

# 马氏转移高敏感均值回复随机微分过程的 欧拉数值解及实证分析应用\*

邹立, 尹居良

(暨南大学统计学系, 广东 广州 510632)

**摘要:** 高敏感均值回复随机微分方程是一类用途广泛的金融数学模型。将马氏转移机制加入到该模型, 研究带马氏转移高敏感均值回复随机微分方程的欧拉数值解及有关金融应用问题。首先证明该方程存在唯一的全局正解, 其次证明方程的欧拉数值解依概率收敛于方程的真实解。最后应用马氏转移高敏感均值回复随机微分方程模型研究我国2007年1月到2014年2月7天上海同业拆借利率, 利用极大似然法估计模型参数, 假设检验结果表明: 相比于高敏感均值回复随机微分方程模型, 该马氏转移模型拟合效果更佳。

**关键词:** 马氏转移; 高敏感均值回复过程; 欧拉数值解; 极大似然估计

中图分类号: O211.63 文献标志码: A 文章编号: 0529-6579(2015)03-0060-09

## Euler-Maruyama Numerical Solutions of Highly Sensitive Mean-Reverting Stochastic Differential Equations with Markovian Switching and Applications in Finance

ZOU Li, YIN Juliang

(School of Statistics, Jinan University, Guangzhou 510632, China)

**Abstract:** A highly sensitive mean-reverting stochastic differential equation is a kind of widely used financial model. A Markovian switching mechanism is added into this model, and resulting in general financial model (RS CKLS for short). The purpose is to study the Euler numerical solution of RS CKLS and apply RS CKLS to study financial issues. Firstly, it is proved that there exists a unique positive global solution for a RS CKLS under appropriate conditions. Then it is shown that the Euler numerical solution of a RS CKLS converges to its real solution in the sense of probability. Finally a RS CKLS is applied to conduct empirical analysis of 7-day Shanghai interbank offered rates. Maximum likelihood method is used to estimate model parameters, and hypothesis test results show that the RS CKLS has a better performance in fitting 7-day Shanghai interbank offered rates compared with a CKLS.

**Key words:** Markovian switching; highly sensitive and mean-reverting stochastic process; Euler numerical solution; maximum likelihood estimation

在金融市场研究中, 短期利率是最基本、最重要的经济动态变量, 常用随机微分方程刻画其动态行为, 比如均值回复随机微分方程 (CKLS), 表示为

$$dX(t) = \lambda(\mu - X(t))dt + \sigma X(t)^\gamma dw(t) \quad (1)$$

其中  $\lambda, \mu, \sigma, \gamma$  为正数。方程 (1) 包括许多著名的模型, 比如几何布朗运动模型、Cox 模型、CIR 模型等, 具体参考文献 [1-6]。

\* 收稿日期: 2014-11-23

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (61174212)

作者简介: 邹立 (1988 生), 男; 研究方向: 随机微分方程; E-mail: zoulilizhixx@126.com

Chan 等<sup>[7]</sup>和 Noman<sup>[8]</sup>分别采用广义矩估计方法和高斯估计方法基于模型 (1) 对美国国债债券数据进行  $\chi^2$  拟合优度检验, 结果都表明拒绝  $\gamma \leq 1$  而接受  $\gamma > 1$  的短期利率模型是合理的。此外, Buffington-Elliott<sup>[9]</sup>和 Yin-Zhou<sup>[10]</sup>研究结果表明方程 (1) 的平均回复速度  $\lambda$  和波动水平  $\sigma$  并不是常数, 而是一个马氏转移过程。基于以上原因, 本文研究具有马氏转移机制的高敏感均值回复随机微分方程 (简记为 RS CKLS), 表示如下

$$dX(t) = \lambda(r(t))(\mu(r(t)) - X(t))dt + \sigma(r(t))X(t)^\gamma dw(t) \quad (2)$$

以上  $r(t)$  是一个右连续有限状态的马氏链过程。

如果  $\gamma > 1$ , 方程 (1) 的扩散系数不满足线性增长条件。对此, 吴付科<sup>[11]</sup>运用李雅普诺夫函数方法证明了方程 (1) 全局正解的存在唯一性。方程 (2) 是方程 (1) 的推广, 并将用于刻画短期动态利率, 本文首先证明方程 (2) 存在唯一的全局正解。其次, 由于方程 (2) 在  $\gamma > 1$  条件下通常没有解析解, 本文也将研究该方程的数值解以及性质。

在模型 (1) 和 (2) 中, 瞬时利率的动态变化决定了整个利率期限结构模型的数学形式, 但实际的金融市场上不存在瞬时利率, 因而无法得到其观察值, 一般以短期利率来近似瞬时利率。金融市场上短期利率的品种很多, 基于文献 [12] - [17] 的研究结果, 本文选择我国 7 天上海同业拆借利率近似瞬时利率, 并用极大似然方法估计上述模型的参数。

### 1 解的存在性和唯一性

设  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_{t \geq 0}, P)$  为一带流完备概率空间,  $\sigma$  代数流  $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$  满足通常条件。  $w(t) = (w_1^t, w_2^t, \dots, w_d^t)$  是定义在该空间上  $d$  维布朗运动;  $r(t)$  为状态有限的右连续马氏链, 其有限状态记为  $S = \{1, 2, \dots, N\}$ , 生成元  $\Gamma = (\kappa_{ij})_{N \times N}$  由下式给出:

$$P(r(t + \Delta) = j | r(t) = i) = \begin{cases} \kappa_{ij}\Delta + o(\Delta), i \neq j, \\ 1 + \kappa_{ii}\Delta + o(\Delta), i = j \end{cases} \quad (3)$$

$$\kappa_{ii} = - \sum_{i \neq j} \kappa_{ij} \quad (4)$$

本文假定  $w(t)$  和  $r(t)$  是两个相互独立的过程。

注意到如果  $\gamma > 1$ , 方程 (2) 的扩散系数不满足线性增长条件, 但满足局部李普希茨条件。此外, 方程 (2) 将用于刻画短期动态利率, 需保证方程的解取正值。为此, 论文将运用李雅普诺夫函

数方法证明方程 (2) 存在唯一的全局正解。

**定理 1** 假设  $X(0) > 0, \gamma > 1, r(0) = i_0 \in S$  给定, 如果  $\lambda(\cdot), \mu(\cdot), \sigma(\cdot)$  为正数, 则方程 (2) 存在唯一的全局正解。

**证明** 显然方程 (2) 的系数都满足局部李普希茨条件。对于任意给定的  $X(0) > 0$ , 方程 (2) 存在唯一局部解  $X(t)$ , 即对于  $t \in [0, \tau_e)$ ,  $X(t)$  满足方程 (2),  $\tau_e$  为爆炸时间。为了证明  $X(t)$  是方程 (2) 的全局解, 只要证明  $\tau_e = \infty$  几乎处处成立。下面定义停时列

$$\tau_k = \inf\left\{t \in [0, \tau_e) : X(t) \notin \left[\frac{1}{k}, k\right]\right\}$$

