第 54 卷 第 1 期 2015 年 1 月
中山大学学报（自然科学版）
ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI
Vol. 54 No. 1 Jan. 2015

DOI:10.1347/j. cnki. acta. snus. 2015. 01. 011

给定不确定结果的量子比特的量子态区分*

张 刚[1]，张文海[2]

（1. 皖西学院机械与电子工程学院，安徽 六安 237012；
2. 淮南师范学院物理系，安徽 淮南 232038）

摘　要：给出更简单的利用辅助测量比特和系统的幺正演化的方法用于在给定不确定结果时的量子比特的两个量子态区分。方案涵盖了当不确定结果的概率为零时的最小错误区分，以及当不确定结果的概率为某些数值时的最优确定性区分。文中给出最大全局正确概率和给定不确定概率关系的解析式。利用辅助测量比特，对被测的非正交量子态初态系统实施幺正演化，对输出态进行正交测量，就可以完成非正交态的量子态区分。方案提供了一种对于两个非正交量子态的正定算符值测量的物理实现方法。

关键词：量子态区分；最小错误区分；确定性区分

中图分类号：O431　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529 - 6579（2015）01 - 0052 - 06

State Discrimination of Qubits with a Fixed Inconclusive Answer

ZHANG Gang[1], *ZHANG Wenhai*[2]

(1. School of Mechanical and Electronic Engineering, West Anhui University, Lu'an 237012, China;
2. Department of Physics, Huainan Normal University, Huainan 232038, China)

Abstract: By exploiting an ancillary measured qubite and a system unitary evolution, a simpler method for state discrimination of qubits with a fixed inconclusive answer is given. The strategy includes the minimal error discrimination is zero as the probability of an inconclusive answer and the optimal unambiguous discrimination is some value as the probability of an inconclusive answer. The analytical solution was derived between the maximal total correct probability and the fixed inconclusive probability. By using an ancillary measured qubite, a unitary transformation acts on the whole initial system and the orthogonal measures on the output states can reach quantum state discrimination of two nonorthogonal states. The scheme itself provides an implementation of a positive operator-valued measure of two nonorthogonal quantum states.

Key words: quantum state discrimination; minimum-error discrimination; unambiguous discrimination

量子力学指出：正交量子态可以被精确地测量（区分），而非正交量子态则不能。在量子密钥分配（Quantum key distribution，QKD）中[1-2]，通信双方利用非正交量子态进行量子通信。量子态被用于编码成量子密钥，通信双方通过测量非正交量子态而使接收方获得量子密钥。因此，量子态区分（Quantum state discrimination，QSD）就成为量子信息中一个基本研究方向[3]。目前，大量的研究工作关注于这个方向，并且量子态区分理论研究发展迅速。

QSD 可以描述为：确认具有先验概率为 η_i 的一组由已知的 N 个非正交量子态 $|\psi_i\rangle$ 构成的集合

* **收稿日期**：2014 - 07 - 20
基金项目：安徽省自然科学基金资助项目（1408085MA20）；安徽省教育厅自然科学基金资助项目（KJ2010A323）
作者简介：张刚（1975 年生），男；**研究方向**：量子信息与量子计算；E-mail：zhanggang@wxc.edu.cn

$S = \{|\psi_i\rangle\}_{i=1}^{N}$。目前，QSD 有两种基本方案：最小错误区分（Minimum-error discrimination，MD）[4] 和确定性区分（Unambiguous discrimination，UD）[5-8]。在 MD 中，量子测量可以给出测量正确的测量概率，同时也会给出测量错误的测量概率，主要指标是得出最小全局错误概率（或最大全局正确概率）；在 UD 中，量子测量可以给出确定性的成功概率（确定性地确认被测量的量子态），但有时测量也会产生不确定结果（无法确定被测量的量子态），主要指标是得出最小全局不确定概率（或最大全局成功概率）。目前，对于不同的态集，许多研究致力于找出 MD 测量[9-16]，包括纯态、混合态和对称态等。对于 UD 测量，最早给出的是以相等先验概率输入的两个非正交态量子态测量[5-7]，而后推广到任意先验概率情况[8]。三个非正交态情况的 UD 由 Peres 和 Terno 给出[17]。而后证明，只有线性无关的非正交态才能够使 UD[18]。在 $N \geqslant 3$ 时，许多文献给出了一些特殊输入态情况下的最小全局不确定概率的精确解[19-22]。

