DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2016.03.007

基于生态环境和阶段结构的 SIQR 传染病模型的全局稳定性*

傅金波[1]，陈兰荪[1,2]
（1. 福建师范大学闽南科技学院，福建 泉州 362332；
2. 中国科学院数学与系统科学研究院数学研究所，北京 100080）

摘　要：根据传染病动力学原理建立了一类基于生态环境和阶段结构的 SIQR 传染病模型，将种群分为成年和幼年两个阶段，而且病毒仅在成年种群传播，而成年种群中的易感群体和幼年种群中接近于成年的活跃群体采取控制策略使之隔离于染病区。利用常微分方程定性与稳定性方法，分析了模型有界性和非负平衡点的存在性，通过构造适当的 Lyapunov 函数和极限系统理论，获得了平凡平衡点、无病平衡点和地方病平衡点全局渐近稳定的充分条件。研究结果表明：当基本再生数小于等于 1 时，所有种群趋于灭绝；当基本再生数大于 1 并满足一定条件时，病毒将被清除；当病毒主导再生数大于 1 并满足一定条件时，病毒持续流行并将成为一种地方病。

关键词：SQIR 传染病模型；有界性；非负平衡点；全局渐近稳定性
中图分类号：O175.14　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529－6579（2016）03－0047－05

Global stability in a SQIR epidemic model with ecological environment and stage structure

FU Jinbo[1], *CHEN Lansun*[1,2]
(1. Minnan Science and Technology Institute Fujian Normal University, Quanzhou 362332, China;
2. Academy of Mathematics and Systems Science, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, China)

Abstract: By using epidemic dynamic theory, a class of SQIR epidemic model with ecological environment and stage-structure is established, in which the population is divided into two life stages-mature and immature, and the viruses spread only in adult population, while the susceptible group of adult population and active sub adult group of immature population are insulated from the infected area by adopting control strategy. By means of qualitative method and stability method of ordinary differential equations, the boundedness of the model and the existence of nonnegative equilibrium point are analyzed. By constructing proper Lyapunov function and limit system theory, sufficient conditions of the global asymptotic stability of the trivial equilibrium point, disease-free equilibrium point and endemic equilibrium point are obtained. The results show that: when the basic reproduction number is less than or equal to 1, all populations tend to be extinct; when the basic reproduction number is greater than 1 and satisfy certain conditions, the viruses will be cleared; when the dominant regeneration number of the viruses is greater than 1 and satisfy certain conditions, the viruses continue to prevail and will become a local disease.

Key words: SIQR epidemic model; boundedness; nonnegative equilibrium point; global asymptotic stability

* **收稿日期：**2015－11－19
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11371306）；福建省教育厅自然科学基金资助项目（JA13370，JB13269）；福建师范大学闽南科技学院青年骨干教师重点培养对象资助项目（mkq201006）
作者简介：傅金波（1978 年生），男；**研究方向：**生物数学、微分方程定性理论、动力系统；E-mail：fujinbomnkjxy@sina.com

近年来，许多学者利用数学建模的方法思想，研究了大量的流行性传染病模型[1-7]。在自然生态环境中，制约生物种群增长既有竞争、捕食、寄生、疾病和种内调节等生物因素，也有天气条件、pH 值、污染物等非生物因素，如流行性传染病或者寒潮来临总会导致种群有一定比例的个体死亡。一些流行性传染病还与种群的年龄结构或性别结构有一定关系[8-11]。文献［12］研究了具有阶段结构的传染病模型，但该模型没有考虑非生物因素的影响，也没有考虑幼年种群仍有部分活跃群体易受感染风险。