$k > 0$  且满足  $\frac{1}{k} < X(0) < k$ 。显然  $\tau_k$  是关于  $k$  的单调增函数, 令  $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$ , 则有  $\tau_\infty \leq \tau_e$  几乎处处成立。下证  $P(\tau_\infty = \infty) = 1$ , 为此只需证明对任意  $T > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} P(\tau_k \leq T) = 0$ 。定义函数  $V: (0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

$$V(x) = x^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2} \ln x$$

显然有  $V(X) \geq 0$ , 当  $X \rightarrow \infty$  或  $X \rightarrow 0$  时, 有  $V(X) \rightarrow \infty$ 。由伊藤公式, 可得

$$dV(X) = \left\{ \frac{\lambda(r(t))}{2} (X^{-\frac{1}{2}}(t) - X^{-1}(t)) (\mu(r(t)) - X(t)) + \frac{\sigma^2(r(t))}{4} \left(1 - \frac{X^{\frac{1}{2}}(t)}{2}\right) X^{2(\gamma-1)}(t) \right\} dt + \frac{\sigma(r(t))}{2} (X^{\gamma-\frac{1}{2}}(t) - X^{\gamma-1}(t)) dw(t)$$

对于任意  $t \in [0, T]$ , 有

$$EV(X(t \wedge \tau_k)) = V(X(0)) + E \int_0^{t \wedge \tau_k} \frac{\lambda(r(s))}{2} (X^{-\frac{1}{2}}(s) - X^{-1}(s)) (\mu(r(s)) - X(s)) ds + E \int_0^{t \wedge \tau_k} \frac{\sigma^2(r(s))}{4} \left(1 - \frac{X^{\frac{1}{2}}(s)}{2}\right) X^{2(\gamma-1)}(s) ds$$

令  $\bar{\lambda} = \max_{i \in S} \lambda(i), \bar{\mu} = \max_{i \in S} \mu(i), \bar{\sigma} = \max_{i \in S} \sigma(i)$ 。

$$\text{由 } X^{-\frac{1}{2}} - X^{-1} \leq \begin{cases} 0, & 0 < x \leq 1; \\ 1, & x > 1 \end{cases} \text{ 和 } 1 - \frac{X^{\frac{1}{2}}}{2} \leq$$

$\begin{cases} 1, & 0 < x \leq 4; \\ 0, & x \geq 4 \end{cases}$  则有

$$EV(X(t \wedge \tau_k)) \leq V(X(0)) + \frac{\bar{\lambda}T}{2} + \frac{\bar{\lambda}\bar{\mu}T}{2} + \bar{\sigma}^2 4^{2\gamma-3} T$$

由期望公式, 可知

$$EV(X(T \wedge \tau_k)) \geq P(\tau_k \leq T)(V(\frac{1}{k}) \wedge V(k)) \quad (5)$$

从而可得

$$P(\tau_k \leq T) \leq \frac{V(X(0)) + \frac{\bar{\lambda}T}{2} + \frac{\bar{\lambda}\mu T}{2} + \bar{\sigma}^2 4^{2\gamma-3} T}{(V(\frac{1}{k}) \wedge V(k))} \quad (6)$$

当  $k \rightarrow \infty$  时, 有  $V(\frac{1}{k}) \wedge V(k) \rightarrow \infty$ . 由此可知

$$\lim_{k \rightarrow \infty} P(\tau_k \leq T) = 0 \text{ 得证.}$$

## 2 欧拉数值解

由于方程 (2) 在  $\gamma > 1$  条件下没有解析解, 本文通过欧拉离散方法构造方程 (2) 的数值解, 并证明方程数值解依概率收敛于真实解.

$$\text{令 } \Delta \in (0, 1), t_k = k\Delta, r_k^\Delta = r(k\Delta), x_0 = X(0), \\ \Delta w_k = w(t_{k+1}) - w(t_k), k = 0, 1, 2, \dots, \left[ \frac{T}{\Delta} \right],$$

$$x_{k+1} = x_k + \lambda(r_k^\Delta)(u(r_k^\Delta) - x_k)\Delta + \sigma(r_k^\Delta) |x_k|^\gamma \Delta w_k \quad (7)$$

为方便起见, 以下给出 (7) 的连续时间欧拉数值解, 表示为

$$x(t) = x_0 + \int_0^t \lambda(\bar{r}(s)) (\mu(\bar{r}(s)) - \bar{x}(s)) ds + \\ \int_0^t \sigma(\bar{r}(s)) |\bar{x}(s)|^\gamma dw(s) \quad (8)$$

其中阶梯函数

$$\bar{x}(t) = \sum_0^{\lfloor \frac{t}{\Delta} \rfloor} x_k \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t) \quad (9) \\ \bar{r}(t) = \sum_0^{\lfloor \frac{t}{\Delta} \rfloor} r_k^\Delta \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1})}(t)$$

显然有  $\bar{x}(t) = x_k, \bar{r}(t) = r_k^\Delta, t \in [t_k, t_{k+1}), k = 0, 1, 2, \dots, \left[ \frac{T}{\Delta} \right]$ . 接下来证明当  $\Delta \rightarrow 0$  时, 方程 (2) 的欧拉数值解和连续欧拉数值解都依概率收敛于方程的真实解.

**定理 2** 设  $X(t)$  是方程 (2) 的解,  $x(t)$  是方程 (8) 的解, 则对于任意  $\delta, \varepsilon > 0$ , 有

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - x(t)|^2 \geq \delta\right) < \varepsilon \quad (10)$$

**证明** 定理证明分为四步. 第一步: 定义停时列  $\tau_k$ , 由 (6) 式知,

$$P(\tau_k \leq T) \leq \frac{V(X(0)) + \frac{\bar{\lambda}T}{2} + \frac{\bar{\lambda}\mu T}{2} + \bar{\sigma}^2 4^{2\gamma-3} T}{(V(\frac{1}{k}) \wedge V(k))}$$