文献［23］设定一种普遍的测量方案：在给定不确定结果的概率 Q 时，求解最大全局正确概率 $P_c^{\max}$。或者具体表示为：给出最大全局正确概率和给定不确定概率之间的关系，可表示为函数 $P_c^{\max} = f(Q)$。利用正定算符值测量（Positive Operator-Valued Measure，POVM）方法，得出两个特殊量子态（两个量子态的内积是实数）的最大全局正确概率和给定不确定概率之间的关系。显然，当不确定结果概率 $Q = 0$ 时，方案就退化为 MD；当不确定概率 $Q = Q_0$（Q_0 是某一数值，依赖于先验概率和输入态之间的关系），方案就退化为 UD。在本文中，我们给出一种简单的方法求解出函数 $P_c^{\max} = f(Q)$ 的解析式。利用辅助测量比特，对被测的非正交量子态和辅助测量比特构成的直积态初态系统实施幺正演化，通过对两粒子输出态进行正交测量，就可以完成非正交态的量子态区分。相对于文献［23］，本文具有以下特点：① 选取的量子态是内积取为复数的一般量子态，而不是特殊量子态；② 解出的函数 $P_c^{\max} = f(Q)$ 是解析式，而不是分析解；③ 提出的方案提供了实现两个量子态 POVM 的物理方法。

1　两个量子态的 POVM

我们首先介绍文献［23］中利用 POVM 对两个量子态进行区分。特殊的输入量子态形式为

$$|\psi_1\rangle = \cos\theta_1|1\rangle + \sin\theta_1|2\rangle,$$
$$|\psi_2\rangle = \cos\theta_2|1\rangle + \sin\theta_2|2\rangle \tag{1}$$

它们的内积为

$$s = \langle\psi_1|\psi_2\rangle = \cos(\theta_1 - \theta_2) = \cos\theta \in (-1,1) \tag{2}$$

一般而言，任意两个量子态的内积是复数。我们将在下一节里设定量子态的内积为复数，所得到的结果能对任意两个量子态都适用。对于两个量子态的先验概率 $\eta_i (i = 1,2)$，满足关系 $\eta_1 + \eta_2 = 1$，文献［23］设定在 POVM 元的集合中，三个测量元表示为 $\Pi = \{\Pi_0, \Pi_1, \Pi_2\}$，并满足 $\Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 = I$（$I$ 是单位算符，该式表示为量子测量的完备性），其中算符 $\Pi_{1(2)}$ 表示可以对输入量子态 $\rho_{1(2)} = |\psi_{1(2)}\rangle\langle\psi_{1(2)}|$ 的判定，而算符 Π_0 则对应为不确定结果。定义测量量子态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$ 的正确概率为 $p_{11} = tr(\rho_1\Pi_1)$ 和 $p_{22} = tr(\rho_2\Pi_2)$，这意味着当算符 $\Pi_i (i = 1,2)$ 出现时，可以正确概率 p_{ii} 判断输入态是 ρ_i。测量错误的概率为 $p_{12} = tr(\rho_2\Pi_1)$ 和 $p_{21} = tr(\rho_1\Pi_2)$，这就是说，当算符 $\Pi_i (i = 1,2)$ 出现时，会以错误的概率 $p_{ij} (j = 1,2; i \neq j)$ 认为输入态是 $|\psi_j\rangle$。不确定概率为 $q_1 = tr(\rho_1\Pi_0)$ 和 $q_2 = tr(\rho_2\Pi_0)$，这意味着，当算符 Π_0 出现时，不能判断输入态。显然，在不出现错误判断 $p_{ij} = 0$，以及也不存在不确定概率 $q_i = 0$ 时，就可以确定性地判断输入态。但是，这是不可能的，因为非正交量子态是不可能确定性地被判断，这是量子力学中的基本原理（量子态叠加原理）。当然，正交量子态是可以被确定性地测量。因此，经典的测量方案有两种：① 当不确定概率 $q_i = 0$ 时，测量就会出错，有 $p_{ii} \neq 0$ 和 $p_{ij} \neq 0$，这就是 MD；② 如果希望测量不出错 $p_{ij} = 0$（此时算符 Π_i 的出现就可以确定性地判断输入态为 $|\psi_i\rangle$），就必须有 $q_i \neq 0$，这就是 UD。

