DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2015.05.001

具有 Banach 代数的锥度量空间上拟压缩映射的新不动点定理*

许绍元[1]，马　超[2]，周作领[3]
（1. 韩山师范学院数学与统计学系，广东 潮州 521041；
2. 澳门科技大学资讯科技学院，中国 澳门；
3. 中山大学岭南学院，广东 广州 510275）

摘　要： 以 Banach 代数取代 Banach 空间作为锥度量空间的底空间，引入具有 Banach 代数的锥度量空间，在正规性条件下已经得到了关于拟压缩映射的不动点定理。删去正规性条件，利用 c－序列理论同样得到了拟压缩映射的不动点存在唯一性，主要结果改进和推广了相关文献的一些结论。

关键词： 具有 Banach 代数的锥度量空间；非正规锥；不动点定理；拟压缩映射；c－序列

中图分类号： O177.91　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 0529－6579（2015）05－0001－04

A New Fixed Point Theorem of Quasi-Contractions on Cone Metric Space

XU Shaoyuan[1], *MA Chao*[2], *ZHOU Zuoling*[3]
（1. School of Mathematics and Statistics, Hanshan Normal College, Chaozhou 521041, China;
2. Faculty of Information Technology, Macao University of Science and Technology, Macao, China;
3. School of Lingnan, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China）

Abstract: By replacing Banach spaces by Banach algebras as the underlying spaces of cone metric spaces, the concept of cone metric spaces with Banach algebras has been introduced. And a fixed point theorem of quasi-contractions with the assumption of normality has been proved. By omitting the assumption of normality and utilizing the theory of c-sequence, the existence and uniqueness of the fixed point for the quasi-contractions is obtained in the setting of cone metric spaces with Banach algebras. As a consequence, the corresponding result in the literature is improved and generalized.

Key words: cone metric spaces with Banach algebras; non-normal cones; fixed point theorems; quasi-contractions; c-sequence

设 (X,d) 为完备度量空间。映射 $T:X\to X$ 称为一个拟压缩映射（简称拟压缩），如果存在 $k\in(0,1)$，对任意 $x,y\in X$，总有

$$d(Tx,Ty)\leqslant k\max\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),d(x,Ty),d(y,Tx)\}$$

Ciric[1]引入此定义并且将它作为更广泛的一类压缩映射进行研究。他证明了一个著名的结果：完备度量空间上任意拟压缩映射必有唯一的不动点。2007 年，Huang 等[2]引入锥度量空间，推广了通常的度量空间。近年来，一些作者在锥度量空间中研究拟压缩映射，得到了一些重要结果，见文［3－7］。

最近，刘浩等[8]引入具有 Banach 代数的锥度

* 收稿日期：2015－01－16
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11371379）；澳门科学技术发展基金资助项目（069/2011/A）；韩山师范学院 2013 年创新强系资助项目
作者简介：许绍元（1964 年生），男；研究方向：非线性分析与分形几何；通讯作者：马超；E-mail：cma@must.edu.mo

量空间，在正规性的条件下得到了关于拟压缩映射的不动点定理。本文则删去了文［8］中正规性条件，利用 c －序列理论同样得到了拟压缩映射的不动点存在唯一性，其主要结果改进了和推广了相关文献的一些结论。

自锥度量空间提出后，一些作者就映射的不动点存在性研究了锥度量空间是否等价于度量空间的问题，见文［9－12］。正如文［13］所言，我们可以断言具有 Banach 代数 A 的锥度量空间 (X,d) 并不等价于度量空间 (X,d^*)，这里的距离 d^* 定义为 $d^* = \xi_e \circ d$，其中非线性参数函数[9-10] $\xi_e:A\to \mathbf{R}(e\in \mathrm{int}P)$ 定义为

$$\xi_e(y) = \inf\{r\in \mathbf{R}: y\in re - P\}$$

因此，本文进一步研究无正规条件下的锥度量空间中拟压缩映射的不动点定理是有意义的。

1 预备知识

以下总假 A 为实 Banach 代数，即 A 是具有乘法运算的实 Banach 空间，其运算具有如下性质（对任意 $x,y,z\in A,\alpha\in \mathbf{R}$）：

