+A(t))B(t)+\eta A^{\Delta}(t)A(t)p(t)]u(t)+A^{\sigma}(t)B^2(t)}{A(t)(\mu(t)u(t)-\mu(t)B(t)+\eta A(t)p(t))}\leqslant 0\qquad(4)$$

其中 $\Phi(t)=A^{\sigma}(t)\left(q(t)-\left(\frac{B(t)}{A(t)}\right)^{\Delta}\right)$，$A^{\sigma}(t)=A(\sigma(t))$。

证明　首先，

$$\mu u-\mu B+\eta Ap\geqslant\mu u-\mu B+Ap\psi(x)=\mu\frac{Ap\psi(x)x^{\Delta}}{x}+\mu B-\mu B+Ap\psi(x)=Ap\psi(x)\frac{x^{\sigma}}{x}>0$$

且

$$\frac{x}{x^{\sigma}}=\frac{Ap\psi(x)}{\mu u-\mu B+Ap\psi(x)}\geqslant\frac{Ap\psi(x)}{\mu u-\mu B+\eta Ap}$$

因此（3）式成立。然后对（2）式求导再用方程（1），则有

$$\begin{aligned}u^{\Delta}&=A^{\Delta}\left(\frac{p\psi(x)x^{\Delta}}{x}\right)+A^{\sigma}\left(\frac{p\psi(x)x^{\Delta}}{x}\right)^{\Delta}+B^{\Delta}=\\&\frac{A^{\Delta}}{A}(u-B)+A^{\sigma}\frac{(p\psi(x)x^{\Delta})^{\Delta}x-p\psi(x)(x^{\Delta})^2}{xx^{\sigma}}+B^{\Delta}=\\&\frac{A^{\Delta}}{A}u+B^{\Delta}-\frac{A^{\Delta}}{A}B-A^{\sigma}\frac{f(t,x^{\sigma})}{x^{\sigma}}-A^{\sigma}p\psi(x)\frac{(x^{\Delta})^2}{x^2}\frac{x}{x^{\sigma}}\leqslant\\&\frac{A^{\Delta}}{A}u+A^{\sigma}\left(\frac{B}{A}\right)^{\Delta}-A^{\sigma}q-A^{\sigma}p\psi(x)\frac{(x^{\Delta})^2}{x^2}\frac{x}{x^{\sigma}}\leqslant\\&\frac{A^{\Delta}}{A}u-\Phi-A^{\sigma}p\psi(x)\frac{(u-B)^2}{A^2p^2\psi^2(x)}\frac{Ap\psi(x)}{\mu u-\mu B+\eta Ap}=\\&\frac{A^{\Delta}}{A}u-\Phi-\frac{A^{\sigma}}{A}\frac{(u-B)^2}{\mu u-\mu B+\eta Ap}=\\&\frac{-Au^2+[(A^{\sigma}+A)B+\eta A^{\Delta}Ap]u-A^{\sigma}B^2}{A(\mu u-\mu B+\eta Ap)}-\Phi\end{aligned}$$

因此（4）式成立。证毕。

3　主要结果

令 $D_0=\{s\in\mathbb{T}:s\geqslant 0\}$，$D=\{(t,s,t_0)\in\mathbb{T}^3:t\geqslant s\geqslant t_0\geqslant 0\}$。对任意函数 $f(t,s,t_0):\mathbb{T}^3\to\mathbb{R}$，记 f_1^{Δ} 和 f_2^{Δ} 分别为 f 相对于 t 和 s 的偏导数。对于 $E\subset\mathbb{R}$，记 $L_{loc}(E)$ 为所有在 E 的任意紧子集可积的函数组成的空间。定义

$$\begin{gathered}(\mathscr{A},\mathscr{B})=\{(A,B):A(s)\in C_{rd}^1(D_0,\mathbb{R}_+\setminus\{0\}),\\B(s)\in C_{rd}^1(D_0,\mathbb{R}),\\\eta A(s)p(s)\pm\mu(s)B(s)>0,s\in D_0\};\\\mathcal{H}=\{H(t,s,t_0)\in C^1(D,\mathbb{R}_+):\\\frac{(H_2^{\Delta}(t,\cdot,t_0))^2}{H(t,\cdot,t_0)}\in C((t_0,\rho(t))_{\mathbb{T}}),\\H(t,t,t_0)=H(t,t_0,t_0)=0,H(t,s,t_0)>0,\\t>s>t_0\geqslant 0\}。\end{gathered}$$

