DOI:10. 1347/j. cnki. acta. snus. 2015. 01. 002

带 tt * －结构的 Frobenius 流形上两个平坦亚纯联络形式同构的存在性*

叶轩明[1]，林洁珠[2]
（1. 中山大学数学与计算科学学院，广东 广州 510275；
2. 广州大学数学与信息科学学院//数学与交叉学科广东普通高校重点实验室，广东 广州 510006）

摘　要：超曲面奇异的半通用展开的基空间上可以自然赋予一个几何结构，Hertling 把该结构公理化称之为 CV －结构，并证明了该几何结构和基空间上的典范 Frobenius 流形是相容的，从而给出了 CDV －结构。给定任意的 CDV －结构 M，在切丛的拉回丛 $H:=\pi^* T_M^{(1,0)}$ 上，有两个自然地平坦亚纯联络，且奇点只在 $\{0\}\times M$ 和 $\{\infty\}\times M$ 上。如果该 CDV －结构中的 Frobenius 流形结构是一个半单 Frobenius 流形时，这两个联络都是非正则的亚纯联络。通过已知的非正则平坦亚纯联络分类定理得到形式同构存在性定理：这两个自然的平坦亚纯联络是形式同构的。将给出该形式同构存在性定理的另一个证明：显式构造性证明。

关键词：Frobeniu 流形；tt * －结构；CDV －结构；平坦亚纯联络；Poincare 秩
中图分类号：O186　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529 －6579（2015）01 －0005 －05

An Constructional Proof for the Existence of the Formal Isomorphism Between Two Flat Meromorphic Connections on a Frobenius Manifold with a tt *-Structure

YE Xuanming[1], *LIN Jiezhu*[2]
（1. School of Mathematics and Computational Science, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China;
2. School of Mathematics and Information Science//Key Laboratory of Mathematics and Interdisciplinary Sciences of Guangdong Higher Education Institutes, Guangzhou University, Guangzhou 510006, China）

Abstract: The base space of the universal unfolding of isolated hypersurface singularities can be equipped with a geometry structure, which was atomizated by Hertling as CV-structures. Hertling also proved that this structure is compatible with the canonical Frobenius manifold on the base space and gave CDV-structure. Given any CDV-structure M, there are two natural flat meromorphic connections $\widetilde{\mathrm{D}}$ and $\widetilde{\nabla}$ on the pull-back bundles of the complex tangent bundle $H:\pi^* T_M^{(1,0)}$, where $\pi:\mathbb{C}\times M\to M$, and the singularities of these two connections are sub-varieties $\{0,\infty\}\times M$. If M is a semi-simple Frobenius manifold, it is known that these two meromorphic connections have irregular singularities. It is concluded that there exists a formal isomorphism between these two formalized bundles with connections by applying the classifications of irregular flat meromorphic connections. A constructional proof of the formal isomorphism is given.

Key words: Frobenius manifolds; tt *-structures; CDV-structures; flat meromorphic connections; Poincare rank

* **收稿日期：**2014 －03 －11
基金项目：国家自然科学基金青年基金资助项目（11201491，11201090）；博士点新教师类资助项目（20120171120009，20124410120001）；高校基本科研业务费青年教师培育资助项目（34000 －3161248）
作者简介：叶轩明（1977 年生），男；**研究方向：**微分几何；**通讯作者：**林洁珠；E-mail：ljzsailing@163. com

Tt＊－几何结构最早是由 Cecotti 和 Vafa 提出的[1-2]，并由 Hertling 将这个几何结构加以公理化提出了 CV－结构[3]，文中他还提出了与之相对应的纯的 TERP－结构，并且证明了“调和 Higgs 丛”与“权为零的极化变动 twistor 结构”之间的一一对应可以推广为 CV－结构与纯的变动 TERP－结构之间的对应[3]。从 TERP－结构来考察这类几何结构，那么该结构的中心元素是该结构的向量丛上的平坦亚纯联络，它的（0，1）部分给出了该丛的一个全纯结构，而（1，0）部分是一个亚纯平坦联络 $\tilde{\mathrm{D}}$。这个亚纯联络的奇点只在子簇 $\{0\}\times M$ 和 $\{\infty\}\times M$ 上，且在这两个子簇上奇点有 Poincare 秩都是 1 的奇性[3-4]。我们称这个联络为 CV－结构的结构联络。