结合输入态的先验概率 η_1 和 $\eta_2 = 1 - \eta_1$，传统上规定全局正确概率 P_c，全局错误概率 P_e 以及不确定概率 Q 的定义如下[23]：

$$P_c = tr(\eta_1\rho_1\Pi_1) + tr(\eta_2\rho_2\Pi_2) = \eta_1 p_{11} + \eta_2 p_{22},$$
$$P_e = tr(\eta_1\rho_1\Pi_2) + tr(\eta_2\rho_2\Pi_1) = \eta_1 p_{21} + \eta_2 p_{12},$$
$$Q = tr(\eta_1\rho_1\Pi_0) + tr(\eta_2\rho_2\Pi_0) = \eta_1 q_1 + \eta_2 q_2 \tag{3}$$

显然，（3）式给出概率关系 $P_c + P_e + Q = 1$。对于给定的不确定概率 Q，文献［23］是求解全局正确概率 P_c 最大值（等价于求解全局错误概率 P_e 的最小值）。对于特殊的输入态（1），文献［23］定义

$$\cos\theta_1\sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_1\cos^2\theta_1+\eta_2\cos^2\theta_2}}\equiv\cos\varphi,$$
$$\cos\theta_2\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1\cos^2\theta_1+\eta_2\cos^2\theta_2}}\equiv\sin\varphi \quad (4)$$

对于特殊值 $\varphi=\pi/4$，文献［23］得出全局正确（错误）概率 $P_{c/e}^{\max/\min}$ 和给定不确定概率 Q 之间具体的表达式：

$$P_{c/e}^{\max/\min}=\frac{1}{2}\left[(1-Q)^2\pm\sqrt{(1-Q)^2-(Q_0-Q)^2}\right] \quad (5)$$

其中 $Q\leqslant Q_0=2|s|\sqrt{\eta_1\eta_2}$，$|s|$ 为 s 的绝对值。当 θ_1 和 θ_2 取任意值并且满足 $\theta_1-\theta_2=\theta$ 关系时，文献［23］给出关系

$$Q=1-P_e-\eta_{1(2)}\left(\sqrt{\frac{P_e}{\eta_{2(1)}}}\cos\theta\pm\sqrt{1-\frac{P_e}{\eta_{2(1)}}}\sin\theta\right)^2 \quad (6)$$

对（6）式求逆可得 $P_{c/e}(Q)$，但是文献［23］并没有分析，原因是 $P_{c/e}(Q)$ 是多值函数，得不出明显的含义。在本文中，我们得出了（6）式具体的反函数。

本节介绍文献［23］的结果。从其内容可以看出，文献［23］选择的是特殊输入态（两个量子态的内积为实数），而一般的量子态的内积是复数。其次，在角度为特殊值 $\varphi=\pi/4$ 时，（5）式给出最大全局正确概率和给定不确定概率的具体解析式；而在取任意值时，（6）式给不出明确的关系。最后，文献［23］利用 POVM 得出相应的概率，但是，POVM 本身不能直接在物理上实现，需要将 POVM 转化为物理上可以实现的测量。在下一节中，将选取一般的量子态作为输入态，并给出物理上可以直接实现的测量方案，最后得出最大全局正确概率和给定不确定概率的具体解析式。

3 两个量子态区分

选取两个非正交量子态 $|\psi_1\rangle$ 和 $|\psi_2\rangle$，它们的内积一般为 $\langle\psi_1|\psi_2\rangle$ 复数，可以不失一般性地定义为

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle=se^{i\varphi},\text{取 } s\in(0,1)\text{和 }\varphi\in[0,2\pi) \quad (7)$$