定理 1　假设存在 $(A,B)\in(\mathscr{A},\mathscr{B})$ 以及 $H\in\mathcal{H}$ 使得 $M(t,\cdot,t_0)\in L([0,\rho(t)]_{\mathbb{T}})$ 且对任意的

$$\begin{gathered}t_0\in\mathbb{T},\limsup_{t\to\infty}\Big[\int_{t_0}^{\rho(t)}H(t,\sigma(s),t_0)\Phi(s)\Delta s-\\\int_{\sigma(t_0)}^{\rho(t)}M(t,s,t_0)\Delta s-\eta p(t_0)H_2^{\Delta}(t,t_0,t_0)A^{\sigma}(t_0)-\\\frac{H(t,\sigma(t_0),t_0)A^{\sigma}(t_0)B(t_0)}{A(t_0)}+H_2^{\Delta}(t,\rho(t),t_0)\cdot\\(\eta A(\rho(t))p(\rho(t))-\mu(\rho(t))B(\rho(t)))\Big]>0\end{gathered}\qquad(5)$$

其中 Φ 与前面的定义一致，以及

$$M(t,s,t_0)=\frac{(H(t,s,t_0)A(s)B(s)+H(t,\sigma(s),t_0)A^{\sigma}(s)B(s)+\eta A(s)p(s)(H(t,s,t_0)A(s))^{\Delta_s})^2}{4A(s)\min\{H(t,s,t_0)A(s)(\eta A(s)p(s)-\mu(s)B(s)),H(t,\sigma(s),t_0)A^{\sigma}(s)(\eta A(s)p(s)+\mu(s)B(s))\}}$$

则方程（1）振动。

证明 假设方程（1）非振动。不失一般性，假设存在 $t_0 \in [0,\infty)_{\mathbb{T}}$，使得当 $t \in [t_0,\infty)_{\mathbb{T}}$ 时 $x(t) > 0$。令 $u(t)$ 按（2）定义，则由引理 1，（3）式和（4）式成立。

为简化记号，令 $H = H(t,s,t_0)$，$H_\sigma = H(t,\sigma(s),t_0)$，$H_2^\Delta = H_2^\Delta(t,s,t_0)$，且省略积分变量，这样对 $s \in \mathbb{T}$，有 $H_\sigma - H = H_2^\Delta \mu$。

在（4）式两边乘上 H_σ，并将 t 换成 s，再对 s 从 t_0 到 t 积分，其中 $t \in \mathbb{T}$ 且 $t \geqslant \sigma(t_0)$，得到

$$\int_{t_0}^{t} H_\sigma \Phi \Delta s \leqslant -\int_{t_0}^{t}\left(H_\sigma u^\Delta + H_\sigma \frac{Au^2 - [(A^\sigma + A)B + \eta A^\Delta Ap]u + A^\sigma B^2}{A(\mu u - \mu B + \eta Ap)}\right)\Delta s$$

注意到 $H(t,t,t_0) = H(t,t_0,t_0) = 0$，于是有

$$\int_{\rho(t)}^{t} H(t,\sigma(s),t_0)\Phi(s)\Delta s = H(t,\sigma(\rho(t)),t_0)\cdot \Phi(\rho(t))(t-\rho(t)) = 0 \qquad (6)$$