在文［3］构造的例子中，底流形都是超曲面奇异的通用展开的基空间。由 K. Saito 和 M. Saito 的工作，我们知道该底流形上可以赋予典范 Frobenius 流形结构（也称为带有度量的 Saito 结构）[3-5]。Hertling 证明了这个 CV－结构与典范 Frobenius 流形结构相容成为一个新的结构——CDV－结构[3]。对 Frobenius 流形结构起关键作用也是它的结构联络（或称为第一联络），记为 $\tilde{\nabla}$。Frobenius 流形的结构联络也是平坦亚纯联络，且它的奇点也只在子簇 $\{0\}\times M$ 和 $\{\infty\}\times M$ 上。该联络在子簇 $\{0\}\times M$ 有 Poincare 秩为 1 的奇性；而在 $\{\infty\}\times M$ 上，该联络的奇性是 logarithmic 的。在文［3］中，作者证明了具有孤立奇点的全纯函数的通用展开所决定的基空间上，存在 CDV－结构而且该结构所决定的这两个联络是全纯同构的（文章作者称这样的 CDV－结构为典范 CDV－结构）。在文［4］中，Claude Sabbah 证明在便利（convenient）和非退化（non-degenerate）的劳伦多项式的通用展开的基空间上存在着 CDV－结构，而且该结构也是典范 CDV－结构。当底流形维数为 2 的时候，Frobenius 流形的 tt＊－几何的构造主要是由 Atsushi Takahashi[6]完成的。有趣的 Frobenius 流形的例子都被熟知[7]，而 tt＊－几何结构的例子却非常欠缺，任意半单的 Frobenius 流形上 tt＊－几何结构的存在性定理在文［8］给出，本文作者还具体给出该 CDV－结构的 Hermitian 度量和实结构在典范框架下的所对应的矩阵的具体表达式。在文［9］中，作者证明了对一般的半单 CDV－结构，这两个联络存在着形式同构，并且给出了二维的 Tate 类型的 CDV－结构中，这个形式同构不能提升为全纯同构的充分必要条件，从而说明了不是所有的 CDV－结构都是典范的。

我们将在本文中用另一种构造性方法给出任意半单的 CDV－结构中这个形式同构的每一项展开的系数矩阵的表达式。

1 定义与结论

设 M 为 m 维复解析流形，用 T_M 来记 M 的全纯向量丛所对应的局部自由 O_M－模，现令 $T_M^{(1,0)}=C_M^\infty\otimes_{O_M}T_M$，记 $\pi:\mathbb{C}\times M\to M$ 为第二个分量的投影映射。

定义 1[3-4] 设 M 为 m 维复流形，M 上的 Frobenius 流形结构是指这样多元组 $(M,g,\circ,e,\varepsilon)$，其中 g 是 M 上的度量（非退化、双线性和对称的（2，0）－张量），$\circ$ 是全纯切丛 T_M 上的交换结合乘法且光滑的依赖于底流形 M。记 ∇ 为 g 的 Levi-Civita 联络，记 Θ_M 为切丛 T_M 局部自由 O_M－模层。所有这些元素需要满足下面条件：

（i）g 的 Levi-Civita 联络 ∇ 是平坦的；

（ii）$g(X\circ Y,Z)=g(X,Y\circ Z)$，$\forall X,Y,Z\in T_M$；

（iii）Θ_M 的整体截面 e 是乘法$\circ$的单位向量场，且 e 关于联络 ∇ 是平坦的；

（iv）令 $c(X,Y,Z):=g(X\circ Y,Z)$，则 c 对称 3－张量，则我们要求它诱导的 4－张量 $(\nabla_z c)(U,V,W)$ 关于四个向量场 U,V,W,Z 都是对称的；