（i）$(xy)z = x(yz)$；

（ii）$x(y+z) = xy+xz$ 以及 $(x+y)z = xz+yz$；

（iii）$\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$；

（iv）$\|xy\|\leqslant \|x\|\|y\|$。

本文总假设实 Banach 代数 A 具有单位元（即乘法单位元）e，它满足对任意 $x\in A$ 均有 $ex = xe = x$。一个元素 $x\in A$ 称为可逆的，如果存在一个元素（称为它的一个逆元）$y\in A$ 使得 $xy = yx = e$。x 的逆元记为 x^{-1}，详见文［14］。

下面的著名结论在本文中是十分有用的（见文［14］）。

命题 1 设 A 是具有单位元 e 的 Banach 代数，$x\in A$。若 x 的谱半径 $\rho(x)$ 小于 1，即

$$\rho(x) = \lim_{n\to\infty}\|x^n\|^{\frac{1}{n}} < 1$$

则 $e-x$ 是可逆的，并且有

$$(e-x)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} x^i$$

下面回顾 Banach 代数中的锥和半序的概念。Banach 代数 A 中一个子集 P 称为一个锥，若满足下列条件：

（i）P 为非空闭集且 $\{\theta,e\}\subset P$；

（ii）$\alpha P+\beta P\subset P$ 对任意非负实数 α,β 均成立；

（iii）$P^2 = PP\subset P$；

（iv）$P\cap\{-P\} = \{\theta\}$，

其中 θ 为 Banach 代数 A 中的零元。对于锥 $P\subset A$，定义半序 $\leqslant$ 如下：$x\leqslant y$ 当且仅当 $y-x\in P$；$x<y$ 表示 $x\leqslant y$ 且 $x\neq y$，而 $x\ll y$ 则表示 $y-x\in \mathrm{int}P$，其中 $\mathrm{int}P$ 表示 P 的内部。

锥 P 称为正规的，如果存在 $M>0$ 使得对任意 $x,y\in A$，有

$$\theta\leqslant x\leqslant y\Rightarrow \|x\|\leqslant M\|y\|$$

满足上述条件的最小正数 M 称为 P 的正规常数[2]。

下文我们假定 P 为 Banach 代数 A 中的体锥（即满足 $\mathrm{int}P\neq\varnothing$。并且 $\leqslant$ 是由 P 确定的半序。

定义 1 [2,8,13] 设 X 为非空集。若映射 $d:X\times X\to A$ 满足

（i）$\theta\leqslant d(x,y)$ 对任意 $x,y\in X$ 成立并且 $d(x,y) = \theta$ 当且仅当 $x = y = \theta$；

（ii）$d(x,y) = d(y,x)$ 对任意 $x,y\in X$ 成立；

（iii）$d(x,y)\leqslant d(x,z)+d(z,y)$ 对任意 $x,y,z\in X$ 成立，

则 d 称为 X 上的一个锥距离，(X,d) 称为具有 Banach 代数 A 的锥距离空间。

定义 2[2,8,13] 设 (X,d) 为具有 Banach 代数 A 的锥距离空间，$x\in X$ 且 $\{x_n\}$ 为 X 中的序列。则

（i）称 $\{x_n\}$ 收敛于 x，若对任意满足 $\theta\ll c$ 的向量 $c\in A$，存在正整数 N 使得 $d(x_n,x)\ll c$ 对任意 $n\geqslant N$ 成立，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = x$ 或 $x_n\to x$。

（ii）称 $\{x_n\}$ 为 Cauchy 列，若对任意满足 $\theta\ll c$ 的向量 $c\in A$，存在正整数 N 使得 $d(x_n,x_m)\ll c$ 对任意 $n,m\geqslant N$ 成立。