实际上，如果 $\rho(t) = t$，（6）式成立；否则 $\sigma(\rho(t)) = t$，使得 $H(t,\sigma(\rho(t)),t_0) = H(t,t,t_0) = 0$，因此由分部积分公式有

$$\int_{t_0}^{\rho(t)} H_\sigma \Phi \Delta s = \int_{t_0}^{t} H_\sigma \Phi \Delta s \leqslant \int_{t_0}^{t}\left(H_2^\Delta u - H_\sigma \frac{Au^2 - [(A^\sigma + A)B + \eta A^\Delta Ap]u + A^\sigma B^2}{A(\mu u - \mu B + \eta Ap)}\right)\Delta s \leqslant$$
$$\int_{t_0}^{t}\left(H_2^\Delta u - H_\sigma \frac{Au^2 - [(A^\sigma + A)B + \eta A^\Delta Ap]u}{A(\mu u - \mu B + \eta Ap)}\right)\Delta s = \left(\int_{t_0}^{\sigma(t_0)} + \int_{\sigma(t_0)}^{\rho(t)} + \int_{\rho(t)}^{t}\right)\left(H_2^\Delta u - H_\sigma \frac{Au^2 - [(A^\sigma + A)B + \eta A^\Delta Ap]u}{A(\mu u - \mu B + \eta Ap)}\right)\Delta s \qquad (7)$$

注意到

$$\int_{t_0}^{\sigma(t_0)}\left(H_2^\Delta u - H_\sigma \frac{Au^2 - [(A^\sigma + A)B + \eta A^\Delta Ap]u}{A(\mu u - \mu B + \eta Ap)}\right)\Delta s = \mu(t_0)\left(H_2^\Delta u - H_\sigma \frac{Au^2 - [(A^\sigma + A)B + \eta A^\Delta Ap]u}{A(\mu u - \mu B + \eta Ap)}\right)\Bigg|_{s=t_0} =$$
$$\frac{[-AHu^2 + (HAB + H_\sigma A^\sigma B + \eta Ap(HA)^\Delta)u]\mu}{A(\mu u - \mu B + \eta Ap)}\Bigg|_{s=t_0} = \frac{\mu u[H_\sigma A^\sigma B + \eta Ap(HA)^\Delta]}{A(\mu u - \mu B + \eta Ap)}\Bigg|_{s=t_0} \leqslant \left(\eta p(HA)^\Delta + \frac{H_\sigma A^\sigma B}{A}\right)\Bigg|_{s=t_0} =$$
$$\eta p(t_0)H_2^\Delta(t,t_0,t_0)A^\sigma(t_0) + \frac{H(t,\sigma(t_0),t_0)A^\sigma(t_0)B(t_0)}{A(t_0)} \qquad (8)$$

再者，对 $t \geqslant \sigma(t_0)$，$s \in [\sigma(t_0),\rho(t))_{\mathbb{T}}$，且 $u(s) \leqslant 0$，

$$H_2^\Delta u - H_\sigma \frac{Au^2 - [(A^\sigma + A)B + \eta A^\Delta Ap]u}{A(\mu u - \mu B + \eta Ap)} = \frac{-HAu^2 + [HAB + H_\sigma A^\sigma B + \eta Ap(HA)^\Delta]u}{A(\mu u - \mu B + \eta Ap)} =$$
$$-\frac{H}{\mu u - \mu B + \eta Ap}u^2 + \frac{HAB + H_\sigma A^\sigma B + \eta Ap(HA)^\Delta}{A(\eta Ap - \mu B)}u - \frac{HAB + H_\sigma A^\sigma B + \eta Ap(HA)^\Delta}{A(\eta Ap - \mu B)}\frac{\mu u^2}{\mu u - \mu B + \eta Ap} =$$
$$-\frac{H_\sigma A^\sigma(\eta Ap + \mu B)}{A(\eta Ap - \mu B)(\mu u - \mu B + \eta Ap)}u^2 + \frac{HAB + H_\sigma A^\sigma B + \eta Ap(HA)^\Delta}{A(\eta Ap - \mu B)}u \leqslant -\frac{H_\sigma A^\sigma(\eta Ap + \mu B)}{A(\eta Ap - \mu B)^2}u^2 +$$
$$\frac{HAB + H_\sigma A^\sigma B + \eta Ap(HA)^\Delta}{A(\eta Ap - \mu B)}u = -\frac{H_\sigma A^\sigma(\eta Ap + \mu B)}{A(\eta Ap - \mu B)^2}\cdot\left[u - \frac{(\eta Ap - \mu B)(HAB + H_\sigma A^\sigma B + \eta Ap(HA)^\Delta)}{2H_\sigma A^\sigma(\eta Ap + \mu B)}\right]^2 +$$
$$\frac{(HAB + H_\sigma A^\sigma B + \eta Ap(HA)^\Delta)^2}{4H_\sigma A^\sigma A(\eta Ap + \mu B)} \leqslant \frac{(HAB + H_\sigma A^\sigma B + \eta Ap(HA)^\Delta)^2}{4A\min\{HA(\eta Ap - \mu B), H_\sigma A^\sigma(\eta Ap + \mu B)\}} = M \qquad (9)$$