（v）Θ_M 的整体截面 ε 满足以下条件：

$$\nabla(\nabla\varepsilon)=0;$$

$$\mathcal{L}_\varepsilon(\circ)=\circ;$$

$$\exists d\in\mathbb{C},\mathcal{L}_\varepsilon(g)=(2-d).g$$

在上面的定义中令 $\Phi(X)Y:=-X\circ Y$，则

$$\tilde{\nabla}:=\pi^*\nabla+\frac{\pi^*\Phi}{z}-\left(\frac{\Phi(\varepsilon)}{z}+\nabla\varepsilon\right)\frac{\mathrm{d}z}{z}\quad(1)$$

给出了拉回丛 π^*T_M 上的亚纯平坦联络，该联络就称为 Frobenius 流形的结构联络。

下面介绍变动 Hodge 结构（variation of Hodge structures）的推广结构，也即 CV－结构。

定义 2[3] 设 M 是一复解析流形，设 K 是 M 上复光滑向量丛，h 是 K 上 Hermitian 度量，记 $D=D'+D''$ 为 h 的 Chern 联络，多元组（$K\to M,D,\Phi,h,\kappa,\mathcal{U},\mathcal{Q}$）称为 M 上的一个 CV－结构，如果（$K\to M,D,\Phi,h,$）是一个调和 Higgs 丛，且剩余其他元素满足：

（a）κ 给出向量丛 $K\to M$ 一个实结构，且满足

$$\kappa^2=Id;$$

$$D(\kappa)=0;$$

$$\Phi^{+} = \kappa\Phi\kappa$$

其中 Φ^{+} 是 Φ 关于 h 的共轭算子；

（b）h 是向量丛 $K\to M$ 的 Hermitian 度量，且满足

h 在 κ 定义的实子丛 $K_{\mathbb{R}}:=\ker(\kappa-\mathrm{Id})\subset K$ 上取实值；

（c）光滑算子 $\mathscr{U}$ 和 $\mathscr{Q}$ 是向量丛 K 的 C_M^{∞} －线性算子，且满足

$$[\Phi,\mathscr{U}]=0$$
$$D'(\mathscr{U})-[\Phi,\mathscr{Q}]+\Phi=0$$
$$D''(\mathscr{U})=0$$
$$D'(\mathscr{Q})=[\Phi,\kappa\mathscr{U}\kappa]=0$$
$$\kappa\mathscr{Q}\kappa+\mathscr{Q}=0$$
$$h(\mathscr{U}a,b)=h(a,\kappa\mathscr{U}\kappa b)$$
$$h(\mathscr{Q}a,b)=h(a,\mathscr{Q}b)$$

定义 3[3]　设 M 是一复解析流形，M 上的 CDV －结构是其上的 CV －结构（$T_M^{(1,0)}\to M,D,\Phi,\kappa,h,g,\mathscr{U},\mathscr{Q}$）和一个 Frobenius 流形结构（$M,\circ,e,\varepsilon,g$）使得 $\Phi_X Y=-X\circ Y,\varepsilon=\mathscr{U}(e),D''=\bar{\partial},g=h(\cdot,\kappa\cdot)$，而且

$$\mathscr{Q}=D_{\varepsilon}-\mathscr{L}_{\varepsilon}-\frac{2-d}{2}$$

这里 $d\in\mathbb{R}$ 是由关系式 $\mathscr{L}_{\varepsilon}(g)=(2-d)\cdot g$ 给出。且满足下面六个等价关系式成立

$$D_e-\mathscr{L}_e=0\Leftrightarrow D_{\bar{e}}e=0\Leftrightarrow$$
$$\mathscr{L}_e(h)=0\Leftrightarrow\mathscr{L}_{\bar{e}}(h)=0\Leftrightarrow$$
$$\mathscr{L}_e(\kappa)=0\Leftrightarrow\mathscr{L}_{\bar{e}}(\kappa)=0$$

命题 1[3]　设 M 是一复解析流形，M 上 CDV －结构是的 M 上的 Frobenius 流形（$M,\circ,e,\varepsilon,g$）带上 $T_M^{(1,0)}$ 的一个实结构 κ 满足以下四个条件：