利用文献［24－25］的方法，可以首先将一个幺正变换作用在输入态上，然后对输出态进行正交测量。对于 MD，幺正变换定义为

$$|\psi_1\rangle\rightarrow\sqrt{p_{11}}|1\rangle+\sqrt{p_{21}}|2\rangle,$$
$$|\psi_2\rangle\rightarrow e^{i\varphi}(\sqrt{p_{22}}|2\rangle+\sqrt{p_{12}}|1\rangle) \quad (8)$$

其中，量子态 $|1\rangle$ 和 $|2\rangle$ 是正交测量基，概率满足关系 $p_{11}=1-p_{21}$ 和 $p_{22}=1-p_{12}$。（8）中第一式表示，当以概率 p_{11} 测量到 $|1\rangle$ 时，认为输入态是 $|\psi_1\rangle$，这是正确的；但当以概率 p_{21} 测量到 $|2\rangle$ 时，认为输入态是 $|\psi_2\rangle$，这是错误的。（8）中第二式也是一样。MD 是对全局错误概率求最小值，也等价于求全局正确概率的最大值。利用（8）式的两个量子态的内积关系 $s=\sqrt{p_{11}(1-p_{22})}+\sqrt{p_{22}(1-p_{11})}$，可以容易的求解。当概率为

$$p_{11}=\frac{1}{2}+\frac{1-2\eta_2s^2}{2\sqrt{1-4\eta_1\eta_2s^2}},$$
$$p_{22}=\frac{1}{2}+\frac{1-2\eta_1s^2}{2\sqrt{1-4\eta_1\eta_2s^2}} \quad (9)$$

Helstrom 界限表示为[4]

$$P_e^{(MD)}=\frac{1}{2}(1-\sqrt{1-4\eta_1\eta_2s^2}) \quad (10)$$

对于 UD，引入辅助测量比特 $|1\rangle_a$，定义幺正变换为

$$|\psi_1\rangle|1\rangle_a\rightarrow\sqrt{p_{11}}|1\rangle|1\rangle_a+\sqrt{q_1}|2\rangle|2\rangle_a,$$
$$|\psi_2\rangle\rightarrow e^{i\varphi}(\sqrt{p_{22}}|2\rangle|1\rangle_a+\sqrt{q_2}|2\rangle|2\rangle_a) \quad (11)$$

在（11）式中，辅助测量比特和被测非正交态构成直积态初态系统，对初态系统实施联合幺正演化可以得到输出态。测量步骤分为两步骤，首先对辅助测量比特进行测量，如果测量为 $|2\rangle_a$ 态，则不能判断初态 $|\psi_{1(2)}\rangle$；如果测量为 $|1\rangle_a$ 态，则对初态进行测量，测量为 $|1\rangle$（或 $|2\rangle$）态时，可以判断初态 $|\psi_1\rangle$（或 $|\psi_2\rangle$）态。（11）式中，概率之间满足关系 $q_1=1-p_{11}$ 和 $q_2=1-p_{22}$。UD 是对不确定概率求最小值，等价于求全局正确（成功）概率的最大值。利用（11）式中的内积关系 $s=\sqrt{q_1q_2}$，可以容易求不确定概率的最小值。当概率为

$$p_{11}=1-\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}}s,q_1=\sqrt{\frac{\eta_2}{\eta_1}},$$
$$p_{22}=1-\sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}}s,q_2=\sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}}s \quad (12)$$

最优成功概率为

$$P_c^{(OD)}=1-2\sqrt{\eta_1\eta_2}s \quad (13)$$

这就是 JS 极限[8]。当等概率输入时，（13）式退化为 IDP 极限[5－7]。

由于成功概率的区间为 $p_{11},p_{22}\in(0,1)$，求

解（12）式可以得出先验概率的区间为 $\eta_1,\eta_2 \in \left(\frac{s^2}{1+s^2},\frac{1}{1+s^2}\right)$。如果先验概率在这个区间之外，例如，可以取 $\eta_1 \in \left(0,\frac{s^2}{1+s^2}\right]$ 和 $\eta_2 \in \left[\frac{1}{1+s^2},1\right)$，测量就变为投影测量[23]。可以定义幺正变换为

$$|\psi_1\rangle|1\rangle_a \to |2\rangle|2\rangle_a,$$
$$|\psi_2\rangle|1\rangle_a \to e^{i\varphi}(\sqrt{1-s^2}|2\rangle|1\rangle_a + s|2\rangle|2\rangle_a) \tag{14}$$