对 $t \geqslant \sigma(t_0)$，$s \in [\sigma(t_0),\rho(t))_{\mathbb{T}}$，且 $u(s) > 0$，

$$H_2^\Delta u - H_\sigma \frac{Au^2 - [(A^\sigma + A)B + \eta A^\Delta Ap]u}{A(\mu u - \mu B + \eta Ap)} = \frac{-HAu^2 + [HAB + H_\sigma A^\sigma B + \eta Ap(HA)^\Delta]u}{A(\mu u - \mu B + \eta Ap)} =$$
$$-\frac{H}{\mu u - \mu B + \eta Ap}\left[u - \frac{HAB + H_\sigma A^\sigma B + \eta Ap(HA)^\Delta}{2HA}\right]^2 + \frac{(HAB + H_\sigma A^\sigma B + \eta Ap(HA)^\Delta)^2}{4HA^2(\mu u - \mu B + \eta Ap)} \leqslant$$
$$\frac{(HAB + H_\sigma A^\sigma B + \eta Ap(HA)^\Delta)^2}{4HA^2(\eta Ap - \mu B)} \leqslant \frac{(HAB + H_\sigma A^\sigma B + \eta Ap(HA)^\Delta)^2}{4A\min\{HA(\eta Ap - \mu B), H_\sigma A^\sigma(\eta Ap + \mu B)\}} = M \qquad (10)$$

由（9）式、（10）式，有

$$\int_{\sigma(t_0)}^{\rho(t)}\left(H_2^\Delta u - H_\sigma \frac{Au^2 - [(A^\sigma + A)B + \eta A^\Delta Ap]u}{A(\mu u - \mu B + \eta Ap)}\right)\Delta s \leqslant \int_{\sigma(t_0)}^{\rho(t)} M(t,s,t_0)\Delta s \qquad (11)$$

由（6）式，类似地有

$$\int_{\rho(t)}^{t} H_\sigma \frac{Au^2 - [(A^\sigma + A)B + \eta A^\Delta Ap]u}{A(\mu u - \mu B + \eta Ap)}\Delta s = 0 \qquad (12)$$

注意到 $H_2^\Delta(t,\rho(t),t_0) \leqslant 0$，由（3）式有

$$\int_{\rho(t)}^{t} H_2^{\Delta} u \Delta s = H_2^{\Delta}(t,\rho(t),t_0)u(\rho(t))(t-\rho(t)) = H_2^{\Delta}(t,\rho(t),t_0)u(\rho(t))\mu(\rho(t)) \leqslant -H_2^{\Delta}(t,\rho(t),t_0)(\eta A(\rho(t))p(\rho(t))-\mu(\rho(t))B(\rho(t))) \tag{13}$$

最后，由（7）式、（8）式和（11）式 -（13）式，得到

$$\int_{t_0}^{\rho(t)} H(t,\sigma(s),t_0)\Phi(s)\Delta s - \int_{\sigma(t_0)}^{\rho(t)} M(t,s,t_0)\Delta s - \eta p(t_0)H_2^{\Delta}(t,t_0,t_0)A^{\sigma}(t_0) - \frac{H(t,\sigma(t_0),t_0)A^{\sigma}(t_0)B(t_0)}{A(t_0)} + H_2^{\Delta}(t,\rho(t),t_0)\cdot (\eta A(\rho(t))p(\rho(t)) - \mu(\rho(t))B(\rho(t))) \leqslant 0$$