据此，本文将生态环境中的生物种群分为成年和幼年两个阶段，考虑病毒（如 HIV 和禽流感等）在成年种群中传播以及非生物因素的影响，规避幼年种群中接近于成年者这一活跃群体的感染风险，采取控制策略将成年种群中的易感群体和幼年种群中的活跃群体隔离于染病区，建立基于生态环境和阶段结构的 SIQR 传染病模型如下：

$$\begin{cases} S'_1(t) = \alpha S_2(t) - (d + r + \omega_1)S_1(t) - \\ \qquad \mu_1 S_1^2(t) - \delta_1\int_{-\tau}^{0}K(u)S_1(t+u)\mathrm{d}u, \\ S'_2(t) = rS_1(t) - (d+\omega_2)S_2(t) - \mu_2 S_2^2(t) - \\ \qquad \beta S_2(t)I(t) - \delta_2\int_{-\tau}^{0}K(u)S_2(t+u)\mathrm{d}u, \\ I'(t) = \beta S_2(t)I(t) - (d+\upsilon)I(t) - \mu_3 I^2(t), \\ Q'(t) = \omega_1 S_1(t) + \omega_2 S_2(t) - (d+\eta)Q(t), \\ R'(t) = \eta Q(t) + \upsilon I(t) - dR(t) \end{cases} \tag{1}$$

其中，$S_1(t)$，$S_2(t)$ 分别表示幼年种群和成年易感种群的密度，$I(t)$ 表示染病种群的密度，$Q(t)$ 表示被隔离种群的密度，$R(t)$ 表示恢复种群的密度；α 为出生率，d 为自然死亡率，r 为由幼年种群向成年易感种群的转化率，β 为接触比例常数，$\omega_i(i=1,2)$ 为隔离比例常数，$\mu_i(i=1,2,3)$ 为种内竞争率，$\delta_i(i=1,2)$ 为非生物因素影响的致死率，υ 为染病种群的恢复率，υ^{-1} 为感染周期，$\tau(0<\tau<+\infty)$ 为非生物因素影响的时间间隔，η 为被隔离种群变为恢复种群的比例常数，核函数 $K(u)$ 是一个非负的分段连续函数，且 $\int_{-\tau}^{0}K(u)\mathrm{d}u=1$，所有参数均为正数。

因模型（1）的前三个方程未出现隔离项和恢复项（不考虑病人恢复后具有免疫能力），故只需考虑如下系统：

$$\begin{cases} S'_1(t) = \alpha S_2(t) - (d + r + \omega_1)S_1(t) - \\ \qquad \mu_1 S_1^2(t) - \delta_1\int_{-\tau}^{0}K(u)S_1(t+u)\mathrm{d}u, \\ S'_2(t) = rS_1(t) - (d+\omega_2)S_2(t) - \mu_2 S_2^2(t) \\ \qquad - \beta S_2(t)I(t) - \delta_2\int_{-\tau}^{0}K(u)S_2(t+u)\mathrm{d}u, \\ I'(t) = \beta S_2(t)I(t) - (d+\upsilon)I(t) - \mu_3 I^2(t) \end{cases} \tag{2}$$

易见，当系统（2）的性质清楚之后，模型（1）的性质自然清楚。

由［$-\tau$,0］到

$$\mathbf{R}_+^3 = \{(S_1(t),S_2(t),I(t)) \in \mathbf{R}^3 \mid S_i(t) \geqslant 0, I(t) \geqslant 0, i=1,2\}$$

的连续向量函数的全体记为 $C^+ = C([-\tau,0],\mathbf{R}_+^3)$，由系统（2）的可应用性，本文考虑初始条件为

$$\varphi_i \in C^+, S_1(u) = \varphi_1(u) \geqslant 0, \\ S_2(u) = \varphi_2(u) \geqslant 0, \\ I(u) = \varphi_3(u) \geqslant 0, \\ u \in [-\tau,0], \\ \varphi_i(0) > 0, i=1,2,3 \tag{3}$$

本文主要讨论系统（2）的有界性和非负平衡点存在性及其全局渐近稳定性，并由此推出模型（1）的相应的动力学性质。模型（1）由非线性微分方程构成，这对其分析论证无疑是有一定的难度。据悉，关于模型（1）尚未见有研究结果发表。

1 有界性

定理 1 系统（2）在 $\mathbf{R}_+^3$ 内总是有界的。

证明 令 $W(t) = S_1(t) + S_2(t) + I(t)$，由系统（2）有

$$W'(t) \leqslant -\sigma W(t) + \frac{\alpha^2}{4\mu_2}, \\ \sigma = \min\{d+\omega_1, d+\omega_2, d+\upsilon\}$$

