第 52 卷 第 6 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 52 No. 6
2013 年 11 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Nov. 2013

图的圈符号控制数*

徐保根，康洪波，赵利芬，操叶龙
（华东交通大学基础科学学院，江西 南昌 331013）

摘 要：设 $G=(V,E)$ 是一个图，一个函数 $f:V\rightarrow\{-1,1\}$ 如果满足 $\sum_{v\in V(C)}f(v)\geqslant 1$ 对 G 中每一个导出圈 C 均成立，则称 f 为图 G 的一个圈符号控制函数，图 G 的圈符号控制数定义为 $\gamma_{sc}(G)=\min\{\sum_{v\in V(G)}f(v):f$ 为图 G 的一个圈符号控制函数$\}$。得到了图的圈符号控制数的若干下界，并刻划了满足 $\delta\geqslant 2$ 且 $\gamma_{sc}(G)=4-|V(G)|$ 的所有图。

关键词：图；符号控制；圈符号控制函数；圈符号控制数
中图分类号：O157.5 **文献标志码：**A **文章编号：**0529－6579（2013）06－0136－03

On the Cycle Signed Domination Numbers of Graphs

XU Baogen, *KANG Hongbo*, *ZHAO Lifen*, *CAO Yelong*
(School of Basic Science, East China Jiaotong University, Nanchang 330013, China)

Abstract: Let $G=(V,E)$ be a graph, a function $f:V\rightarrow\{-1,1\}$ is said to be a cycle signed domination function (CSDF) of G if $\sum_{v\in V(C)}f(v)\geqslant 1$ holds for any induced cycle C of G, where the cycle signed domination number of G is defined as $\gamma_{sc}(G)=\min\{\sum_{v\in V}f(v)\ f$ is a CSDF of $G\}$. Some lower bounds of the cycle signed domination number of a graph are obtained, and all graphs G with $\delta\geqslant 2$ and $\gamma_{sc}(G)=4-|V(G)|$ are characterized.

Key words: graph; signed domination; cycle signed domination function; cycle signed domination number

本文中所指的图均为无向简单图，文中未说明的符号和术语同于文献［1］。

近几年来，图的控制理论研究的内容越来越广泛，各类控制概念相继产生且研究成果不断丰富，Haynes 等[2]综述了近几些年来图的控制理论研究方面的主要研究成果。文献［3］首先提出了图的符号边控制概念，获得了符号边控制数的许多界限，并将这一概念推广到边上的多种符号控制，如符号星控制[4]、符号圈控制[5]、符号团控制[6]等等。同样地，这也产生了对应的减边控制概念，从而使得控制理论研究内容和研究成果越来越丰富，文献［7］综述了这些研究成果。

1 若干定义

设 $G=(V,E)$ 是一个图，若 C 为图 G 中的一个圈，若 $V(C)$ 在 G 中的导出子图 $G[V(C)]=C$。则称 C 为图 G 的一个导出圈或无弦圈。

设 $G=(V,E)$ 为一个图，$f:V\rightarrow\mathbf{R}$ 为一个实值函数，$S\subseteq V$，则记 $f(S)=\sum_{v\in S}f(v)$。

文献［8］中首先提出并研究了图的圈符号控制。

定义 1[8] 设 $G=(V,E)$ 是一个图，一个函数 $f:V\rightarrow\{-1,1\}$ 如果满足 $f(V(C))\geqslant 1$ 对 G 中每一

* **收稿日期：**2013－04－02
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11061014，11361024）；江西省高校科技落地计划资助项目（KJLD12067）；江西省自然科学基金资助项目（20114BAB201010）；江西省教育厅科技资助项目（GJJ12295）
作者简介：徐保根（1963 年生），男；**研究方向：**图论及应用；E-mail：Baogenxu@163.com

个导出圈 C 均成立，则称 f 为图 G 的一个圈符号控制函数，图 G 的圈符号控制数定义为 $\gamma_{sc}(G)=\min\{f(V):f$ 为图 G 的一个圈符号控制函数$\}$。

2　主要结论及其证明

首先给出满足 $\delta\geqslant 2$ 且 $\gamma_{sc}(G)=4-|V(G)|$ 的图 G 的一个刻划。

定理 1　对于任意 n 阶图 G，若其最小度 $\delta=\delta(G)\geqslant 2$，则 $\gamma_{sc}(G)\geqslant 4-n$，且等式成立当且仅当 $G\cong K_2\vee\overline{K_{n-2}}$。