第二步: 定义停时列  $\rho_k = \inf\{t \in [0, T]: x(t) \notin [\frac{1}{k}, k]\}$ . 由伊藤公式, 可得

$$EV(x(t \wedge \rho_k)) = V(x_0) + E \int_0^{t \wedge \rho_k} \frac{\lambda(\bar{r}(s))}{2} \cdot \\ (x^{-\frac{1}{2}}(s) - x^{-1}(s)) (\mu(\bar{r}(s)) - \bar{x}(s)) ds + \\ E \int_0^{t \wedge \rho_k} \frac{\sigma^2(\bar{r}(s))}{4} (x^{-2} - \frac{x^{-\frac{3}{2}}(s)}{2}) \bar{x}^{2\gamma}(s) ds \leq \\ V(x_0) + \frac{\bar{\lambda}\mu T}{2} E \int_0^{t \wedge \rho_k} (x^{-\frac{1}{2}}(s) - x^{-1}(s)) ds + \\ \frac{\bar{\lambda}}{2} E \int_0^{t \wedge \rho_k} (1 - x^{\frac{1}{2}}(s)) ds + \\ \frac{\bar{\lambda}}{2} E \int_0^{t \wedge \rho_k} (x^{-\frac{1}{2}}(s) - x^{-1}(s)) (x(s) - \bar{x}(s)) ds + \\ \frac{\bar{\sigma}^2}{4} E \int_0^{t \wedge \rho_k} (1 - x^{\frac{1}{2}}(s)) x^{2(\gamma-1)}(s) ds + \\ \frac{\bar{\sigma}^2}{4} E \int_0^{t \wedge \rho_k} (x^{-2}(s) - x^{-\frac{3}{2}}(s)) (x^{2\gamma}(s) - \bar{x}^{2\gamma}(s)) ds \quad (11)$$

当  $x(t) \in [\frac{1}{k}, k]$  时, 显然有  $\bar{x}(t) \in [\frac{1}{k}, k]$ . 由此可得

$$EV(x(t \wedge \rho_k)) \leq V(x_0) + \frac{\bar{\lambda}\mu T}{2} + \frac{\bar{\lambda}T}{2} + \bar{\sigma}^2 4^{2\gamma-3} T + \\ \frac{\bar{\lambda}}{2} (k + k^{\frac{1}{2}}) E \int_0^{t \wedge \rho_k} |x(s) - \bar{x}(s)| ds + \\ \frac{\bar{\sigma}^2}{4} (k^2 + k^{\frac{3}{2}}) E \int_0^{t \wedge \rho_k} |x^{2\gamma}(s) - \bar{x}^{2\gamma}(s)| ds$$

注意到  $\gamma > 1$ , 由局部的李普希茨条件, 可知  $|x^{2\gamma}(s) - \bar{x}^{2\gamma}(s)| \leq c_1(k) |x(s) - \bar{x}(s)|^2 \leq c_2(k) |x(s) - \bar{x}(s)|$

进而

$$EV(x(t \wedge \rho_k)) \leq V(x_0) + \frac{\bar{\lambda}\mu T}{2} + \frac{\bar{\lambda}T}{2} + \\ \bar{\sigma}^2 4^{2\gamma-3} T + c_3(k) E \int_0^{t \wedge \rho_k} |x(s) - \bar{x}(s)| ds \quad (12)$$

对于任意  $s \in [0, t \wedge \rho_k]$ , 有

$$x(s) - \bar{x}(s) = x(s) - x_{[\frac{s}{\Delta}]} = \\ \lambda([\frac{s}{\Delta}]\Delta) (\mu([\frac{s}{\Delta}]\Delta) - x_{[\frac{s}{\Delta}]}) \cdot$$

$$(s - [\frac{s}{\Delta}]\Delta) + \sigma([\frac{s}{\Delta}]\Delta) |x_{[\frac{s}{\Delta}]}|^\gamma (w(s) - w([\frac{s}{\Delta}]\Delta)) \leq \bar{\lambda}(\bar{\mu} + k)\Delta + \bar{\sigma}k^\gamma \left| w(s) - w([\frac{s}{\Delta}]\Delta) \right|$$

由于  $\Delta \in (0, 1)$ , 可知

$$E \int_0^{t \wedge \rho_k} |x(s) - \bar{x}(s)| ds \leq \bar{\lambda}(\bar{\mu} + k)\Delta T + \bar{\sigma}k^\gamma E \int_0^{t \wedge \rho_k} \left| w(s) - w([\frac{s}{\Delta}]\Delta) \right| ds \leq \bar{\lambda}(\bar{\mu} + k)\Delta T + \bar{\sigma}k^\gamma T \Delta^{\frac{1}{2}} \leq (\bar{\lambda}(\bar{\mu} + k) + \bar{\sigma}k^\gamma) T \Delta^{\frac{1}{2}} \quad (13)$$

由 (12) 式和 (13) 式可知

$$EV(x(t \wedge \rho_k)) \leq V(x_0) + \frac{\bar{\lambda}\bar{\mu}T}{2} + \frac{\bar{\lambda}T}{2} + \bar{\sigma}^2 4^{2\gamma-3} T + c_4(k)\Delta^{\frac{1}{2}}$$

类似 (5) 式知,

$$\frac{P(\rho_k \leq T) \leq V(X(0)) + \frac{\bar{\lambda}T}{2} + \frac{\bar{\lambda}\bar{\mu}T}{2} + \bar{\sigma}^2 4^{2\gamma-3} T + c_4(k)\Delta^{\frac{1}{2}}}{(V(\frac{1}{k}) \wedge V(k))} \quad (14)$$

第三步: 令  $\theta_k = \tau_k \wedge \rho_k$ , 下证

$$E(\sup_{0 \leq t \leq T} |t \wedge \theta_k - t \wedge \theta_k|) \leq c_5(k)\Delta \quad (15)$$

对于任意  $t \in [0, T]$ , 有

$$|t \wedge \theta_k - t \wedge \theta_k| = \left\{ \int_0^{t \wedge \theta_k} [\lambda(r(s))\mu(r(s)) - \lambda(\bar{r}(s))\mu(\bar{r}(s)) - \lambda(r(s))X(s) + \lambda(\bar{r}(s))\bar{x}(s)] ds + \int_0^{t \wedge \theta_k} (\sigma(r(s))X^\gamma(s) - \sigma(\bar{r}(s))\bar{x}^\gamma(s)) dw(s) \right\}^2 \leq 3 \left[ \int_0^{t \wedge \theta_k} \lambda(r(s))\mu(r(s)) - \lambda(\bar{r}(s))\mu(\bar{r}(s)) ds \right]^2 + 3 \left[ \int_0^{t \wedge \theta_k} (\lambda(r(s))X(s) - \lambda(\bar{r}(s))\bar{x}(s)) ds \right]^2 + 3 \left[ \int_0^{t \wedge \theta_k} (\sigma(r(s))X^\gamma(s) - \sigma(\bar{r}(s))\bar{x}^\gamma(s)) dw(s) \right]^2$$