即

$$[W(t)\exp(\sigma t)]' \leqslant \frac{\alpha^2}{4\mu_2}\exp(\sigma t)$$

两边从 0 到 t 积分有

$$W(t) \leqslant \frac{\alpha^2}{4\mu_2\sigma} + \left(W(0) - \frac{\alpha^2}{4\mu_2\sigma}\right)\exp(-\sigma t)$$

因 $\exp(-\sigma t) \to 0 (t \to +\infty)$，故对充分小的 ε，存在 $T>0, M>0$，当 $t \geqslant T$ 时，恒有

$$W(t) \leqslant \frac{\alpha^2}{4\mu_2\sigma} + \varepsilon := M$$

因此，当 $t \geqslant T$ 时，集合

$$\Omega = \{(S_1(t), S_2(t), I(t)) \in \mathbf{R}_+^3 | 0 \leqslant S_1(t) \leqslant M, 0 \leqslant S_2(t) \leqslant M, 0 \leqslant I(t) \leqslant M\} \subset \mathbf{R}_+^3$$

是系统（2）的最终有界区域。证毕。

2　平衡点的存在性

定义基本再生数和病毒主导再生数分别为

$$\mathscr{R}_0 = \frac{r\alpha}{(d + r + \omega_1 + \delta_1)(d + \omega_2 + \delta_2)}$$

病毒主导再生数为

$$\mathscr{R} = \{\beta\mu_1(\mu_2\mu_3 + \beta^2)(d + v)^3 + r\beta^2\mu_3[r\alpha\mu_3 + \beta(d + r + \omega_1 + \delta_1)(d + v)]\} / [B_0(d + v) + r\beta^2\mu_3^2(d + r + \omega_1 + \delta_1)(d + \omega_2 + \delta_2)]$$

其中

$$B_0 = \mu_3(\mu_2\mu_3 + \beta^2) \cdot [2\mu_1(d + v)(d + \omega_2 + \delta_2) + r\beta(d + r + \omega_1 + \delta_1)] + \beta\mu_1[\mu_3(d + \omega_2 + \delta_2) - \beta(d + v)]^2$$

现在讨论系统（2）的非负平衡点的存在性。系统（2）的非负平衡点应满足方程组：

$$\begin{cases} \alpha S_2 - (d + r + \omega_1 + \delta_1)S_1 - \mu_1 S_1^2 = 0, \\ rS_1 - (d + \omega_2 + \delta_2)S_2 - \mu_2 S_2^2 - \beta S_2 I = 0, \\ I(\beta S_2 - d - v - \mu_3 I) = 0 \end{cases} \tag{4}$$

易见，系统（2）存在平凡平衡点 $E_0(0,0,0)$。对于方程组：

$$\begin{cases} \alpha S_2 - (d + r + \omega_1 + \delta_1)S_1 - \mu_1 S_1^2 = 0, \\ rS_1 - (d + \omega_2 + \delta_2)S_2 - \mu_2 S_2^2 = 0 \end{cases} \tag{5}$$

由第 2 个方程得

$$S_1 = \frac{(d + \omega_2 + \delta_2 + \mu_2 S_2)S_2}{r}$$

代入第 1 个方程有

$$a_3 S_2^3 + a_2 S_2^2 + a_1 S_2 + a_0 = 0 \tag{6}$$

其中

$$a_3 = \mu_1\mu_2^2, a_2 = 2\mu_1\mu_2(d + \omega_2 + \delta_2),$$
$$a_1 = r\mu_2(d + r + \omega_1 + \delta_1) + \mu_1(d + \omega_2 + \delta_2)^2,$$
$$a_0 = r[(d + r + \omega_1 + \delta_1)(d + \omega_2 + \delta_2) - r\alpha]$$

令

$$f(S_2) = a_3 S_2^3 + a_2 S_2^2 + a_1 S_2 + a_0,$$
$$f'(S_2) = 3a_3 S_2^2 + 2a_2 S_2 + a_1 > 0,$$

当 $\mathscr{R}_0 > 1$ 时，$f(S_2)$ 在 $S_2 \geqslant 0$ 单调增加，而且 $f(0) = a_0 < 0, f(+\infty) = +\infty$，方程（6）存在唯一正根 S_2^Δ，进而由得 $S_1^\Delta > 0$，故系统（2）存在无病平衡点 $E_\Delta(S_1^\Delta, S_2^\Delta, 0)$。