（iii）(X,d) 称为完备的锥距离空间，若 (X,d) 中任意 Cauchy 列在 (X,d) 中都收敛。

下面给出两个有用的引理。

引理 1[15-16] 设 E 为具有体锥 P 的 Banach 空间。若 $\theta\leqslant u\ll c$ 对任意 $\theta\ll c$ 成立，则 $u = \theta$。

引理 2[15-16] 设 E 为具有体锥 P 的 Banach 空间。若 $\|x_n\|\to 0(n\to\infty)$，则对任意 $\theta\ll\varepsilon$，存在正整数 N 使得 $x_n\ll\varepsilon$ 对任意 $n\geqslant N$ 成立。

下面给出具有 Banach 代数的锥距离空间中拟压缩映射的定义。

定义 3[8] 设 (X,d) 为具有 Banach 代数 A 的锥距离空间。映射 $T:X\to X$ 称为拟压缩，如果对于任意满足 $\rho(k)<1$ 的 $k\in P$ 以及 $x,y\in X$ 有

$$d(Tx,Ty)\leqslant ku \tag{1}$$

其中

$$u\in\{d(x,y),d(x,Tx),d(y,Ty),d(x,Ty),d(y,Tx)\}$$

注 1 若 $\rho(k)<1$，则 $\|k^m\|\to 0(n\to\infty)$。

2　主要结果

本节将删去文［8］中所要求正规性条件，利用 c －序列理论得到了具有 Banach 代数的锥距离空间中拟压缩映射的不动点定理。

我们要用到如下的 c －序列的有关结论。

定义 4[17-18]　设 P 为 Banach 代数 A 中的体锥。序列 $\{u_n\} \subset P$ 称为 c －序列，如果对任意 $\theta \ll c$，存在正整数 N 使得 $u_n \ll c$ 对任意 $n \geqslant N$ 成立。

利用 c －序列的定义不难得到如下简单的结论。

命题 2[17,19]　设 P 为 Banach 代数 A 中的体锥，$\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 均为 P 中的序列。若 $\{u_n\}$ 和 $\{v_n\}$ 都是 c －序列且 $\alpha,\beta > 0$，则 $\{\alpha u_n + \beta v_n\}$ 也是 c －序列。

除了上述命题 2 外，下列几个命题在本文主要结果的证明中是至关重要的。

命题 3[19]　设 P 为 Banach 代数 A 中的体锥，$\{u_n\}$ 为 P 中的序列。若 $k \in P$ 是任意给定的向量且 $\{u_n\}$ 是 c －序列，则 $\{ku_n\}$ 也是 c －序列。

命题 4[19]　设 (X,d) 为具有 Banach 代数 A 的锥距离空间且 P 为 A 中的体锥。设 $\{x_n\}$ 为 X 中的序列。若 $\{x_n\}$ 收敛于 $x \in X$，则

(i) $\{d(x_n,x)\}$ 是 c －序列。

(ii) 对任意 $p \in \mathbf{N}$，$\{d(x_n,x_{n+p})\}$ 也是 c －序列。

下面给出本文的主要的结果。

定理 1　设 (X,d) 为具有 Banach 代数 A 的完备的锥距离空间，$k \in P$。若映射 $T:X \to X$ 为拟压缩，满足条件（i），则 T 在 X 中有唯一的不动点。并且对任意的 $x \in X$，迭代序列 $\{T^n x\}$ 收敛于该不动点。

证明　任意选取 $x_0 \in X$，记 $x_n = T^n x_0$。首先证明

$$d(x_i,x_j) \leqslant k(e-k)^{-1}d(x_0,x_1),\ \forall\, i,j \geqslant 1 \quad (2)$$

（2）式的证明与文［8，引理 10］中的（7）式一致，这是因为文［8，引理 10］中的（7）式的证明不需要使用正规性条件。

下证 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列。

对任意 $1 < m < n$，记

$$C(m,n) = \{d(x_i,x_j) \mid m \leqslant i < j \leqslant n\}$$

由拟压缩的定义，对任意 $u \in C(m,n)$，存在 $v \in C(m-1,n)$，使得 $u \leqslant kv$。于是，

$$d(x_m,x_n) \leqslant ku_1 \leqslant k^2u_2 \leqslant \cdots \leqslant k^{m-1}u_{m-1} \leqslant k^m(e-k)^{-1}d(x_0,x_1)$$