因此, 对于任意  $t_1 \in [0, T]$ , 可知

$$E(\sup_{0 \leq t \leq t_1} |t \wedge \theta_k - t \wedge \theta_k|) \leq 3TE \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} [\lambda(r(s))\mu(r(s)) - \lambda(\bar{r}(s))\mu(\bar{r}(s))]^2 ds +$$

$$3TE \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} [\lambda(r(s))X(s) - \lambda(\bar{r}(s))\bar{x}(s)]^2 ds + 3E \sup_{0 \leq t \leq t_1} \left[ \int_0^{t \wedge \theta_k} (\sigma(r(s))X^\gamma(s) - \sigma(\bar{r}(s))\bar{x}^\gamma(s)) dw(s) \right]^2$$

$$A(t) = 3TE \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} [\lambda(r(s))\mu(r(s)) - \lambda(\bar{r}(s))\mu(\bar{r}(s))]^2 ds, B(t) = 3TE \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} [\lambda(r(s))X(s) - \lambda(\bar{r}(s))\bar{x}(s)]^2 ds, D(t) = 3E \sup_{0 \leq t \leq t_1} \left[ \int_0^{t \wedge \theta_k} (\sigma(r(s))X^\gamma(s) - \sigma(\bar{r}(s))\bar{x}^\gamma(s)) dw(s) \right]^2, A(t) \leq 3TE \sum_{d=0}^{[\frac{T}{\Delta}] t_{d+1}} \int_{t_d} 4\bar{\lambda}^2 \bar{\mu}^2 (1_{r(s) \neq r(t_d)}) ds \leq 12\bar{\lambda}^2 \bar{\mu}^2 \sum_{d=0}^{[\frac{T}{\Delta}] t_{d+1}} \int_{t_d} E(1_{r(s) \neq r(t_d)}) ds \leq 12\bar{\lambda}^2 \bar{\mu}^2 \sum_{d=0}^{[\frac{T}{\Delta}] t_{d+1}} \int_{t_d} P(r(s) \neq r(t_d)) ds \leq 12\bar{\lambda}^2 \bar{\mu}^2 \sum_{d=0}^{[\frac{T}{\Delta}] t_{d+1}} \int_{t_d} \sum_{i \in S} P(r(t_d) = i) \cdot P(r(s) \neq i | r(t_d) = i) ds$$

由 (3) 式和 (4) 式可得

$$A(t) \leq 12\bar{\lambda}^2 \bar{\mu}^2 \sum_{d=0}^{[\frac{T}{\Delta}] t_{d+1}} \int_{t_d} \sum_{i \in S} P(r(t_d) = i) (\sum_{i \neq j} \kappa_{ij}(s - t_d) + o(s - t_d)) ds \leq 12\bar{\lambda}^2 \bar{\mu}^2 \sum_{d=0}^{[\frac{T}{\Delta}] t_{d+1}} \int_{t_d} ((\max_{1 \leq i \leq N} \kappa_{ii}) \Delta + o(\Delta)) ds \leq c_6(k)\Delta + o(\Delta) \quad (16)$$

$$B(t) \leq 6TE \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} [(\lambda(r(s)) - \lambda(\bar{r}(s)))X(s)]^2 ds + 6TE \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} [\lambda(\bar{r}(s))(X(s) - \bar{x}(s))]^2 ds \leq 6Tk^2 E \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} [\lambda(r(s)) - \lambda(\bar{r}(s))]^2 ds + 12\bar{\lambda}^2 TE \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} (X(s) - x(s))^2 ds + 12\bar{\lambda}^2 TE \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} (x(s) - \bar{x}(s))^2 ds$$

类似 (16) 式, 可导出

$$E \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} [\lambda(r(s)) - \lambda(\bar{r}(s))]^2 ds \leq c_7(k)\Delta + o(\Delta) \quad (17)$$

由 (13) 式和 (17) 式进一步得到,

$$B(t) \leq c_8(k)\Delta + o(\Delta) + 12\bar{\lambda}^2 T c_9(k)\Delta + 12\bar{\lambda}^2 T E \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} (X(s) - x(s))^2 ds \quad (18)$$

由 BDG 不等式和 Hölder 不等式, 可知

$$\begin{aligned} D(t) &\leq 12E \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} (\sigma(r(s))X^\gamma(s) - \sigma(\bar{r}(s))\bar{x}^\gamma(s))^2 ds \leq \\ &24E \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} [\sigma(\bar{r}(s))(X^\gamma(s) - \bar{x}^\gamma(s))]^2 ds + \\ &24E \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} (\sigma(r(s)) - \sigma(\bar{r}(s)))X^\gamma(s))^2 ds \leq \\ &48\bar{\sigma}^2 E \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} (X^\gamma(s) - \bar{x}^\gamma(s))^2 ds + \\ &48\bar{\sigma}^2 E \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} (x^\gamma(s) - \bar{x}^\gamma(s))^2 ds + \\ &24k^{2\gamma} E \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} (\sigma(r(s)) - \sigma(\bar{r}(s)))^2 ds \end{aligned}$$

由局部的李普希茨条件, 可知

$$\begin{aligned} |x^\gamma(s) - \bar{x}^\gamma(s)| &\leq k^{2(\gamma-1)} |x(s) - \bar{x}(s)|, \\ |X^\gamma(s) - \bar{x}^\gamma(s)| &\leq k^{2(\gamma-1)} |X(s) - x(s)| \end{aligned}$$

进而可得

$$\begin{aligned} D(t) &\leq 48\bar{\sigma}^2 \gamma^2 k^{2(\gamma-1)} E \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} (X(s) - x(s))^2 ds + \\ &48\bar{\sigma}^2 \gamma^2 k^{2(\gamma-1)} E \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} (x(s) - \bar{x}(s))^2 ds + \\ &24k^{2\gamma} E \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} (\sigma(r(s)) - \sigma(\bar{r}(s)))^2 ds \end{aligned}$$

类似 (16) 式, 可导出

$$E \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} [\sigma(r(s)) - \sigma(\bar{r}(s))]^2 ds \leq c_{10}(k)\Delta + o(\Delta)$$

结合 (18) 式可进一步得到

$$D(t) \leq c_{11}(k)\Delta + o(\Delta) + 48\bar{\sigma}^2 \gamma^2 k^{2(\gamma-1)} E \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} (X(s) - x(s))^2 ds \quad (19)$$

由 (16) 式、(18) 式和 (19) 式可知

$$E(\sup_{0 \leq t \leq t_1} |t \wedge \theta_k - t \wedge \theta_k|) \leq c_{12}(k)\Delta + o(\Delta) +$$

$$(12\bar{\lambda}^2 T + 48\gamma^2 \bar{\sigma}^2 k^{2(\gamma-1)}) E \int_0^{t_1 \wedge \theta_k} (X(s) - x(s))^2 ds$$