由方程组（4）的第 2 个方程和第 3 个方程解得

$$S_1 = \frac{\mu_3(d + \omega_2 + \delta_2) + \mu_2\mu_3 S_2 + \beta(\beta S_2 - d - v)}{r\mu_3} S_2,$$

$$I = \frac{\beta S_2 - d - v}{\mu_3}$$

代入第 1 个方程有

$$b_3 S_2^3 + b_2 S_2^2 + b_1 S_2 + b_0 = 0 \tag{7}$$

其中

$$b_3 = \mu_1(\mu_2\mu_3 + \beta^2)^2,$$
$$b_2 = 2\mu_1[\mu_3(d + \omega_2 + \delta_2) - \beta(d + v)](\mu_2\mu_3 + \beta^2),$$
$$b_1 = r\mu_3(d + r + \omega_1 + \delta_1)(\mu_2\mu_3 + \beta^2) + \mu_1[\mu_3(d + \omega_2 + \delta_2) - \beta(d + v)]^2,$$
$$b_0 = r\mu_3[\mu_3(d + r + \omega_1 + \delta_1)(d + \omega_2 + \delta_2) - r\alpha\mu_3 - \beta(d + r + \omega_1 + \delta_1)(d + v)]$$

令 $g(S_2) = b_3 S_2^3 + b_2 S_2^2 + b_1 S_2 + b_0, \beta\bar{S}_2 = d + v$，当 $R > 1$ 时，如果条件（H_1）：

$$\mu_1[\mu_3(d + \omega_2 + \delta_2) - \beta(d + v)]^2 \leqslant 3\mu_3 r(\mu_2\mu_3 + \beta^2)(d + r + \omega_1 + \delta_1)$$

则有 $g'(S_2) = 3b_3 S_2^2 + 2b_2 S_2 + b_1 > 0, g(\bar{S}_2) < 0, g(+\infty) > 0$，进而方程（7）存在唯一正根 S_2^*，且 $S_2^* > \bar{S}_2$，即 $\beta S_2^* - d - v > 0$，这样系统（2）存在地方病平衡点 $E(S_1^*, S_2^*, I^*)$。

综上讨论，有如下结论。

定理 2　系统（2）总存在平凡平衡点 $E_0(0,0,0)$；当 $R_0 > 1$ 时，系统（2）存在无病平衡点 $E_\Delta(S_1^\Delta, S_2^\Delta, 0)$；若 $R > 1$ 且满足（H_1）条件，则系统（2）存在地方病平衡点 $E(S_1^*, S_2^*, I^*)$。

3　平衡点的稳定性

定理 3　当 $R_0 \leqslant 1$ 时，系统（2）的平凡平衡点 $E_0(0,0,0)$ 在域 Ω 内是全局渐近稳定的。

证明　设 $(S_1(t), S_2(t), I(t))$ 是系统（2）满足初始条件（3）的任意正解，构造 Lyapunov 函数：

$$V_0(t) = S_1(t) + \frac{d + r + \omega_1}{r} S_2(t)$$

当 $\mathscr{R}_0 \leqslant 1$ 时，沿着系统（2）的任意解计算 $V_0(t)$ 的右上导数得

$$V'_0(t) \leqslant -\mu_1 S_1^2(t) + \frac{(d + r + \omega_1)(d + \omega_2)}{r}(\mathscr{R}_0 - 1)S_2(t) - \frac{\mu_2(d + r + \omega_1)}{r} S_2^2(t) \leqslant 0$$

可见，使得 $V'_0(t) = 0$ 的最大不变集为 $\{S_1 = 0, S_2 = 0\}$，故平衡位置 $S_1 = 0, S_2 = 0$ 是全局吸引的，

即 $\lim\limits_{t\to+\infty} S_1(t)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} S_2(t)=0$, 由此得极限方程

$$I'(t)=-(d+k+\upsilon)I(t)-\mu_3 I^2(t)\leqslant 0$$

同样，极限方程的平衡位置 $I=0$ 是全局吸引的，即 $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t)=0$。根据极限系统理论[1]，当 $\mathscr{R}_0\leqslant 1$ 时，平凡平衡点 $E_0(0,0,0)$ 在域 Ω 内是全局渐近稳定的。证毕。