证明　由于 $\delta\geqslant 2$，图 G 至少有一个圈，从而对图 G 的每一个圈符号控制函数 f，G 中至少有两个点 $v\in V(G)$ 满足 $f(v)=1$，故 $\gamma_{sc}(G)\geqslant 4-n$。

现在证明：$\gamma_{sc}(G)=4-n$ 当且仅当 $G\cong K_2\vee\overline{K_{n-2}}$。

充分性是显然的。下面证明必要性。

设 f 为 G 的一个圈符号控制函数，使得 $\gamma_{sc}(G)=\sum_{v\in V(G)}f(v)=4-n$，令

$$A=\{v\in V(G)\,|\,f(v)=1\},$$
$$B=\{v\in V(G)\,|\,f(v)=-1\},$$
$$\gamma_{sc}(G)=|A|-|B|=2|A|-n$$

故 $|A|=2$，记 $A=\{u,v\}$。

论断 1　G 的边连通度 $\lambda(G)\geqslant 2$。

若 G 为不连通图，即 G 至少有两个分支，由于 $\delta\geqslant 2$，G 的每个分支中至少有一个导出圈，从而至少有一个导出圈 C，使 C 上至多有 A 中一个点，故 $f(V(C))\leqslant -1$，矛盾。

若 G 中有割边 $e=ab\in E(G)$，令 $G_1=G-e$，G_1 至少有两个分支，由于 $\delta(G)\geqslant 2$，a 点所在的分支 G_a 中至多有一个 1 度点（a 点），其它点的度至少为 2，故 G_a 中有导出圈。同理，G_b 中也有导出圈，从而至少有一个导出圈 C，使 C 上至多有 A 中一个点，故 $f(V(C))\leqslant -1$，矛盾。因此，论断 1 成立。

论断 2　$uv\in E(G)$，且 $G-A=\overline{K_{n-2}}$ 为空图。

由于 $\lambda(G)\geqslant 2$，故 G 中任何点都在一个导出圈中，由 $|A|=2$ 知，G 中任何导出圈均为一个三角形，且均包含 u 和 v 两点（否则，存在导出圈 C，$f(V(C))\leqslant 0$，矛盾）。因此，$uv\in E(G)$。

若 $G-A\neq\overline{K_{n-2}}$，则存在 $e\in E(G-A)$，由于 $\lambda(G)\geqslant 2$，e 边必在一个导出圈 C 中，

由于 e 边的两端点均不在 A 中，故 $f(V(C))\leqslant 0$，矛盾。因此，论断 2 成立。

由论断 2 知 $V(G-A)$ 为图 G 的一个独立集，由 $\delta(G)\geqslant 2$ 知 $V(G-A)$ 中任何点均与 u 和 v 同时邻接，注意到 $uv\in E(G)$，因而有 $G\cong K_2\vee\overline{K_{n-2}}$，至此，定理证毕。

给出图的圈符号控制数的一个下界。

定理 2　对于任意 n 阶图 G，若其最小度 $\delta=\delta(G)\geqslant 2$，则有

$$\gamma_{sc}(G)\geqslant 2\delta-n$$

并且此下界是最好可能的。

证明　设 f 为 G 的一个圈符号控制函数，使得 $\gamma_{sc}(G)=\sum_{v\in V(G)}f(v)$。令

$$A=\{v\in V(G)\,|\,f(v)=1\},$$
$$B=\{v\in V(G)\,|\,f(v)=-1\}$$

记 $|A|=s$，$|B|=t$，由定义知，

$$\gamma_{sc}(G)=s-t=2s-n$$

因为 $\delta=\delta(G)\geqslant 2$，故 G 中有圈，从而至少有一个无弦圈 C，由定义得 $\sum_{v\in V(C)}f(v)\geqslant 1$，故知 $s\geqslant 2$。在 G 中去掉 $s-1$ 个 H 中的点（连同其关联的边），得到一个图 H，由于 H 中恰好只有一个 A 中点，且 H 中的任何导出圈也是 G 中的导出圈，故 H 为一个无圈图，从而 $\delta(H)\leqslant 1$，$\delta=\delta(G)\leqslant\delta(H)+(s-1)\leqslant s$，即 $\gamma_{sc}(G)=2s-n\geqslant 2\delta-n$。