这里

$$u_1 \in C(m-1,n),u_2 \in C(m-2,n),\cdots,\ u_{m-1} \in C(1,n)$$

其中最后的不等式由（2）式得到。

由引理 2 以及

$$\|k^m(e-k)d(x_0,x_1)\| \to 0(m\to\infty)$$

（这是因为由注 1，$\|k^m\| \to 0(m\to\infty)$），于是对任意 $c \in A$（这里 $\theta \ll c$），存在正整数 N 使得对任意 $n > m \geqslant N$ 有

$$d(x_n,x_m) \leqslant k^m(e-k)^{-1}d(x_0,x_1) \ll c$$

故 $\{x_n\}$ 是 Cauchy 列。

其次证明不动点的存在性。

由 (X,d) 的完备性，存在 $x^* \in X$ 使得 $x_n \to x^*$。于是，

$$d(x^*,Tx^*) \leqslant d(x^*,x_n) + d(x_n,Tx^*) \leqslant d(x^*,x_n) + ku$$

其中

$$u \in \{d(x_{n-1},x^*),d(x_{n-1},x_n),d(x^*,Tx^*),\ d(x_{n-1},Tx^*),d(x^*,x_n)\}$$

若 $u = d(x_{n-1},x^*),d(x_{n-1},x_n)$ 或 $u = d(x^*,x_n)$，则分别有

$$d(x^*,Tx^*) \leqslant d(x^*,x_n) + kd(x_{n-1},x^*),$$

$$d(x^*,Tx^*) \leqslant d(x^*,x_n) + kd(x_{n-1},x^*) + kd(x^*,x_n),$$

$$d(x^*,Tx^*) \leqslant (e+k)d(x^*,x_n)$$

若 $u = d(x^*,Tx^*)$，则

$$(e-k)d(x^*,Tx^*) \leqslant d(x^*,x_n)$$

于是

$$d(x^*,Tx^*) \leqslant (e-k)^{-1}d(x^*,x_n)$$

若 $u = d(x_{n-1},Tx^*)$，则

$$d(x^*,Tx^*) \leqslant d(x^*,x_n) + kd(x_{n-1},Tx^*) \leqslant d(x^*,x_n) + kd(x_{n-1},x^*) + kd(x^*,Tx^*)$$

考虑到 $(e-k)^{-1} \geqslant \theta$，于是有

$$d(x^*,Tx^*) \leqslant (e-k)^{-1}[d(x^*,x_n) + kd(x_{n-1},x^*)]$$

因此，无论哪种情形，由定义 4 和命题 2－4，有 $d(x^*,Tx^*) \leqslant y_n$，其中 $\{y_n\}$ 是锥 P 中 c －序列。于是，对任意 $\theta \ll c$，有 $\theta \leqslant d(x^*,Tx^*) \ll c$。因此，由引理 1 有 $d(x^*,Tx^*) = \theta$，故 x^* 为 T 的不动点。

最后证明不动点的唯一性。证明方法同文［8，定理 9 ］。

注 2　与文［8，定理 9］相比，本文定理 1 不需要锥 P 的正规性条件，因此定理 1 改进和推广了文［8，定理 9］。

注 3　若锥 P 为正规锥并且其内部为空集且

$\|k\| = \lambda < 1$，则定理 1 的结论仍然成立。事实上由文［15］，我们可以假定正规常数 $M = 1$，因此由

$$d(Tx,Ty) \leqslant ku$$

有

$$\|d(Tx,Ty)\| \leqslant \|k\| \cdot \|u\| = \lambda\|u\|, \lambda \in [0,1)$$

于是有

$$\|d(Tx,Ty)\| \leqslant \lambda\max\{\|d(x,y)\|, \|d(x,Tx)\|, \|d(y,Ty)\|, \|d(x,Ty)\|, \|d(y,Tx)\|\}$$