推论 1 当 $R_0\leqslant 1$ 时，系统（1）的平凡平衡点 $(0,0,0,0,0)$ 是全局渐近稳定的。

事实上，由定理 3 知 $\lim\limits_{t\to+\infty} S_1(t)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} S_2(t)=0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} I(t)=0$, 则由系统（1）得极限系统：

$$\begin{cases} Q'(t)=-(d+\eta)Q(t), \\ R'(t)=-dR(t) \end{cases}$$

显然，极限系统的平衡位置 $Q=0, R=0$ 是全局吸引的。

定理 4 如果除 $\mathscr{R}_0>1$ 外，还满足条件 (H_2)：

(i) $d+r+\omega_1+2\mu_1 S_1^\Delta>\delta_1$;

(ii) $d+\omega_2+2\mu_2 S_2^\Delta>\delta_2$;

(iii) $(d+r+\omega_1+2\mu_1 S_1^\Delta-\delta_1)(d+\omega_2+2\mu_2 S_2^\Delta-\delta_2)>r\alpha$,

则系统（2）的无病平衡点 $E_\Delta(S_1^\Delta,S_2^\Delta,0)$ 在域 Ω 内是全局渐近稳定的。

证明 将系统（2）改写为如下等价系统：

$$\begin{cases} S'_1(t)=\alpha(S_2(t)-S_2^\Delta)- \\ \qquad (d+r+\omega_1+2\mu_1 S_1^\Delta)(S_1(t)-S_1^\Delta)- \\ \qquad \delta_1\int_{-\tau}^{0}K(u)[S_1(t+u)-S_1^\Delta]\mathrm{d}u- \\ \qquad \mu_1(S_1(t)-S_1^\Delta)^2, \\ S'_2(t)=r(S_1(t)-S_1^\Delta)- \\ \qquad (d+\omega_2+2\mu_2 S_2^\Delta+\beta I(t))(S_2(t)-S_2^\Delta)- \\ \qquad \delta_2\int_{-\tau}^{0}K(u)[S_2(t+u)-S_2^\Delta]\mathrm{d}u- \\ \qquad \mu_2(S_2(t)-S_2^\Delta)^2-\beta S_2^\Delta I(t), \\ I'(t)=\beta I(t)(S_2(t)-S_2^\Delta)+\beta S_2^\Delta I(t)- \\ \qquad (d+\upsilon)I(t)-\mu_3 I^2(t) \end{cases} \tag{8}$$

设 $(S_1(t),S_2(t),I(t))$ 是系统（2）满足初始条件（3）的任意正解，构造 Lyapunov 函数：

$$V_1(t)=\frac{r}{d+r+\omega_1+2\mu_1 S_1^\Delta-\delta_1}\cdot$$
$$[|S_1(t)-S_1^\Delta|+\int_{-\tau}^{0}K(u)\int_{t+u}^{t}|S_1(\theta)-S_1^\Delta|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}u]+$$
$$|S_2(t)-S_2^\Delta|+\int_{-\tau}^{0}K(u)\int_{t+u}^{t}|S_2(\theta)-S_2^\Delta|\mathrm{d}\theta\mathrm{d}u+I(t)$$

沿着系统（2）的任意解计算 $V_1(t)$ 的右上导数得

$$V'_1(t)\leqslant -a\mu_1(S_1(t)-S_1^\Delta)^2-$$
$$\mu_2(S_2(t)-S_2^\Delta)^2-(d+\upsilon)I(t)-\mu_3 I^2(t)-$$
$$\{[(d+\omega_2+2\mu_2 S_2^\Delta-\delta_2)(d+r+\omega_1+$$
$$2\mu_1 S_1^\Delta-\delta_1)-r\alpha]/[(d+r+\omega_1+2\mu_1 S_1^\Delta-\delta_1)]\}\cdot$$
$$|S_2(t)-S_2^\Delta|\leqslant 0$$

因 $V'_1(t)=0$ 的最大不变集为 $\{(S_1^\Delta,S_2^\Delta,0)\}$, 则由 LaSalle 不变集原理[13]可知系统（2）的无病平衡点 $E_\Delta(S_1^\Delta,S_2^\Delta,0)$ 在域 Ω 内是全局渐近稳定的。证毕。