从而与（5）式矛盾，故结论成立。证毕。

当 $(A,B)=(1,0)$ 时，定理 1 可以简化为以下推论。

推论 1　假设存在 $H\in\mathcal{H}$ 使得对任意的 $t_0\in\mathbb{T}$，

$$\limsup_{t\to\infty}\Big[\int_{t_0}^{\rho(t)} H(t,\sigma(s),t_0)q(s)\Delta s - \frac{\eta}{4}\int_{\sigma(t_0)}^{\rho(t)} \frac{(H_2^{\Delta}(t,s,t_0))^2}{\widetilde{H}(t,s,t_0)}p(s)\Delta s - \eta p(t_0)H_2^{\Delta}(t,t_0,t_0) + \eta p(\rho(t))H_2^{\Delta}(t,\rho(t),t_0)\Big] > 0$$

其中

$$\widetilde{H}(t,s,t_0) = \min\{H(t,\sigma(s),t_0), H(t,s,t_0)\}$$

则方程（1）振动。

更进一步地，若 $\psi(y)=y$，$f(t,u)=q(t)u$，定理 1 将简化为文献［5］的定理 2.1。

4　例　子

例 1　考虑方程

$$\left(\frac{1}{t}\frac{2+x^2(t)}{1+x^2(t)}x^{\Delta}(t)\right)^{\Delta} + t(2+\sin t)x(\sigma(t)) = 0 \tag{14}$$

这里 $p(t)=\dfrac{1}{t}$，$\psi(x(t))=\dfrac{2+x^2(t)}{1+x^2(t)}$，$q(t)=t$。即 $\eta=2$。取 $H(t,s,t_0)=(t-s)^2(s-t_0)^2$。

① $\mathbb{T}=\mathbb{R}_+$，取 $(A,B)=(s,\frac{1}{s})$，有

$$\limsup_{t\to\infty}\Big[\int_{t_0}^{\rho(t)} H(t,\sigma(s),t_0)\Phi(s)\Delta s - \int_{\sigma(t_0)}^{\rho(t)} M(t,s,t_0)\Delta s - \eta p(t_0)H_2^{\Delta}(t,t_0,t_0)A^{\sigma}(t_0) - \frac{H(t,\sigma(t_0),t_0)A^{\sigma}(t_0)B(t_0)}{A(t_0)} + H_2^{\Delta}(t,\rho(t),t_0)\cdot (\eta A(\rho(t))p(\rho(t)) - \mu(\rho(t))B(\rho(t)))\Big] = \limsup_{t\to\infty}\Big[\int_{t_0}^{t}(t-s)^2(s-t_0)^2\Big(s^2+\frac{2}{s^2}\Big)ds - 2\int_{t_0}^{t}\frac{(-3s^2+2ts+2t_0s-t_0t)^2}{s^2}ds\Big] = +\infty > 0$$

故根据定理 1，方程（14）振动。

② $\mathbb{T}=\mathbb{N}$，取 $(A,B)=(1,0)$，有

$$\limsup_{t\to\infty}\Big[\int_{t_0}^{\rho(t)} H(t,\sigma(s),t_0)q(s)\Delta s - \frac{\eta}{4}\int_{\sigma(t_0)}^{\rho(t)}\frac{(H_2^{\Delta}(t,s,t_0))^2}{\widetilde{H}(t,s,t_0)}p(s)\Delta s - \eta p(t_0)H_2^{\Delta}(t,t_0,t_0) + \eta p(\rho(t))H_2^{\Delta}(t,\rho(t),t_0)\Big] =$$

$$\limsup_{t\to\infty}\Big[\int_{t_0}^{t-1}(t-s-1)^2(s+1-t_0)^2 s\Delta s - \frac{1}{2}\int_{t_0+1}^{t-1}\frac{((t-s-1)^2(s+1-t_0)^2-(t-s)^2(s-t_0)^2)^2}{s\min\{(t-s-1)^2(s+1-t_0)^2,(t-s)^2(s-t_0)^2\}}\Delta s - \frac{2(t-t_0-1)^2}{t_0} - \frac{2(t-t_0-1)^2}{t-1}\Big] \geqslant$$