这种情况下量子态 $|\psi_1\rangle$ 就不能被判断，最小不确定概率为 $Q = \eta_1 + \eta_2 s^2$。当先验概率取 $\eta_1 \in \left[\frac{1}{1+s^2},1\right)$ 和 $\eta_2 \in \left(0,\frac{s^2}{1+s^2}\right]$，可以定义幺正变换为

$$|\psi_1\rangle \to \sqrt{1-s^2}|1\rangle|1\rangle_a + s|2\rangle|2\rangle_a,$$
$$|\psi_2\rangle \to e^{i\varphi}|2\rangle|2\rangle_a \tag{15}$$

这种情况下量子态 $|\psi_2\rangle$ 就不能被判断，最小不确定概率为 $Q = \eta_1 s^2 + \eta_2$。上述 UD 的结果已由 POVM 方法得出[23,26]，我们给出的幺正变换，可以直接在物理上实现 MD 和 UD。

上述的方法可以直接推广到文献［23］的情况，相应的幺正变换定义为

$$|\psi_1\rangle|1\rangle_a \to \sqrt{p_{11}}|1\rangle|1\rangle_a + \sqrt{p_{21}}|2\rangle|1\rangle_a + \sqrt{q_1}|2\rangle|2\rangle_a,$$
$$|\psi_2\rangle|1\rangle_a \to e^{i\varphi}(\sqrt{p_{12}}|1\rangle|1\rangle_a + \sqrt{p_{22}}|2\rangle|1\rangle_a + \sqrt{q_2}|2\rangle|2\rangle_a) \tag{16}$$

（16）式给出概率系数的归一化条件和两个量子态的内积：

$$p_{11} + p_{21} + q_1 = 1, p_{12} + p_{22} + q_2 = 1 \tag{17-1}$$

$$\sqrt{p_{11}p_{12}} + \sqrt{p_{21}p_{22}} + \sqrt{q_1q_2} = s \tag{17-2}$$

将（17-1）代入（17-2）可以得到

$$\sqrt{p_{11}(b-p_{22})} + \sqrt{(a-p_{11})p_{22}} - c = f = 0 \tag{18}$$

其中，令 $a = 1-q_1$，$b = 1-q_2$ 和 $c = s - \sqrt{q_1q_2}$。在（18）条件下，利用拉格朗日数乘法，很容易求出最大全局正确概率的极大值。当概率为

$$p_{11} = \frac{a[(a\eta_1+b\eta_2)^2-4\eta_1\eta_2c^2]+[a(a\eta_1+b\eta_2)-2c^2\eta_2]\sqrt{\Delta}}{2\Delta}$$

$$p_{22} = \frac{b\Delta+[b(a\eta_1+b\eta_2)-2c^2\eta_1]\sqrt{\Delta}}{2\Delta}$$

$$\Delta = (a\eta_1+b\eta_2)^2-(2c\sqrt{\eta_1\eta_2})^2 \tag{19}$$

最大全局正确概率为

$$P_{c/e}^{\max/\min} = \frac{1}{2}[(a\eta_1+b\eta_2) \pm \sqrt{(a\eta_1+b\eta_2)^2-4\eta_1\eta_2c^2}] \tag{20}$$

将 a，b 和 c 的数值代入（20）式中，可以得到

$$P_{c/e}^{\max/\min} = \frac{1}{2}[(1-Q) \pm \sqrt{(1-Q)^2-(2s\sqrt{\eta_1\eta_2}-2\sqrt{\eta_1q_1\eta_2q_2})^2}] \tag{21}$$

其中，利用了关系 $a\eta_1+b\eta_2 = 1-Q$。对于给定的不确定概率 Q，（21）式中的数值 $2s\sqrt{\eta_1\eta_2}-2\sqrt{\eta_1q_1\eta_2q_2}$ 起着关键的作用，我们分析解析式（21）的意义：

（a）当 $Q = 0$ 时，（21）式给出 $P_c^{\max} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4\eta_1\eta_2s^2})$，这意味着 MD。