由 Gronwall 不等式知 (15) 式成立。

第四步: 对于任意  $\delta, \varepsilon \in (0, 1)$ , 令  $\bar{\Omega} = \{\omega: \sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - x(t)| \geq \delta\}$ 。由 (15) 式, 有

$$\begin{aligned} \delta P(\bar{\Omega} \cap (\theta_k \geq T)) &= \delta E(1_{(\theta_k \geq T)} 1_{\bar{\Omega}}) \leq \\ &E(1_{(\theta_k \geq T)} \sup_{0 \leq t \leq T \wedge \theta_k} |X(t) - x(t)|^2) \leq \\ &E(\sup_{0 \leq t \leq T \wedge \theta_k} |X(t) - x(t)|^2) \leq c_5(k)\Delta \end{aligned}$$

结合 (6) 式、(14) 式可得

$$\begin{aligned} P(\bar{\Omega}) &\leq P(\bar{\Omega} \cap (\theta_k \geq T)) + P(\theta_k \leq T) \leq \\ &P(\bar{\Omega} \cap (\theta_k \geq T)) + P(\tau_k \leq T) + P(\rho_k \leq T), \end{aligned}$$

$$P(\bar{\Omega}) \leq \frac{c_5(k)\Delta}{\delta} +$$

$$\frac{2V(X(0)) + \bar{\lambda}T + \bar{\lambda}\mu T + 2\bar{\sigma}^2 4^{2\gamma-3} T + c_4(k)\Delta^{\frac{1}{2}}}{(V(\frac{1}{k}) \wedge V(k))}$$

注意到  $k \rightarrow \infty$  时, 有  $V(\frac{1}{k}) \wedge V(k) \rightarrow \infty$ 。取充分大的  $k$  使得

$$\frac{2V(X(0)) + \bar{\lambda}T + \bar{\lambda}\mu T + 2\bar{\sigma}^2 4^{2\gamma-3} T}{(V(\frac{1}{k}) \wedge V(k))} < \frac{\varepsilon}{2}$$

固定上述  $k$ , 再取充分小的  $\Delta$  满足

$$\frac{c_5(k)\Delta}{\delta} + \frac{c_4(k)\Delta^{\frac{1}{2}}}{(V(\frac{1}{k}) \wedge V(k))} < \frac{\varepsilon}{2}$$

则  $P(\bar{\Omega}) = P(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - x(t)| \geq \delta) < \varepsilon$  得证。

**定理 3** 设  $X(t)$  是方程 (2) 的解,  $\bar{x}(t)$  为 (9) 式表示的阶梯函数。对于任意  $\delta, \varepsilon > 0$  有

$$P(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - \bar{x}(t)| \geq \delta) < \varepsilon$$

**证明** 对于任意  $t \in [0, T]$ , 易知

$$\begin{aligned} x(t \wedge \rho_k) - \bar{x}(t \wedge \rho_k) &= \\ &\int_{[\frac{t \wedge \rho_k}{\Delta}]\Delta}^{t \wedge \rho_k} (\lambda(\bar{r}(s))(u((\bar{r}(s)) - \bar{x}(s))) ds + \\ &\int_{[\frac{t \wedge \rho_k}{\Delta}]\Delta}^{t \wedge \rho_k} \sigma(\bar{r}(s)) |\bar{x}(s)|^\gamma dw(s) \end{aligned}$$

进而

$$\begin{aligned} |x(t \wedge \rho_k) - \bar{x}(t \wedge \rho_k)|^2 &\leq 4\bar{\lambda}^2 (\bar{\mu}^2 + k^2) \Delta^2 + \\ &2\bar{\sigma}^2 k^{2\gamma} \left| w(t \wedge \rho_k) - w([\frac{t \wedge \rho_k}{\Delta}]\Delta) \right|^2 \end{aligned}$$

由此推出

$$E(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t \wedge \rho_k) - \bar{x}(t \wedge \rho_k)|^2) \leq 4\bar{\lambda}^2 (\bar{\mu}^2 + k^2) \Delta^2 +$$

$$2\bar{\sigma}^2 k^{2\gamma} E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| w(t \wedge \rho_k) - w\left(\left[\frac{t \wedge \rho_k}{\Delta}\right]\Delta\right) \right|^2\right) \quad (20)$$

由 Doob 鞅不等式，可知

$$\begin{aligned} & E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| w(t) - w\left(\left[\frac{t}{\Delta}\right]\Delta\right) \right|^4\right) = \\ & E\left(\sup_{0 \leq k \leq \left[\frac{T}{\Delta}\right]-1} \sup_{k\Delta \leq t \leq (k+1)\Delta} |w(t) - w(k\Delta)|^4\right) \leq \\ & \sum_{k=0}^{\left[\frac{T}{\Delta}\right]-1} E\left(\sup_{k\Delta \leq t \leq (k+1)\Delta} |w(t) - w(k\Delta)|^4\right) \leq \\ & \sum_{k=0}^{\left[\frac{T}{\Delta}\right]-1} \left(\frac{4}{3}\right)^4 E|w((k+1)\Delta) - w(k\Delta)|^4 \leq \\ & \left(\frac{4}{3}\right)^4 \times 3\Delta T \end{aligned}$$

由 Lyapunov 不等式，可得

$$\begin{aligned} & E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| w(t \wedge \rho_k) - w\left(\left[\frac{t \wedge \rho_k}{\Delta}\right]\Delta\right) \right|^2\right) \leq \\ & \left[E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| w(t \wedge \rho_k) - w\left(\left[\frac{t \wedge \rho_k}{\Delta}\right]\Delta\right) \right|^4\right)\right]^{\frac{1}{2}} \leq \\ & \left(\frac{4}{3}\right)^2 \times (3T\Delta)^{\frac{1}{2}} \quad (21) \end{aligned}$$

由 (20) 式、(21) 式可知

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t \wedge \rho_k) - \bar{x}(t \wedge \rho_k)|^2\right) \leq c_{13}(k)\Delta^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

对于任意  $\delta, \varepsilon \in (0, 1)$ ，令  $\Omega = \{\omega: \sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - \bar{x}(t)|^2 \geq \delta\}$ 。由 (22) 式，有

$$\begin{aligned} \delta P(\Omega \cap (\rho_k \geq T)) &= \delta E(1_{(\rho_k \geq T)} 1_{\Omega}) \leq \\ E(1_{(\rho_k \geq T)} \sup_{0 \leq t \leq T \wedge \rho_k} |x(t) - \bar{x}(t)|^2) &\leq \end{aligned}$$

$$E\left(\sup_{0 \leq t \leq T \wedge \rho_k} |x(t) - \bar{x}(t)|^2\right) \leq c_{13}(k)\Delta^{\frac{1}{2}}$$