$$\limsup_{t\to\infty}\Big[\int_{t_0}^{t-1}(t-s-1)^2(s+1-t_0)^2 s\Delta s - \frac{1}{2}\int_{t_0+1}^{t-1}\frac{((t-s-1)^2(s+1-t_0)^2-(t-s)^2(s-t_0)^2)^2}{s(t-t_0-1)^2}\Delta s - \frac{2(t-t_0-1)^2}{t_0} - \frac{2(t-t_0-1)^2}{t-1}\Big] =$$

$$\limsup_{n\to\infty}\Big[\sum_{k=l}^{n-2}(n-k-1)^2(k+1-l)^2k - \frac{1}{2}\sum_{k=l+1}^{n-2}\frac{((n-k-1)^2(k+1-l)^2-(n-k)^2(k-l)^2)^2}{k(n-l-1)^2} - \frac{2(n-l-1)^2}{l} - \frac{2(n-l-1)^2}{n-1}\Big] = +\infty > 0$$

故根据推论 1，方程（14）振动。

参考文献：

［1］ BOHNER M, PETERSON A. Dynamic equations on time scales［M］. Boston: Birkhäuser, 2001.

［2］ BOHNER M, PETERSON A. Advances in dynamic equations on time scales［M］. Birkhäuser, Boston, 2003.

［3］ QIU Y C, WANG Q R. Interval oscillation criteria of second-order nonlinear dynamic equations on time scales［J］. Discrete Dyn Nat Soc, 2012, Article ID 952932: 16.

［4］ QIU Y C, WANG Q R. Kamenev-type oscillation criteria of second-order nonlinear dynamic equations on time scales［J］. Discrete Dyn Nat Soc, 2013, Article ID 315158: 12.

［5］ DEL MEDICO A, KONG Q K. New Kamenev-type oscillation criteria for second-order differential equations on a measure chain［J］. Comput Math Appl, 2005, 50: 1211 -1230.

（下转第 33 页）

定理 2　随机微分博弈问题（3）的最优投资策略为

$$\pi^* = v\rho(D^{\mathrm{T}})^{-1} \tag{15}$$

市场的最优策略为

$$\theta^* = B^{\mathrm{T}}D^{-1} \tag{16}$$

值函数满足下式

$$V(t,x) = f(t)\frac{[x-h(t)]^p}{p} \tag{17}$$

$f(t)$，$h(t)$ 分别满足（13）、（14）式。

证明　令 $\pi(\cdot),\theta(\cdot)$ 是任意两个可行的策略，$X(t,\pi)$ 满足（1）的控制过程，对 $f(t)\frac{[x-h(t)]^p}{p}z^\theta$ 应用 Itô 公式，则（13）、（14）式有

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\left[f(t)\frac{[X(t,\pi)-h(t)]^p}{p}Z^\theta(t)\right] = \\
&\frac{Z^\theta(t)}{p}\{f'(t)[X(t,\pi)-h(t)]^p + \\
&f(t)(-p[X(t,\pi)-h(t)]^{p-1}h'(t) + \\
&p[X(t,\pi)-h(t)]^{p-1}(rX(t,\pi)+\pi B-u) + \\
&\frac{1}{2}p(p-1)[X(t,\pi)-h(t)]^{p-2}\cdot \\
&[\pi(t)D^{\mathrm{T}}D\pi^{\mathrm{T}}(t) - 2\pi vD^{\mathrm{T}}\rho^{\mathrm{T}} + v^2\rho\rho^{\mathrm{T}}] - \\
&p[X(t,\pi)-h(t)]^{p-1}[\pi D^{\mathrm{T}} - v\rho]\theta(t)^{\mathrm{T}})\}\mathrm{d}t - \\
&f(t)\frac{[X(t,\pi)-h(t)]^p}{p}Z^\theta(t)\theta(t)\mathrm{d}W(t) + \\
&f(t)[X(t,\pi)-h(t)]^pZ^\theta(t)(\pi D^{\mathrm{T}} - v\rho)\mathrm{d}W(t) = \\
&\frac{Z^\theta(t)}{p}\left\{\frac{1}{2}p(p-1)[X(t,\pi)-h(t)]^{p-2}\cdot\right. \\
&[\pi(t)-\pi^*(t)](D^{\mathrm{T}}D)[\pi(t)-\pi^*(t)]^{\mathrm{T}} + \\
&\frac{1}{2}\frac{p}{1-p}[X(t,\pi)-h(t)]^p[\theta(t)-\theta^*(t)]\cdot \\
&[\theta(t)-\theta^*(t)]^{\mathrm{T}}\}\mathrm{d}t - f(t)\frac{[X(t,\pi)-h(t)]^p}{p}\cdot \\
&Z^\theta(t)\theta(t)\mathrm{d}W(t) + f(t)[X(t,\pi)-h(t)]^p\cdot \\
&Z^\theta(t)(\pi D^{\mathrm{T}} - v\rho)\mathrm{d}W(t)
\end{aligned}$$