此即完备度量空间（X,D）（其中 $D(x,y) = \|d(x,y)\|$）中的 Ciric 压缩映射[1,15]。

注 4 在定理 1 中令 $A = \mathbf{R}, P = [0, +\infty)$，则利用通常的范数我们可以得到文［1］的主要结果，即完备度量空间中的 Ciric 压缩映射不动点定理。这表明定理 1 推广了文［1，15］的主要结论。

参考文献：

［1］ CIRIC L J B. A generalization of Banach's contraction principle［J］. Proc Amer Math Soc, 1974, 45: 267－273.

［2］ HUANG L G, ZHANG X. Cone metric spaces and fixed point theorems of contractive mappings［J］. J Math Anal Appl, 2007, 332: 1468－1476.

［3］ AL-KHALEEL M, AL-SHARIFA S, KHANDAQJI M. Fixed points for contraction mappings in generalized cone metric spaces［J］. Jordan J Math Stat, 2012, 5(4): 291－307.

［4］ GAJIC L J, RAKOCEVIC V. Quasi-contractions on a nonnormal cone metric space［J］. Funct Anal Appl, 2012, 46(1): 75－79.

［5］ ILIC D, RAKOCEVIC V. Quasi-contraction on a cone metric space［J］. Appl Math Lett, 2009, 22(5): 728－731.

［6］ KADELBURG Z, REDENOVIC S, RAKOCEVIC V. Remarks on "Quasi-contraction on a cone metric space"［J］. Appl Math Lett, 2009, 22(11): 1674－1679.

［7］ KADELBURG Z, PAVLOVIC M, REDENOVIC S. Common Fixed point theorems for ordered contractions and quasi-contractions in ordered cone metric spaces［J］. Comput Math Appl, 2010, 59: 3148－3159.

［8］ LIU H, XU S. Fixed point theorem of quasi-contractions on cone metric spaces with Banach algebras［J］. Abstract and Applied Analysis, 2013, Article ID 187348.

［9］ CAKALL H, SONMEZ A, GENC C. On an equivalence of topological vector space valued cone metric spaces and metric spaces［J］. Appl Math Lett, 2012, 25: 429－433.

［10］ DU W S. A note on cone metric fixed point theory and its equivalence［J］. Nonlinear Analysis, 2010, 72(5): 2259－2261.

［11］ KADELBURG Z, REDENOVIC S, RAKOCEVIC V. A note on the equivalence of some metric and cone metric fixed point results［J］. Appl Math Lett, 2011, 24: 370－374.

［12］ FENG Y, MAO W. The equivalence of cone metric spaces and metric spaces［J］. Fixed Point Theory, 2010, 11(2): 259－264.

［13］ LIU H, XU S. Cone metric spaces with Banach algebras and fixed point theorems of generalized Lipschitz mappings［J］. Fixed Point Theory and Applications, 2013, 2013: 320.

［14］ RUDIN W. Functional analysis［M］. 2nd ed. 北京：机械工业出版社, 2006.

［15］ JANKOVIC S, KADELBURG Z, REDENOVIC S. On the cone metric space: A survey［J］. Nonl Anal, 2011, 74: 2591－2601.

［16］ REDENOVIC S, RHOADES B E. Fixed point theorem for two non-self mappings in cone metric spaces［J］. Comput Math Appl, 2009, 57: 1701－1707.

［17］ KADELBURG Z, REDENOVIC S. A note on various types of cones and fixed point results in cone metric spaces［J］. Asian Journal of Mathematics and Applications, 2013, Article ID: ama 0104.

［18］ DORDEVIC M, DORIC D, KADELBURG Z, et al. Fixed point results under c-distance in tvs-cone metric spaces［J］. Fixed Point Theory Appl, 2011, 2011: 29.

［19］ XU S, REDENOVIC S. Fixed point theorems of generalized Lipschitz mappings on cone metric spaces over Banach algebras without assumption of normality［J］. Fixed Point Theory and Applications, 2014, 2014: 102.