结合 (14) 式可得

$$\begin{aligned} P(\Omega) &\leq P(\Omega \cap (\rho_k \geq T)) + \\ P(\rho_k \leq T) &\leq \frac{c_{13}(k)\Delta^{\frac{1}{2}}}{\delta} + \\ \frac{V(X(0)) + \frac{\bar{\lambda}T}{2} + \frac{\bar{\lambda}\bar{\mu}T}{2} + \bar{\sigma}^2 4^{2\gamma-3}T + c_4(k)\Delta^{\frac{1}{2}}}{V\left(\frac{1}{k}\right) \wedge V(k)} & \end{aligned}$$

当  $k \rightarrow \infty$  时，有  $V\left(\frac{1}{k}\right) \wedge V(k) \rightarrow \infty$ 。当  $k$  充分大时，有

$$\frac{V(X(0)) + \frac{\bar{\lambda}T}{2} + \frac{\bar{\lambda}\bar{\mu}T}{2} + \bar{\sigma}^2 4^{2\gamma-3}T}{V\left(\frac{1}{k}\right) \wedge V(k)} < \frac{\varepsilon}{4}$$

固定上面充分大的  $k$ ，取充分小的  $\Delta$  得到

$$\frac{c_{13}(k)\Delta^{\frac{1}{2}}}{\delta} + \frac{c_4(k)\Delta^{\frac{1}{2}}}{\left(V\left(\frac{1}{k}\right) \wedge V(k)\right)} < \frac{\varepsilon}{4}$$

由此可知

$$P(\Omega) = P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - \bar{x}(t)|^2 \geq \delta\right) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (23)$$

注意到，

$$\begin{aligned} & P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - \bar{x}(t)| \geq \delta\right) \leq \\ & P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |x(t) - \bar{x}(t)| \geq \frac{\delta}{2}\right) + \\ & P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - x(t)| \geq \frac{\delta}{2}\right) \end{aligned}$$

由 (10) 式和 (23) 式可知  $P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} |X(t) - \bar{x}(t)| \geq \delta\right) < \varepsilon$  得证。

### 3 实证分析

#### 3.1 数据的选取和处理

本文选取 7 天上海银行间同业拆借利率数据，样本区间为 2007 年 1 月到 2014 年 2 月，每年有 250 个样本，共有 1 788 个样本<sup>①</sup>。选择 7 天上海银行间同业拆借利率有两个理由：一是 7 天同业拆借利率具有高敏感波动水平；二是上海同业拆借利率处于市场最基准的地位，直接受市场利率化的影响。

由于上海银行间同业拆借利率的统计数据是按单利录入的，因此在应用中应将它转换为等价连续复利的数值，转换公式

$$X_c(t) = \ln\left(1 + \frac{X(t)}{52}\right) \times 52$$

其中  $X_c$  表示连续复利形式的利率。

#### 3.2 RS CKLS 模型的建立

首先对方程 (2) 进行欧拉离散化处理，得到方程的离散形式

$$X_{t+\Delta} = X_t + \lambda(r_t)(\mu(r_t) - X_t)\Delta + \sigma(r_t)X_t^\gamma \varepsilon_t$$

其中  $\varepsilon_t; i. i. d. \sim N(0, 1)$ ， $\lambda, \mu, \sigma$  都依赖于马氏转移的状态变量  $r_t$ ， $\Delta$  是时间间隔。

假设  $r_t$  有两个不同的状态量 1 和 2，为了便于解释模型 (2)，假定在每个状态下的短期利率都服从条件正态分布。因此  $X_t$  条件分布为一个混合正态分布，表示如下

$$X_{t+\Delta} | \Phi_t \sim \begin{cases} N(X_t + \lambda_1(\mu_1 - X_t)\Delta, \sigma_1^2 X_t^{2\gamma}), & r_t = 1, \\ N(X_t + \lambda_2(\mu_2 - X_t)\Delta, \sigma_2^2 X_t^{2\gamma}), & r_t = 2 \end{cases}$$

<sup>①</sup> 数据来源于 <http://www.shibor.org/shibor/web/html/>。

一般地, 假定  $r_t$  服从一阶马氏链, 其转移概率为

$$P(r_{t+1} = 1 | r_t = 1) = p,$$

$$P(r_{t+1} = 2 | r_t = 1) = 1 - p,$$

$P(r_{t+1} = 2 | r_t = 2) = q, P(r_{t+1} = 1 | r_t = 2) = 1 - q.$

假设  $X_1$  已知,  $\Phi_t$  为到时间  $t$  为止的信息集, 并且马氏链  $r_t$  在  $t = 1$  时刻以稳态概率开始, 即

$$P(r_1 = 1 | \Phi_1) = \frac{1 - q}{2 - p - q},$$

$$P(r_1 = 2 | \Phi_1) = \frac{1 - p}{2 - p - q}$$

由全概率公式, 可得

$$p_{1t} = P(r_t = 1 | \Phi_{t-1}) = \frac{1 - q}{2 - p - q},$$

$$p_{2t} = P(r_t = 2 | \Phi_{t-1}) = \frac{1 - p}{2 - p - q}, t \geq 2$$

本文利用极大似然法估计模型参数, 对数似然函数可有如下形式:

$$L = \sum_{t=1}^T \ln \left\{ p_{1t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{1t}}} \exp \left[ -\frac{(X_t - \mu_{1t})^2}{2\sigma_{1t}} \right] + p_{2t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{2t}}} \exp \left[ -\frac{(X_t - \mu_{2t})^2}{2\sigma_{2t}} \right] \right\}$$

### 3.3 模型检验方法

在 RS CKLS 模型中,  $p$  和  $q$  是不可识别的参数, 模型是否表现非线性需作进一步检验。本文主要采用两种检验方法: 一种是检验 RS CKLS 模型是否非线性的 Hansen 似然比检验, 另一种是检验参数是否显著的 Wald 检验。

Hansen<sup>[21]</sup> 表明在研究马氏转移模型时, 由于引入不可识别的参数, 传统的似然比检验统计量检验并不适用于该模型, 此时似然比统计量的分布是渐近有偏于传统的经典分布, 基于以上原因, 本文考虑 Hansen 似然比检验。假设检验为:

$$H_0: \text{CKLS 模型}; \quad H_1: \text{RS CKLS 模型}$$

$$\text{检验统计量 } LR = L(q) - L(q_0) \sim \chi^2(k)$$

其中  $L(q)$  表示 RS CKLS 模型在给定参数估计下的对数似然值,  $L(q_0)$  表示 CKLS 模型在给定参数估计下的对数似然值,  $k$  为两个模型参数个数之差。在原假设成立时,  $LR$  渐近服从自由度为  $k$  的卡方分布。