（a）延拓伪黎曼度量 g 到 $T_M^{(1,0)}$ 上，仍记为 g，则 $h:=g(\cdot,\kappa\cdot)$ 给出了 $T_M^{(1,0)}$ 上的一个伪 Hermitian 度量，且满足

$$\mathscr{L}_e(h)=0$$
$$\mathscr{L}_{(\varepsilon-\bar{\varepsilon})}(h)=0$$

（b）$T_M^{(1,0)}$ 上关于 h 的 Chern 联络 D 满足 $D(\kappa)=0$

（c）关系式 g 所包含的常数 d 是实数。

（d）令 $\mathscr{Q}:=D_{\varepsilon}-\mathscr{L}_{\varepsilon}-\frac{2-d}{2}\mathrm{Id}$，$\mathscr{Q}$ 是复线性丛 $T_M^{(1,0)}$ 上的实解析映射，再令

$$\tilde{D}:=\pi^{*}D+\frac{1}{Z}\Phi+z\kappa\Phi\kappa+\left(\frac{1}{Z}\mathscr{U}-\mathscr{Q}-z\kappa\mathscr{U}\kappa\right)\frac{\mathrm{d}z}{z}\tag{2}$$

则 $\tilde{D}$ 是 $\pi^{*}T_M^{(1,0)}|_{\mathbb{C}^{*}\times M}$ 上的平坦联络，其中 $\pi:\mathbb{C}\times M\to M$ 为投射映射。

从上面的几个定义和命题中可以看出，给定上的一个 CDV －结构，拉回 $\pi^{*}T_M^{(1,0)}|_{\mathbb{C}^{*}\times M}$ 丛有两个平坦联络：一个是由式试给出的 Frobenius 流形的结构联络 $\tilde{\nabla}$，它是全纯丛 $H_1:=T_M$ 上的平坦亚纯联络，且奇点只在 $\{0\}\times M$ 在上，向量丛 $\pi^{*}T_M^{(1,0)}$ 的全纯结构 $\pi^{*}T_M$ 所对应的平坦（0，1）－联络记为 $\bar{\partial}$；另一个是由式给出的平坦联络 $\tilde{D}$，我们称之为 CV －结构的结构联络，它的（0，1）部分在 $\mathbb{C}\times M$ 上没有奇点，因此给出 $\pi*T_M^{(1,0)}$ 上的另一个全纯结构记为 H_2，该联络的（1，0）部分，仍记为 $\tilde{D}$，给出了 H_2 上的一个平坦亚纯联络，奇点也只在 $\{0,\infty\}\times M$ 上。不难发现联络 $\tilde{\nabla}$ 在 $\{0\}\times M$ 的奇性的 Poincare 秩等于 2（可能非正则）；而在 $\{\infty\}\times M$ 上，却是 logarithmic 的，即它在无穷远点的奇性是正则的。再考察联络 $\tilde{D}$，我们发现 $\tilde{D}$ 在 $\{0,\infty\}\times M$ 上的 Poincare 秩都是等于 2（可能非正则）。若我们假定上面讨论的 Frobenius 流形结构是半单的，则联络 $\tilde{D}$ 和 $\tilde{\nabla}$ 在 $\{0,\infty\}\times M$ 上的奇性一定是非正则的。这两个亚纯联络所决定的 D －模不再有 logarithmic 格[5]。因此考察这两个联络是否同构就变得复杂。首先我们必须考察他们是否存在关于 z 方向的形式同构（formal isomorphism）。由于全纯丛所决定的截面层是局部自由 $O_{\mathbb{C}\times M}$ －模，现在考虑 $O_{\mathbb{C}\times M}$ 关于 $\{0\}\times M$ 的形式完备层 $\hat{O}_{\mathbb{C}\times M}$，对任意的开集 $U\subset M$，令

$$\Gamma(U,\hat{O}_{\mathbb{C}\times M}):=O_M(U)[[z]]\tag{3}$$

即任意 $f\in\Gamma(U,\hat{O}_{\mathbb{C}\times M})$，则 $f=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x)z^n$，其中 $a_n(x)\in\Gamma(U,O_m)$，对任意的 n。