（b）当方程 $2s\sqrt{\eta_1\eta_2}-2\sqrt{\eta_1q_1\eta_2q_2} = 0$ 的一个解为 $\eta_1q_1 = \eta_2q_2 = \frac{1}{2}Q = s\sqrt{\eta_1\eta_2}$ 时，（21）式给出 $P_e^{\min} = 0$，这意味着 UD。同时，可以得出不确定概率和全局正确概率的数值，由（12）式给出。同样也可以得出先验概率的区间为 $\eta_1,\eta_2 \in \left(\frac{s^2}{1+s^2},\frac{1}{1+s^2}\right)$。

（c）方程 $2s\sqrt{\eta_1\eta_2}-2\sqrt{\eta_1q_1\eta_2q_2} = 0$ 的另外两个解为 $q_{1(2)} = 1$ 和 $q_{2(1)} = s^2$，意味着投影测量。显然，当 $\eta_1 \in \left[0,\frac{s^2}{1+s^2}\right)$ 时，取 $q_1 = 1$ 和 $q_2 = s^2$，对应（14）式；当 $\eta_2 \in \left[0,\frac{s^2}{1+s^2}\right)$ 时，取 $q_2 = 1$ 和 $q_1 = s^2$，对应（15）式。

对于给定的不确定概率 $Q = \eta_1q_1 + \eta_2q_2$，总可以取 $\eta_1q_1 = \eta_2q_2 = \frac{1}{2}Q$，就有 $2\sqrt{\eta_1q_1\eta_2q_2} = \eta_1q_1 + \eta_2q_2 = Q$。令 $2s\sqrt{\eta_1\eta_2} = Q_0$，（21）式可以写为

$$P_{c/e}^{\max/\min} = \frac{1}{2}[(1-Q) \pm \sqrt{(1-Q)^2-(Q_0-Q)^2}],$$
$$(Q_0 \geqslant Q \geqslant 0) \tag{22}$$

这个解析式的形式和（5）式相同，并且对任意两个非正交量子态都适用，是最优 QSD。

（22）式具有普遍意义。显然，在先验概率的区间为 $\eta_1,\eta_2 \in \left(\frac{s^2}{1+s^2},\frac{1}{1+s^2}\right)$ 时，（22）式成立。下面举出不在此区间的一个实例，（22）式仍能成

立。设量子态内积有 $s = \frac{1}{\sqrt{2}}$，根据 UD 可以算出先验概率为 $\eta_1, \eta_2 \in \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ 时，是最优 UD 的条件；而当 $\eta_1 = \frac{1}{4}$ 和 $\eta_2 = \frac{3}{4}$ 时，只能是投影测量而且 $|\psi_1\rangle$ 是不能被确定（只能确定 $|\psi_2\rangle$），由（14）式可得到不确定概率为 $Q^{(UD)} = \eta_1 + \eta_2 s^2 = \frac{5}{8}$，也可以计算出 $Q_0 = 2s\sqrt{\eta_1\eta_2} = \frac{\sqrt{6}}{4}$。用本文的结果可以对 $|\psi_1\rangle$ 进行确定。取 $Q = \eta_1 q_1 + \eta_2 q_2 = \frac{1}{4} < (Q^{(UD)}, Q_0)$（只要满足这个关系，$Q$ 当然可以取其他值），根据 $\eta_1 q_1 = \eta_2 q_2 = \frac{1}{2}Q$ 可以计算出 $q_1 = \frac{1}{2}$ 和 $q_2 = \frac{1}{6}$。由（19）式可以得到最优概率为

$$p_{11} = \frac{1}{20}(5 + 2\sqrt{35\sqrt{6} - 85}) \approx 0.335\,6,$$

$$p_{21} = \frac{1}{20}(5 - 2\sqrt{35\sqrt{6} - 85}) \approx 0.164\,4, q_1 = \frac{1}{2},$$

$$p_{22} = \frac{5}{12} + \frac{1}{30}\sqrt{65 + 35\sqrt{6}} \approx 0.825\,9,$$

$$p_{12} = \frac{5}{12} - \frac{1}{30}\sqrt{65 + 35\sqrt{6}} \approx 0.007\,4, q_2 = \frac{1}{6},$$

$$P_c^{\max} = \frac{1}{8}(3 + \sqrt{2 + 2\sqrt{6}}) \approx 0.703\,3 \quad (23)$$