Wald 检验主要检验 RS CKLS 模型的参数稳定性。考虑以下四个假设检验,

$$H_0^1: p = 1 - q; H_0^2: \lambda_1 = \lambda_2;$$

$$H_0^3: \mu_1 = \mu_2; H_0^4: \sigma_1 = \sigma_2$$

Wald 检验统计量分别为:

$$Z_1(\hat{p} = 1 - \hat{q}) =$$

$$\frac{(\hat{p} - (1 - \hat{q}))^2}{\text{Var}(\hat{p}) + \text{Var}(\hat{q}) - 2\text{Cov}(\hat{p}, \hat{q})} \sim \chi^2(1),$$

$$Z_2(\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2) =$$

$$\frac{(\hat{\lambda}_1 - \hat{\lambda}_2)^2}{\text{Var}(\hat{\lambda}_1) + \text{Var}(\hat{\lambda}_2) - 2\text{Cov}(\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2)} \sim \chi^2(1),$$

$$Z_3(\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2) =$$

$$\frac{(\hat{\mu}_1 - \hat{\mu}_2)^2}{\text{Var}(\hat{\mu}_1) + \text{Var}(\hat{\mu}_2) - 2\text{Cov}(\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2)} \sim \chi^2(1),$$

$$Z_4(\hat{\sigma}_1 = \hat{\sigma}_2) =$$

$$\frac{(\hat{\sigma}_1 - \hat{\sigma}_2)^2}{\text{Var}(\hat{\sigma}_1) + \text{Var}(\hat{\sigma}_2) - 2\text{Cov}(\hat{\sigma}_1, \hat{\sigma}_2)} \sim \chi^2(1)$$

以上  $\text{Var}(\hat{p})$  为估计量  $\hat{p}$  的方差函数,  $\text{Cov}(\hat{p}, \hat{q})$  是估计量  $\hat{p}$  和  $\hat{q}$  的协方差函数。若拒绝原假设  $H_0^i, i = 1, 2, 3, 4$ , 则表明两个估计量在一定水平下显著, 否则表明参数估计量没有明显的差异。

### 3.4 模型估计结果

表 1 给出了 CKLS 模型和 RS CKLS 模型的参数估计值。如表所示, 两种模型的波动水平都呈现高敏感,  $LR$  的值大于在 5% 水平下的临界值, 故拒绝原假设。RS CKLS 模型存在非线性, 在不同的状态中, 该参数对应各自均值回复过程也呈现不同的非对称性。在 Wald 检验中, 用 Hessian 矩阵近似求解, 最后得到  $Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  分别为 0.001 5, 11.94, 138.20, 993.11, 表明参数估计量在 5% 水平下都显著, 佐证了 RS CKLS 模型设定的稳健性。

表 1 RS CKLS 模型和 CKLS 模型参数估计

Table 1 RS CKLS model and CKLS model parameter estimation

参数	RS CKLS 模型	参数	CKLS 模型
$p$	0.331 1	$\lambda$	0.500
$q$	0.783 4	$\mu$	3.250
$\lambda_1$	1.085 0	$\sigma$	1.495
$\lambda_2$	0.566 9	$\gamma$	1.566
$\mu_1$	6.161 5	LogL	1 339.41
$\mu_2$	0.132 3		
$\sigma_1$	2.753 0		
$\sigma_2$	0.510 8		
$\gamma$	1.918 3		
LogL	1 958.14		

图 1 和图 2 分别表示两种模型估计对比图和绝对残差图, 表 2 给出 CKLS 模型和 RS CKLS 模型拟合结果与原数据绝对误差的均值和标准差。由表所示, 相比于用 CKLS 模型拟合 7 天上海同业拆借利率, RS CKLS 模型拟合效果更佳。

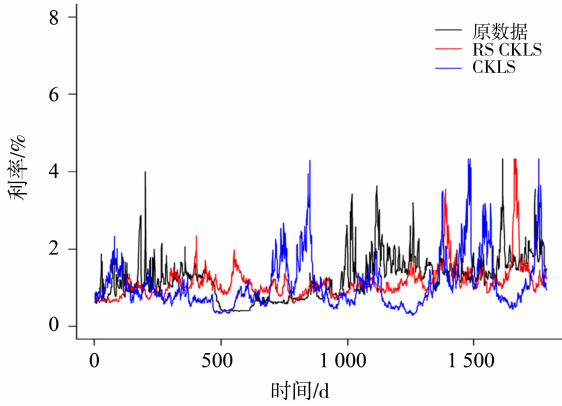


图 1 两种模型估计效果对比

Fig. 1 Compare the estimated effect of two models

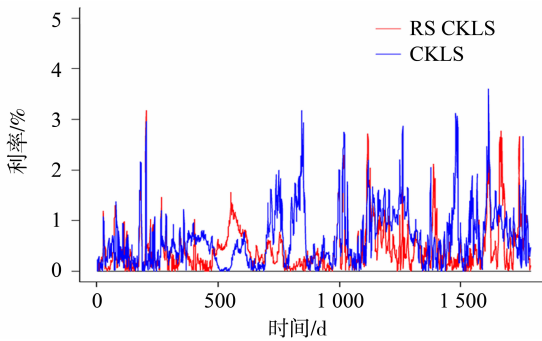


图 2 两种模型绝对误差

Fig. 2 Absolute error of two models

表 2 两种模型拟合结果与原数据的绝对误差的均值和标准差

Table 2 Mean and standard deviation of absolute error compare two models fitting result with the original data

模型	均值	标准差
CKLS 模型	0.006 237	0.051 93
RS CKLS 模型	0.004 811	0.047 93

## 4 结 语

本文将马氏转移机制加入高敏感均值回复随机微分方程模型，证明了马氏转移的高敏感均值回复随机微分方程存在唯一的全局正解和欧拉数值解依概率收敛于方程的真实解。通过对 7 天上海同业拆借利率进行建模、估计和结果比较，相比于高敏感均值回复随机微分方程模型，马氏转移的高敏感均值回复随机微分方程模型模拟效果更佳。本文提出的马氏转移模型为研究短期利率动态变化，尤其是在高敏感波动水平情形下利率动态变化提供了新的依据。