下面说明此下界是最好可能的。

对于每一个整数 $\delta\geqslant 2$，定义一个联图 $G=K_\delta\vee\overline{K_{n-\delta}}$，可见 $\delta(G)=\delta\geqslant 2$，从上述知 $\gamma_{sc}(G)\geqslant 2\delta-n$。另一方面，令 $V_1=V(K_\delta)$，$V_2=V(\overline{K_{n-\delta}})$，定义图 G 的一个圈符号控制函数 f 如下：

$$f(v)=\begin{cases}+1 & \text{当 } v\in V_1 \text{ 时；}\\ -1 & \text{当 } v\in V_2 \text{ 时；}\end{cases}$$

不难验证，f 为图 G 的一个圈符号控制函数，从而 $\gamma_{sc}(G)\leqslant\sum_{v\in V(G)}f(v)=2\delta-n$，因此有 $\gamma_{sc}(G)=2\delta-n$，即定理给出的下界是最好可能的，定理证毕。

对于一个无圈图 G，我们知道 $\gamma_{sc}(G)=-|V(G)|$，这使得对于无圈图来说，图的圈符号控制数是已知的，无需研究。下面针对有圈图给出圈符号控制数的一个下界。

定理 3　对于任意 n 阶图 G，$|E(G)|=m$，若 G 中至少有一个圈，则有

$$\gamma_{sc}(G)\geqslant n-1-\sqrt{(2n-1)^2-8m}$$

证明　设 f 为 G 的一个圈符号控制函数，使得 $\gamma_{sc}(G)=\sum_{v\in V(G)}f(v)$。令

$$A = \{v \in V(G) \mid f(v) = 1\},$$
$$B = \{v \in V(G) \mid f(v) = -1\}$$

记 $|A| = s$，$|B| = t$，由定义知，

$$\gamma_{sc}(G) = s - t = 2s - n$$

设 B 在 G 中导出子图 $G[B]$ 的边数 $|E(G[B])| = r$,显然 $G[B]$ 是一个无圈图，故 $r \leqslant t-1$。对于任意一个点 $u \in A$，$B \cup \{u\}$ 在 G 中导出子图 $G(u)$ 是一个无圈图，否则存在 $G(u)$ 的一个导出圈 C，显然 $f(V(C)) = 1-(|V(C)|-1) \leqslant -1$，矛盾。从而 $G(u)$ 的边数 $m_u \leqslant |V(G(u))| - 1 = t$，从而 $|N(u) \cap B| \leqslant t - r$。注意到 u 点在 A 中的任意性，故 A 与 B 之间的边数 $|E(A,B)| = \sum_{u \in A} |N(u) \cap B| \leqslant s(t-r)$。注意到 $s + t = n$，由于 G 中至少有一个圈，故 $s \geqslant 2$。因此，

$$m = |E(G[A])| + |E(A,B)| + |E(G[B])| \leqslant \binom{s}{2} + s(t-r) + r \leqslant \binom{s}{2} + s(n-s)$$

这导出 $-\left(n - \frac{1}{2} - s\right)^2 \geqslant 2m - \left(n - \frac{1}{2}\right)^2$，$\left|n - \frac{1}{2} - s\right| \leqslant \sqrt{(n-\frac{1}{2})^2 - 2m}$，即

$$s \geqslant n - \frac{1}{2} - \sqrt{(n-\frac{1}{2})^2 - 2m}$$

从而有 $\gamma_{sc}(G) = 2s - n \geqslant n - 1 - \sqrt{(2n-1)^2 - 8m}$，定理证毕。

参考文献:

[1] BONDY J A, MURTY U S R. 图论及其应用［M］. 吴望名,等译. 北京:科学出版社,1984.

[2] HAYNES T W, HEDETNIEMI S T, SLATER P J. Domination in graphs［M］. New York: Marcel Dekker Inc, 1998.

[3] XU B G. On signed edge domination numbers of graphs［J］. Discrete Math, 2001, 239: 179－189.

[4] XU B G. Two classes of edge domination in graphs［J］. Discrete Appl Math, 2006, 154: 1541－1546.

[5] XU B G. On signed cycle domination numbers in graphs［J］. Discrete Math, 2009, 309: 1007－1012.

[6] 徐保根. 关于图的团符号控制数［J］. 系统科学与数学, 2008, 3: 282－287.

[7] 徐保根. 图的控制理论［M］. 北京:科学出版社, 2008.

[8] 帅春萍,徐保根,赵金凤,等. 关于图的符号圈点控制数［J］. 华东交通大学学报,2009,26(4):91－94.