推论 2 当 $R_0>1$ 且条件 (H_2) 成立时，系统（1）的无病平衡点 $(S_1^\Delta,S_2^\Delta,0,Q^\Delta,R^\Delta)$ 是全局渐近稳定的，其中

$$Q^\Delta=\frac{\omega_1 S_1^\Delta+\omega_2 S_2^\Delta}{d+\eta},\ R^\Delta=\frac{\eta Q^\Delta}{d}$$

而 S_1^Δ, S_2^Δ 与平衡点 $E_\Delta(S_1^\Delta,S_2^\Delta,0)$ 相同。

事实上，根据定理 4 可得极限系统：

$$\begin{cases} Q'(t)=-(d+\eta)(Q(t)-Q^\Delta), \\ R'(t)=-d(R(t)-R^\Delta) \end{cases}$$

易于证明极限系统的平衡位置 $Q=Q^\Delta, R=R^\Delta$ 是全局吸引的，故结论为真。

定理 5 如果除 $\mathscr{R}>1$ 和条件 (H_1) 外，还满足条件 (H_3)：

(i) $d+\omega_1+2\mu_1 S_1^*>\delta_1$;

(ii) $d+\omega_2+2\mu_2 S_2^*>\alpha+\delta_2$;

(iii) $\mu_3 I^*(d+\omega_2+2\mu_2 S_2^*-\alpha-\delta_2)\geqslant\beta M(d+\upsilon)$

则系统（2）的地方病平衡点 $E(S_1^*,S_2^*,I^*)$ 在域 Ω 内是全局渐近稳定的。

证明 将系统（2）改写为如下等价系统：

$$\begin{cases} S'_1(t)=\alpha(S_2(t)-S_2^*)- \\ \qquad (d+r+\omega_1+2\mu_1 S_1^*)(S_1(t)-S_1^*)- \\ \qquad \delta_1\int_{-\tau}^{0}K(u)[S_1(t+u)-S_1^*]\mathrm{d}u- \\ \qquad \mu_1(S_1(t)-S_1^*)^2, \\ S'_2(t)=r(S_1(t)-S_1^*)- \\ \qquad (d+\omega_2+2\mu_2 S_2^*+\beta I(t))(S_2(t)-S_2^*)- \\ \qquad \delta_2\int_{-\tau}^{0}K(u)[S_2(t+u)-S_2^*]\mathrm{d}u- \\ \qquad \mu_2(S_2(t)-S_2^*)^2-\beta S_2^*(I(t)-I^*), \\ I'(t)=\beta I(t)(S_2(t)-S_2^*)-\mu_3(I(t)-I^*)^2- \\ \qquad \mu_3 I^*(I(t)-I^*) \end{cases} \tag{9}$$

设 $(S_1(t),S_2(t),I(t))$ 是系统（2）满足初始条件

(3) 的任意正解，构造 Lyapunov 函数：

$$V_2(t)=|S_1(t)-S_1^*|+\int_{-\tau}^{0}K(u)\int_{t+u}^{t}|S_1(\theta)-S_1^*|\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}u+|S_2(t)-S_2^*|+\int_{-\tau}^{0}K(u)\int_{t+u}^{t}|S_2(\theta)-S_2^*|\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}u+\frac{\beta S_2^*}{\mu_3 I^*}|I(t)-I^*|$$

沿着系统 (9) 的任意解计算 $V_2(t)$ 的右上导数得

$$V'_2(t)\leqslant-\mu_1(S_1(t)-S_1^*)^2-(d+\omega_1+2\mu_1S_1^*-\delta_1)|S_1(t)-S_1^*|-\mu_2(S_2(t)-S_2^*)^2-\frac{\mu_3I^*(d+\omega_2+2\mu_2S_2^*-\alpha-\delta_2)-\beta M(d+\upsilon)}{\mu_3I^*}\cdot|S_2(t)-S_2^*|-\frac{\beta S_2^*}{I^*}(I(t)-I^*)^2\leqslant 0$$