可以验证上述数据满足概率系数归一化条件和内积关系（17－2）式，$P_c^{\max} \approx 0.703\,3$ 满足定义式（3），也满足解析式（22）。这个例子说明了 $|\psi_1\rangle$ 以正确概率 $p_{11} \approx 0.335\,6$ 而被确定。所以，这种测量不是投影测量，是最优的。

由于 POVM 定义测量算符可以是非正交的，而非正交测量在物理上是不可以实现的，所以对非正交的 POVM 算符不可能直接在物理上实现。我们利用辅助测量比特，对初态系统实施幺正演化，将 POVM 测量算符转化为对输出态的正交测量。幺正演化和正交测量在物理上是可以实现的，因此，方案（16）式为实现量子态区分的 POVM 提供了一种物理实现的具体方法。

3 结 论

本文得出了在给定不确定概率情况下，两个非正交量子态区分的普遍式，具体表示为最大全局正确概率是给定不确定概率的函数解析式。提出的方案适合任意区间的先验概率。同时，方案给出的幺正变换为实现量子态区分的 POVM 提供了物理实现的具体方法。

参考文献：

[1] GISIN N, RIBORDY G, TITTEL W, et al. Quantum cryptography [J]. Rev Mod Phys,2002, 74(1): 145－197.

[2] SCARANI V, BECHMANN-P H, CERF N, et al. The security of practical quantum key distribution [J]. Rev Mod Phys, 2009, 81(3): 1301－1350.

[3] BARNETT S M, CROKE S. Quantum state discrimination[J]. Adv Opt Photon, 2009, 1(2): 238－437.

[4] HELSTROM C W. Quantum detection and estimation theory [M]. New York:Academic Press,1976.

[5] IVANOVIC I D. How to differentiate between non-orthogonal states [J]. Phys Lett A, 1987, 123(6): 257－259.

[6] DIEKS D. Overlap and distinguishability of quantum states [J]. Phys Lett A, 1988 126(5): 303－306.

[7] PERES A. How to differentiate between non-orthogonal states [J]. Phys Lett A, 1988,128 (1): 19.

[8] JAEGER G, SHIMONY A. Optimal distinction between two non-orthogonal quantum states [J]. Phys Lett A, 1995, 197(2): 83－87.

[9] BARNETT S M. Minimum-error discrimination between multiply symmetric states [J]. Phys Rev A, 2001, 64 (3): 030303(R).

[10] HERZOG U, BERGOU J A. Minimum-error discrimination between subsets of linearly dependent quantum states [J]. Phys Rev A , 2002, 65(5): 050305(R) .

[11] CHOU C L. Minimum-error discrimination among mirror-symmetric mixed quantum states [J]. Phys Rev A, 2004, 70(6): 062316 .

[12] MOCHON C. Family of generalized “pretty good” measurements and the minimal-error pure-state discrimination problems for which they are optimal [J]. Phys Rev A, 2006, 73(3): 032328 .

[13] QIU D. Minimum-error discrimination between mixed quantum states [J]. Phys Rev A , 2008, 77 (1): 012328.

[14] TYSON J. Error rates of Belavkin weighted quantum measurements and a converse to Holevo's asymptotic optimality theorem [J]. Phys Rev A , 2009, 79 (3): 032343.

[15] ASSALINI A, CARIOLARO G, Pierobon G. Efficient optimal minimum error discrimination of symmetric quantum states [J]. Phys Rev A, 2010, 81 (1): 012315.