令 $\hat{H}_1:=\hat{O}_{\mathbb{C}\times M}\otimes\mathcal{H}_1,\hat{H}_2:=\hat{O}_{\mathbb{C}\times M}\otimes\mathcal{H}_2$，分别延拓两个联络 $\tilde{\nabla}$ 和 $\tilde{D}$ 到这两个形式丛上，得到的形式联络，分别记为 $\hat{\nabla}$ 和 $\hat{D}$。因此 $\mathbb{C}\times M$ 在上，我们得到两个不同的带有平坦形式联络的形式丛（$\hat{H}_1,\hat{\nabla}$）和（$\hat{H}_2,\hat{D}$），除非特别指明，否则，文中提到的由 CDV －结构所决定的两个形式丛和形式同构就是指这样延拓得到的形式丛（$\hat{H}_1,\hat{\nabla}$）和（$\hat{H}_2,\hat{D}$）。

定理 1[9]　设复解析流形 M 的一个半单 CDV $\oplus$ －结构，记由该结构的的两个结构丛和结构联络（$\hat{H}_1,\hat{\nabla}$）和（$\hat{H}_2,\hat{D}$）一定是形式同构的，即存在形式同构 $\hat{\phi}$，使得

$$\hat{\phi}:(\hat{H}_1,\hat{\nabla})\tilde{\to}(\hat{H}_2,\hat{D})$$

且当底流形 M 是单连通的，则该形式同构能提升为全纯同构当且仅当它在底流形 M 上的任意一点 o 上的限制 $\hat{\phi}^{\circ}$ 是全纯同构。

在文［9］中，作者注意两个形式同构的在奇点的 Poincare 秩都是2，因此利用了这类亚纯联络的分类证明了在整个 M 上存在形式同构，从而证明了定理1。

本文将直接构造出这个形式同构，从而给出了定理1的另一个证明——同构存在的构造性证明。我们通过确定形式同构 $\hat{\phi}$ 关于 z 展开成幂级数之后的所有系数来给构造出该同构。由于这两个亚纯联络的奇点的 Poincare 秩都是2，根据这类联络的刚性，我们只需要构造出限制到流形 M 的某一点 o 上的同构即可（文［9］引理2.10）。

2 定理的证明

由文［9］引理2.10，只需证明形式同构在流形 M 上的某一点 o 上存在即可。我们用待定系数法来证明。

令 $(\hat{H}^1,\hat{\nabla}^0):=(\hat{H}_1,\hat{\nabla})\big|_o$，$(\hat{H}^2,\hat{\nabla}^0):=(\hat{H}_1,\hat{D})\big|_o$，取局部框架 $s_i:=(\pi^* e_i)\big|_0$，其中 $e_i:=\partial_{u^i}$，且 u^i 为底流形 M 的典范局部坐标系；z 为复平面 $\mathbb{C}$ 的坐标。则 $\{s_i\}_{i=1}^m$ 为 $\hat{H}^{\circ}{}_1$ 和 $\hat{H}^{\circ}{}_2$ 的局部框架，且在这个框架下两个平坦联络的局部表示为

$$\widetilde{\nabla}:=\pi^*\nabla+\frac{\Phi}{z}-\left(\frac{\Phi(\varepsilon)}{z}+\nabla\varepsilon\right)\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

$$\widetilde{D}:=\pi^*D+\frac{1}{Z}\Phi+z\kappa\Phi k+\left(\frac{1}{Z}\mathscr{U}-\mathscr{Q}-z\kappa\mathscr{U}\kappa\right)\frac{\mathrm{d}z}{z}$$

则 $\hat{H}^{\circ}{}_1$ 和 $\hat{H}^{\circ}{}_2$ 存在形式同构当且仅当存在形式矩阵 $\hat{\phi}=(\hat{\phi}_{ij}(z))$（每一个元素都是关于 z 的形式幂级数），使得

$$\frac{1}{z^2}(U\hat{\phi}-\hat{\phi}U)+\frac{1}{z}\hat{\phi}Q+\frac{1}{z}V\hat{\phi}=\partial_z\hat{\phi}-\hat{\phi}U^+ \tag{4}$$

这里 U,V,Q 和 U^+ 分别记为映射 $\mathscr{U}$,V,$\mathscr{Q}$ 和 $\mathscr{U}^+$ 在框架 s_i 下所对应的矩阵，易证矩阵 $U=\mathrm{diag}(u_1,u_2\cdots,u_m)$，且对角线元素各不相同；而 V,Q 是对角线为零的矩阵。