由 $V'_2(t)=0$ 的最大不变集为 $\{(S_1^*,S_2^*,I^*)\}$ 和 LaSalle不变集原理[13]，可知系统 (2) 的地方病平衡点 $E(S_1^*,S_2^*,I^*)$ 在域 Ω 内是全局渐近稳定的。证毕。

利用定理 5 和极限系统理论类似地有如下推论：

推论 3　当 $R>1$ 且 (H_1), (H_3) 成立时，系统 (1) 的地方病平衡点 $(S_1^*,S_2^*,I^*,Q^*,R^*)$ 是全局渐近稳定的，其中

$$Q^*=\frac{\omega_1S_1^*+\omega_2S_2^*}{d+\eta},$$

$$R^*=\frac{\eta Q^*+\upsilon I^*}{d}$$

而 S_1^*,S_2^*,I^* 与平衡点 $E(S_1^*,S_2^*,I^*)$ 相同。

4　结　论

$$R_0=\frac{r\alpha}{(d+r+\omega_1+\delta_1)(d+\omega_2+\delta_2)}$$

α 为出生率，d 为自然死亡率，r 为由幼年种群向成年易感种群的转化率，β 为接触比例常数。

综上讨论，当 $\mathscr{R}_0\leqslant 1$ 时，即出生率和由幼年种群向成年易感种群的转化率小于等于种内消耗率，系统中的生物种群和病毒将同时趋于灭绝；当 $\mathscr{R}_0>1$ 且满足条件 (H_2) 时，系统中的病毒将被清除，幼年种群、成年种群、被隔离种群和恢复种群均持续生存并将稳定在一组定值上；当 $\mathscr{R}_0>1$ 且满足条件 (H_1) 和 (H_3) 时，即出生率和由幼年种群向成年易感种群的转化率小于等于种内消耗率且满足条件 (H_1) 和 (H_3) 时，系统中的生物种群和病毒持续共存并将稳定在一组定值上，流行性传染病将成为一种地方病. 由此可见，当非生物因素影响的致死率过高时，将会破坏该系统的稳定性。因此，在预防控制流行性传染病中既要施以隔离策略，还要重视非生物因素的影响。

参考文献:

[1] 马知恩, 周义仓. 传染病动力学的数学建模与研究[M]. 北京:科学出版社, 2004.

[2] LI J Q, ZHANG J, MA Z E. Global analysis of some epidemic models with general contact rate and constant immigration [J]. Applied Math Mech, 2004, 4: 396 – 404.

[3] NAOKI Yoshida, TADAYUKI Hara. Global stability of a delayed SIR epidemic model with density dependent birth and death rates [J]. Computational and Applied Mathematics, 2007, 201: 339 – 347.

[4] 赵文才,刘雨林. 一类非线性脉冲免疫接种 SIR 传染病模型的周期解与分支[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2015, 54(1): 13 – 18.

[5] 丛百利,冯兆永,卫雪梅. 一个免疫细胞抑制肿瘤免疫逃逸模型整体解的存在唯一性[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2015, 54(3): 36 – 43.

[6] 杨俊仙,闫萍. 一类具饱和发生率的时滞 SEIR 传染病模型的分析[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2015, 54(3): 51 – 55.

[7] 陈兰荪,王东达,杨启昌. 阶段结构种群动力学模型[J]. 北华大学学报(自然科学版), 2000, 1(3): 185 – 191.

[8] 程晓云,胡志兴. 一类具有非线性传染率的阶段结构传染病模型[J]. 数学的实践与认识,2009, 39(7): 118 – 123.

[9] 宫兆刚,蔡江涛,阳志峰. 具有时滞和阶段结构的 SIS 传染病模型的稳定性[J]. 衡阳师范学院学报,2011, 32(3): 10 – 16.

[10] 曹瑾. 具脉冲两阶段结构的自治 SIS 传染病模型[J]. 大学数学,2011, 27(5): 62 – 68.

[11] 阳超,吴炎辉,李学鹏. 一类具有阶段结构的传染病模型的全局分析[J]. 生物数学学报,2013, 28(1): 123 – 129.

[12] 桂占吉. 生物动力学模型与计算机仿真[M]. 北京:科学出版社,2005.

[13] 马知恩,周义仓. 常微分方程定性与稳定性方法[M]. 北京:科学出版社, 2001.