（下转第 63 页）

[M]. 沈阳:辽宁大学出版社,1997.
[2] 赵长征. 电气火灾原因认定和痕迹鉴定[J]. 消防技术与产品信息,2003(12):3 -5.
[3] 邸曼,张明. 电气火灾成因分析[J]. 电气工程应用,2006(4):3 -12.
[4] Fire Investigation Section of Tokyo Fire Department. Study on discrimination between PMMs and SMMs of electrical cords (part 1). Summary for Annual Meeting of Journal of Japan Association of Fire Science and Engineering, 1990. p. 83 -6 (in Japanese).
[5] Fire Investigation Section of Tokyo Fire Department. Study on discrimination between PMMs and SMMs of electrical cords. J Jpn Assoc Fire Sci Eng 1992;42(2(197)):15 -20 (in Japanese).
[6] MASAYOSHI M. Possibility of carbon inclusion in the molten markof polyvinyl chloride insulated cords due to a fire, T. IEE Japan 1992;112 - A(1):78 - 9 (in Japanese).
[7] ROBERT N. Surface analysis of electrical arc residues in fire investigation. J Forensic Sci 1989;34(3):633 -7.
[8] KASUHIRO S. Secondary ion mass spectroscopy (SIMS) and auger electron spectroscopy (AES) applied to fire investigation due to shortcircuits[C]//Summary for Annual Meeting of Journal of Japan Association of Fire Science and Engineering, 1996:282 -285 (in Japanese).
[9] KASUHIRO S. Verification SIMS applied to fire investigation due to short-circuits[C]//Summary for Annual Meeting of Journal of Japan Association of Fire Science and Engineering,1998:336 -339 (in Japanese).
[10] 公安部沈阳消防科学研究所. GB/T 16840. 1 -2008 电气火灾痕迹物证技术鉴定方法 第 1 部分:宏观法[S]. 北京:中国标准出版社,2009.
[11] 公安部沈阳消防科学研究所. GB 16840. 4 -1997 电气火灾原因技术鉴定方法 第 4 部分:金相法[S]. 北京:中国标准出版社,2009.
[12] 莫善军,彭文敬,梁栋. 电气火灾一次短路熔痕金相组织特征参数定量分析[J]. 中国安全生产科学技术, 2012,8(1):63 -70.
[13] 朱明华. 火灾原因调查方法及应用[J]. 武警学院学报. 2007,4(23):67 -69.
[14] 陶树英. 住宅电气火灾的防范探讨[J]. 企业科技与发展. 2014(1):41 -42.
[15] 郭鹏,杜元恺. 浅析工厂车间电气设计[J]. 硅谷,2011(14):91 -110.
[16] 余华,何学秋. 仓库火灾特点、原因及防范对策探讨[J]. 中国安全生产科学技术,2005,10(1):85 -87.

(上接第 56 页)

[16] BAE J, HWANG W Y. Minimum-error discrimination of qubit states: Methods, solutions, and properties [J]. Phys Rev A, 2013, 87(1): 012334.
[17] PERES A, TERNO D. Optimal distinction between non-orthogonal quantum states [J]. J Phys A, 1998, 31 (34): 7105.
[18] CHEFLES A. Unambiguous discrimination between linearly independent quantum states [J]. Phys Lett A, 1998, 239(6): 339 -347.
[19] SUN Y, HILLERY M, BERGOU J A. Optimum unambiguous discrimination between linearly independent non-orthogonal quantum states and its optical realization [J]. Phys Rev A , 2001, 64 (2): 022311.
[20] JAFARIZADEH M A, REZAEI M, KARIMI N, et al. Optimal unambiguous discrimination of quantum states [J]. Phys Rev A, 2008, 77(4): 042314.
[21] SAMSONOV B F. Optimal positive-operator-valued measures for unambiguous state discrimination [J]. Phys Rev A, 2009, 79(4): 042312.
[22] BERGOU J A, FUTSCHI U k, FELDMAN E. Optimal unambiguous discrimination of pure quantum states [J]. Phys Rev Lett, 2012,108(25): 250502 .
[23] BAGAN E, MUÑOZ-T R, OLIVARES-R G A, et al. Optimal discrimination of quantum states with a fixed rate of inconclusive outcomes [J]. Phys Rev A, 2012, 86 (4): 040303 (R) .
[24] ZHOU X F, LIN Q, ZHANG Y S, et al. Physical accessible transformations on a finite number of quantum states [J]. Phys Rev A, 2007, 75(1): 012321.
[25] ZHO X F, ZHANG Y S, GUO G C. Unambiguous discrimination of mixed states: A description based on system-ancilla coupling [J]. Phys Rev A , 2007, 75 (5): 052314.
[26] BERGOU J A. Discrimination of quantum states [J]. Journal of Modern Optics, 2010, 57(3): 160.