令

$$\hat{\phi}(z):=\sum\nolimits_{n=0}^{\infty}B_n z^n \tag{5}$$

这里每个 B_n 是 m 阶矩阵。把（5）式代入（4）式直接计算得到

$$\begin{cases}B_0=\mathrm{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_m);\\ adU(B_1)=VB_0-B_0Q;\\ adU(B_{n+2})=(VB_{n+1}-B_{n+1}Q)+\\ (n+1)B_{n+1}-B_nU^+,\forall_n\geqslant 0\end{cases} \tag{6}$$

这里每一个 c_i 都是非零常数，$adU:gl_m(\mathbb{C})\to gl_m(\mathbb{C})$；$adU(B_i):=UB_i-B_iU$，$gl_m(\mathbb{C})$ 为所有复常值矩阵所成的线性空间。不妨假设 $B_0=E_m$ 为 m 阶单位阵。由于矩阵 U 的为对角矩阵且对角线元素各不相同，因此有直和分解 $gl_m(\mathbb{C})=\ker(adU)\oplus\mathrm{Im}(adU)$，这里记号 $\ker(adU)$ 是映射 adU 的核，$\mathrm{Im}(adU)$ 是映射 $adU:gl_m(\mathbb{C})\to gl_m(\mathbb{C})$ 的像。所以对任意 n，得到分解式

$$B_n:=D[B_n]+A[B_n] \tag{7}$$

其中对角矩阵 $D(B_n)$ 为矩阵 B_n 的对角线元素所组成的矩阵，而 $A(B_n)$ 为矩阵 B_n 对角线为零的矩阵。

$$adU:\mathrm{Im}(adU)\tilde{\to}\mathrm{Im}(adU) \tag{8}$$

我们对 n 进行递归来求出所有的矩阵 B_k：

（i）当 $k=0$，$B_0=\mathrm{diag}(c_1,c_2,\cdots,c_m)=E_m$；

（ii）当 $k=1$，因为 $adU(B_1)=VB_O-B_0Q=V-Q$，注意到 $V-Q\in\mathrm{Im}(adU)$，所以存在唯一的对角线为零的矩阵，记为 $A[B_1]\in\mathrm{Im}(adU)$，使得 $adU(A[B_1])=V-Q$。接下来确定矩阵 B_1 的对角矩阵 $D(B_1)$。为了使得(6)式当成立 $n=0$，必须有 $VB_1-B_1Q+B_1-U^+\in\mathrm{Im}(adU)$。把（7）式代入得

$$V\cdot(D[B_1]+A[B_1])-(D[B_1]+A[B_1])\cdot Q+((D[B_1]+A[B_1]))-U^+\in\mathrm{Im}(adU)$$

即 $V\cdot A[B_1]-A[B_1]\cdot Q+D[B_1]-U^+\in\mathrm{Im}(adU)$，因此

$$D[B_1]=D[U^+-V\cdot A[B_1]+A[B_1]\cdot Q]$$

（iii）假设当 $k\leq n+1$ 已经构造出 $B_k=D[B_k]+A[B_k]$，且

$$D[B_{n+1}]=\frac{1}{n+1}D[B_nU^+-V\cdot A[B_{n+1}]+A[B_{n+1}]\cdot Q] \tag{9}$$

待证当 $k=n+2$ 时，仍然存在唯一的 B_{n+2} 满足式。

先确定 B_{n+2} 的对角线为零的部分矩阵 $A[B_{n+2}]$。类似的，由（9）式，我们得到

$$VB_{n+1}-B_{n+1}Q+(n+1)B_{n+1}-B_nU^+\in\mathrm{Im}(adU)$$

因此 $\frac{1}{n+1}D[B_nU^+-V\cdot A[B_{n+1}]+A[B_{n+1}]\cdot Q]$ 唯一的确定矩阵 $A[B_{n+2}]$ 使得

$$ad(A[B_{n+2}])=\frac{1}{n+1}D[B_nU^+-V\cdot A[B_{n+1}]+A[B_{n+1}]\cdot Q] \tag{10}$$