## 参考文献：

- [1] MERTON R C. The theory of rational option pricing [J]. Bell J Econ Manag Sci, 1973,4(1):141-183.
- [2] COX J C. Notes on option pricing: constant elasticity of variance diffusion [R]. Stanford University, 1975.
- [3] VASICEK O. An equilibrium characterization of the terms structure [J]. J Fina Econom, 1977, 5(2):177-188.
- [4] DOTHAN U L. On the term structure of interest rates [J]. J Fina Econom, 1978, 6(1): 59-69.
- [5] BRENNAN M J, SCHWARTZ E S. Analyzing convertible bonds [J]. J Financ Quant Anal, 1980, 15(04):907-929.
- [6] COX J C, INGERSOLL Jr J E, ROSS S A. An analysis of variable rate loan contracts [J]. J Finance, 1980, 35(2):389-403.
- [7] CHEN K C, KAROLY G A, LONGSTAFF F A, et al. An empirical comparison of alternative models of short-term interest rate [J]. J Finance, 1992, 47(3): 1209-1227.
- [8] NOWMAN K B. Gaussian Estimation of single-factor continuous time models of the term structure of interest rates [J]. J Finance, 1997, 52(4): 1695-1706.
- [9] BUFFINGTON J, ELLIOTT R J. American options with regime switching [J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2002, 5(5):497-514.
- [10] YIN G G, ZHOU X Y. Markowitz mean-variance portfolio selection with regime switching: from discrete-time models to their continuous time limits [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2004, 49:349-360.
- [11] WU F, MAO X, CHEN K. A highly sensitive mean-reverting process in finance and Euler-Maruyama approximations [J]. J Math Anal Appl, 2008, 348:540-554.
- [12] 刘金全, 邓挺国. 利率期限结构的马尔科夫区制转移模型与实证分析[J]. 经济研究, 2006, 11:82-91.
- [13] 马晓兰, 潘冠中. 单因子利率期限结构模型的广义矩估计及对中国货币市场实证检验[J]. 数量经济技术经济研究, 2006, 1:107-116.
- [14] 刘金全, 张文刚. 利率结构模型与应用[D]. 长春: 吉林大学, 2006.
- [15] 潘冠中, 邵斌. 单因子利率模型的极大似然估计 - 对中国利率的实证分析[J]. 财经研究, 2004, 30(10): 62-69.
- [16] 汪波. Shibor 与货币市场利率体系的关系初探[J]. 中国货币市场, 2008, 7: 46-50.
- [17] 郭建伟. Shibor 与利率市场化[J]. 中国货币市场, 2007, 7:5-11.

- in biological invasion and disease spread [G]. *Nonlinear Dynamics and Evolution Equations*, 137 – 200, Fields Inst Commun, 48, Amer Math Soc, Providence, RI, 2006.
- [6] AHMAD S, LAZER A C. An elementary approach to traveling front solutions to a system of  $N$  competition-diffusion equations [J]. *Nonlinear Anal, TMA*, 1991, 16: 893 – 901.
- [7] TANG M M, FIFE P. Propagating fronts for competing species equations with diffusion [J]. *Arch Ration Mech Anal*, 1980, 73: 69 – 77.
- [8] VUUREN J H Van. The existence of traveling plane waves in a general class of competition-diffusion systems [J]. *IMA J Appl Math*, 1995, 55: 135 – 148.
- [9] GOURLEY S A, RUAN S. Convergence and traveling fronts in functional differential equations with nonlocal terms: a competition model [J]. *SIAM J Math Anal*, 2003, 35: 806 – 822.
- [10] HOSONO Y. Travelling waves for a diffusive Lotka-Volterra competition model. II. A geometric approach [J]. *Forma*, 1995, 10: 235 – 257.
- [11] HUANG W. Problem on minimum wave speed for a Lotka-Volterra reaction-diffusion competition model [J]. *J Dynam Diff Eqns*, 2010, 22: 285 – 297.
- [12] LEWIS M A, LI B, WEINBERGER H F. Spreading speed and linear determinacy for two-species competition models [J]. *J Math Biol*, 2002, 45: 219 – 233.
- [13] LI W T, LIN G, RUAN S. Existence of traveling wave solutions in delayed reaction-diffusion systems with applications to diffusion-competition systems [J]. *Nonlinearity*, 2006, 19: 1253 – 1273.
- [14] LIN G, LI W T, MA M. Travelling wave solutions in delayed reaction diffusion systems with applications to multi-species models [J]. *Discrete Contin Dyn Syst, Ser B*, 2010, 19: 393 – 414.
- [15] PAN S. Traveling wave solutions in delayed diffusion systems via a cross iteration scheme [J]. *Nonlinear Analysis RWA*, 2009, 10: 2807 – 2818.
- [16] LIN G, RUAN S. Traveling wave solutions for delayed reaction-diffusion systems and applications to Lotka-Volterra competition-diffusion models with distributed delays [J]. *J Dynam Diff Eqns*, 2014, 26: 583 – 605.
- [17] MURRAY J D. *Mathematical biology* [M]. 3rd ed. New York: Springer, 2003.
- [18] SHIGESADA N, KAWASAKI K. *Biological invasions: theory and practice* [M]. Oxford: Oxford University Press, 1997.
- [19] MA S. Traveling wavefronts for delayed reaction-diffusion systems via a fixed point theorem [J]. *J Differential Equations*, 2001, 171: 294 – 314.
- [20] MA S. Traveling waves for non-local delayed diffusion equations via auxiliary equations [J]. *J Differential Equations*, 2007, 237: 259 – 277.
- [21] WANG Z C, LI W T, RUAN S. Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with spatio-temporal delays [J]. *J Differential Equations*, 2006, 222: 185 – 232.
- [22] WU J, ZOU X. Traveling wave fronts of reaction-diffusion systems with delay [J]. *J Dynam Diff Eqns*, 2001, 13: 651 – 687.
- [23] HUANGJ, ZOU X. Existence of traveling wavefronts of delayed reaction-diffusion systems without monotonicity [J]. *Discrete Cont Dyn Sys: Ser B*, 2003, 9: 925 – 936.
- [24] ARONSON D G, WEINBERGER H F. *Nonlinear diffusion in population genetics, combustion, and nerve pulse propagation* [C] // GOLDSTEIN J A, ed. *Partial differential equations and related topics. Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 446. Berlin: Springer, 1975: 5 – 49.
- [25] SMITH H L. *Monotone dynamical systems: an introduction to the theory of competitive and cooperative systems* [M]. AMS, Providence, RI, 1995.
- [26] 叶其孝, 李正元, 王明新, 等. *反应扩散方程引论* [M]. 2 版. 北京: 科学出版社, 2011.

(上接第 67 页)

- [18] YUAN C, MAO X. Convergence of the Euler-Maruyama method for stochastic differential equations with Markovian switching [J]. *Math Comput Simulat*, 2004, 64: 223 – 232.
- [19] BADURALIYA C H, MAO X. The Euler-Maruyama approximation for the asset price in the mean-reverting-theta stochastic volatility model [J]. *Comput Math Appl*, 2012, 64: 2209 – 2223.
- [20] MAO X, YUAN C. *Stochastic differential equations with Markovian switching* [M]. London: Imperial College Press, 2006.
- [21] HANSEN B E. The likelihood ratio test under non-standard condition: testing the Markov switching model of GNP [J]. *Journal of Applied Econometrics*, 1992 (7): 61 – 82.