其中 π^*，θ^* 分别满足（15）、（16）式，从 t 到 T 积分，在 $Z^\theta(t)=z, X(t,\pi)=x$ 的条件下在概率测度 P 取条件期望，应用 Beyes 准则，得到

$$\begin{aligned}
&V^{\pi,\theta}(t,x) = f(t)\frac{[x-h(t)]^p}{p} + \\
&\frac{1}{z}E\int_t^T\left\{\frac{Z^\theta(s)}{p}\left\{\frac{1}{2}\frac{p}{1-p}[X(s,\pi)-h(s)]^p\cdot\right.\right. \\
&[\theta(s)-\theta^*(s)]^{\mathrm{T}}[\theta(t)-\theta^*(s)] + \\
&\frac{1}{2}p(p-1)[X(s,\pi)-h(s)]^{p-2}\cdot \\
&[\pi(s)-\pi^*(s)](D^{\mathrm{T}}D)[\pi(s)-\pi^*(s)]^{\mathrm{T}}\}
\end{aligned}$$

因为 $g(t)>0, Z^\theta(t)>0$，所以问题得证。

参考文献：

[1] XIE S, LI Z, WANG S. Continuous-time portfolio selection with liability: mean-variance model and stochastic LQ approach [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 2(3): 943－953.

[2] 常浩，荣喜民. 负债情形下效用投资组合选择的最优控制[J]. 应用概率统计, 2012, 2(5): 57－470.

[3] 金秀，黄小原. 资产负债管理问题及在辽宁养老金问题中的应用[J]. 统工程理论与实践, 2005, 25(9): 42－48.

[4] 吉小东，汪寿阳. 中国养老金动态资产负债管理的优化模型与分析[J]. 统工程理论与实践, 2005, 25(8): 50－54.

[5] CHIU M C, LI D. Asset and liability management under a continuous-time mean-variance optimization framework [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2006, 39(3): 330－355.

[6] ISAACS R. Differential games[M]. New York: Wiley, 1965.

[7] MATARAMVURA S, OKSENDAL B. Risk minimizing portfolios and HJBI equations for stochastic differential games [J]. Stochastics An International Journal of Probability and Stochastic Processes, 2008, 4: 317－337.

[8] SIU T K. A game theoretic approach to option valuation under Markovian regime-switching models [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2008, 42(3), 1146－1158.

[9] BROWNE S. Stochastic differential portfolio games [J]. Journal of Applied Probability, 2000, 37 (1): 126－147.

（上接第 29 页）

[6] DEL MEDICO A, KONG Q K. Kamenev-type and interval oscillation criteria for second-order linear differential equations on a measure chain [J]. J Math Anal Appl, 2004, 294: 621－643.

[7] HUANG H, WANG Q R. Oscillation of second-order nonlinear dynamic equations on time scales [J]. Dynam Systems Appl, 2008, 17(3/4): 551－570.

[8] WANG Q R. Oscillation criteria for nonlinear second order damped differential equations [J]. Acta Math Hunger, 2004, 102: 117－139.