接下来确定 $D[B_{n+2}]$。

为了使得（6）式的等号右边 $VB_{n+2} - B_{n+2}Q + (n+2)B_{n+2} - B_{n+1}U^{+} \in \mathrm{Im}(adU)$，则必须有

$$D[B_{n+2}] = \frac{1}{n+2} \cdot D[B_{n+1}U^{+} - V \cdot A[B_{n+2}] + A[B_{n+2}] \cdot Q] \tag{11}$$

故（10）－（11）式确定了 $B_{n+2} = D[B_{n+2}] + A[B_{n+2}]$，且 B_{n+2} 的对角线元素的取值是使得 $VB_{n+2} - B_{n+2}Q + (n+2)B_{n+2} - B_{n+1}U^{+} \in \mathrm{Im}(adU)$ 成立。

由归纳假设，我们证明了，存在着 $B_0, B_1, B_2, \cdots, B_n, B_{n+1}$，…满足（6）式，即满足（4）式的形式同构 $\hat{\phi}(z)$ 确实存在。

如果给定的 CDV－结构还满足条件 $D^{(1,0)} = \nabla$，则这个形式同构 $\hat{\phi}(z)$ 一定是全纯的，而且 $\hat{\phi}(z)$ 在框架 e_i 下多对应的矩阵可以表示为 $\hat{\phi}(z) = \mathrm{diag}(\exp(z\,\bar{u}_1), \exp(z\,\bar{u}_2), \cdots, \exp(z\,\bar{u}_m))$

参考文献：

[1] CECOTTI S, VAFA C. Topological—anti-topological fusion [J]. Nuclear Physics B, 1991, 367(2): 359－461.

[2] CECOTTI S, VAFA C. On classification of $N=2$ supersymmetric theories [J]. Comm Math Phys, 1993, 158(3): 569－644.

[3] HERTLING C. Frobenius manifolds, their connections, and the construction for singularities [J]. J Reine Angew Math, 2003, 555: 77－161.

[4] SABBAH C. Universal unfolding of Laurent polynomials and tt * structures [J]//in From Hodge Theory to Integrability and TQFT: tt * －Geometry, Proc Symposia in Pure Math, Vol 78, American Math Society, Providence RI, 2008: 1－29.

[5] SABBAH C. D′eformations isomonodromiques et vari′et′es de Frobenius [M]. EDP Sciences, 2002.

[6] TAKAHASHI A. tt *- geometry of rank two [J]. Int Math Res Not, 2004, 22: 1099－1114.

[7] MANIN YURI I. Three constructions of Frobenius manifolds: a comparative study [J]. Asian J Math, 1999, 3: 179－220.

[8] LIN J Z. Some constraints on Frobenius manifolds with a tt *-structures [J]. Math Z, 2011, 267: 81－108.

[9] LIN J Z, SABBAH C. Flat meromorphic connections of Frobenius manifolds with tt *-structure [J]. Journal of Geometry and Physics, 2012, 62: 37－46.

(上接第 4 页)

[10] JIANG D H, XU G B, DONGYE C L. Variational image zooming based on nonlocal total variation [J]. Journal of Computer Applications, 2012, 32(3): 725－728.

[11] YOU Y L, XU W Y, TANNENBAUM A, et al. Behavioral analysis of anisotropic diffusion in image processing [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1996, 5(11): 1539－1553.

[12] SONG J P, GAO R, ZHU F, et al. mage zooming algorithm based on partial differential equations technique [J]. Journal of image and Graphics, 2009, 1(14): 82－87.

[13] BERTALMIO M, BERTOZZI A L, SAPIRO G. Navier-Stokes, fluid dynamics and image and video inpainting [J]. IEEE Compute Vision and Pattern Recognition, 2001, 1: 355－362.

[14] BERTALMIO M, SAPIRO G, CASELLES V, et al. Image inpainting [C] // Computer Graphics Proceedings, 2000.

[15] OSHER S, SETHIAN J. Fronts propagating with curvature dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations [J]. Comp Phys, 1988, 79: 12－49.

[16] YOU Y L, KAVEH M. Fourth-order partial differential equation for noise removal [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2000, 9(10): 1723－1730.

[17] CARMONA R A, ZHONG S. Adaptive smoothing respecting feature directions [J]. IEEE Transactions on Image Processing, 1998, 7(3): 353－358.