

一类具时滞与饱和发生率的 HIV - 1 传染病模型的全局稳定性*

杨俊仙, 吴元翠, 闫萍
(安徽农业大学理学院, 安徽 合肥 230036)

摘要: 提出了一类具时滞与饱和发生率的 HIV - 1 传染病模型, 分析讨论了无病平衡点 $E_0(T_0, 0, 0)$ 和正平衡点 $E_+(T^*, I^*, V^*)$ 的全局稳定性。通过构造 Lyapunov 函数和 LaSalle 不变集原理, 证明了当 $d\mu > s\gamma\beta$, 对任意 $\tau \geq 0$, 无病平衡点 $E_0(T_0, 0, 0)$ 是全局渐近稳定的; 当 $d\mu < s\gamma\beta$, 对任意 $\tau \geq 0$, $E_+(T^*, I^*, V^*)$ 是全局渐近稳定的, 并通过数值模拟验证了所得结论。

关键词: 时滞; 饱和发生率; HIV - 1 传染病模型; 全局稳定性; Lyapunov 函数

中图分类号: O175.13 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529 - 6579 (2016) 04 - 0026 - 05

Global stability of a HIV - 1 epidemic model with time delay and saturation incidence rate

YANG Junxian, WU Yuancui, YAN Ping

(School of Science, Anhui Agricultural University, Hefei 230036, China)

Abstract: A HIV - 1 epidemic model with time delay and saturation incidence rate is proposed. The global stabilities of a disease-free equilibrium $E_0(T_0, 0, 0)$ and a positive equilibrium $E_+(T^*, I^*, V^*)$ are discussed. By constructing Lyapunov functions and LaSalle's invariant principle, it is shown that if $d\mu > s\gamma\beta$, the disease-free equilibrium $E_0(T_0, 0, 0)$ is globally asymptotically stable, and if $d\mu < s\gamma\beta$, the positive equilibrium $E_+(T^*, I^*, V^*)$ is globally asymptotically stable, for all $\tau \geq 0$. Numerical simulations are carried out to illustrate the theoretical results.

Key words: time delay; saturation incidence rate; HIV - 1 epidemic model; global stability; Lyapunov functions

艾滋病 (AIDS) 是人体免疫机能遭到艾滋病病毒的破坏, 病人患上感染性疾病、恶性肿瘤等。它的病原体是人类免疫缺陷病毒 (Human Immunodeficiency Virus, 简称 HIV), HIV 是一种攻击人体免疫系统细胞的慢性病毒, 生存于人的血液之中。CD4⁺T 细胞是免疫细胞最丰富的白细胞, 是 HIV 感染的主要目标, 这些细胞感染后结构受到破坏, 减低了人体抵御感染的能力。因此, 掌握病毒和

CD4⁺T 细胞的变化规律是很重要的^[1]。HIV 分为两种类型: HIV - 1 型和 HIV - 2 型。HIV - 2 仅局限于非洲的西部, 且毒力不强, 引起的艾滋病病程较长, 症状较轻。目前在世界范围内引起艾滋病病毒的是 HIV - 1, 因为它的毒性较强, 所以当前对 HIV 的临床研究主要是以 HIV - 1 为主。由于艾滋病感染人数在全球剧增, 引起了各国科学家的广泛关注。医药学、生物学和数学等各方面工作者对该

* 收稿日期: 2016 - 01 - 11

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11201002); 安徽省教育厅资助项目 (KJ2011Z130)

作者简介: 杨俊仙 (1976 年生), 女; 研究方向: 微分方程、生物数学; 通讯作者: 吴元翠; E-mail: wuyuancui@ahau.edu.cn

病的治疗和预防都已经做了相应的研究，其中通过数学模型研究 HIV - 1 传染病的动力学行为是一种有效的方法。对于 HIV - 1 感染的研究，最初的模型由 Perelson^[2] 提出，数学模型为：

$$\begin{cases} T'(t) = s - \mu T(t) - \beta T(t)V(t), \\ I'(t) = \beta T(t)V(t) - \alpha I(t), \\ V'(t) = \alpha \gamma I(t) - dV(t) \end{cases} \quad (1)$$

其中 $T(t), I(t), V(t)$ 分别表示易感染 CD4⁺ T 细胞、被感染 CD4⁺ T 细胞、HIV - 1 病毒的浓度。常数 s 表示易感染细胞的生长率 ($s > 0$)， β 表示病毒与 T 细胞结合后转化成感染 T 细胞的比率 ($\beta \geq 0$)， μ, α, d 分别表示易感染细胞、被感染细胞、HIV - 1 病毒的死亡率 ($\mu > 0, \alpha > 0, d > 0$)， γ 表示被感染细胞释放的病毒数 ($\gamma > 0$)。该模型能较好的反应病毒与 T 细胞之间的相互作用。由于该模型考虑的是双线性发生率 $\beta T(t)V(t)$ ，即被感染细胞的数量是按线性增长的，然而实验证明结果并不完全如此，文 [3] 指出，其增长形状通常呈现 S 型，在文 [4] 中，进一步提出具有一般饱和和发生率 $\frac{\beta T(t)V^p(t)}{1 + \alpha V^q(t)}$ 的传染病模型。这些模型都是假设细胞被病毒感染后立即就能产生病毒，后来很多学者考虑到从细胞被病毒感染到病毒颗粒的产生是有潜伏期的。Herz 等首次在 HIV 传染病模型中加入了一个离散的时滞^[5]。此后，学者们就在病毒感染动力学中加入时滞得到一系列的时滞微分方程模型^[6-12]。其中文 [10] 讨论了一类具有时滞与饱和发生率的 HIV - 1 传染病模型：

$$\begin{cases} T'(t) = s - \mu T(t) - \frac{\beta T(t)V(t)}{1 + V(t)}, \\ I'(t) = \frac{\beta T(t - \tau)V(t - \tau)}{1 + V(t - \tau)} - \alpha I(t), \\ V'(t) = \alpha \gamma I(t) - dV(t) \end{cases} \quad (2)$$

变量 $T(t), I(t), V(t)$ 和参数 $s, \beta, \mu, \alpha, d, \gamma$ 的生物意义同系统 (1)， τ 是时滞 ($\tau > 0$)。

在文 [10] 中，讨论了系统 (2) 的无病平衡点 E_0 和正平衡点 E_+ 的局部渐近稳定性以及无病平衡点 E_0 的全局渐近稳定性，但并没有给出正平衡点 E_+ 的全局稳定性分析。本文旨在文 [10] 的基础上，通过构造 Lyapunov 函数和利用 LaSalle 不变集原理，得到正平衡点 E_+ 的全局渐近稳定性。

系统 (2) 满足初始条件：

$$\begin{cases} T(\theta) = \varphi_1(\theta), I(\theta) = \varphi_2(\theta), \\ V(\theta) = \varphi_3(\theta) (-\tau \leq \theta \leq 0), \\ \varphi_i(\theta) \geq 0, \varphi_i(0) > 0 (i = 1, 2, 3) \end{cases} \quad (3)$$

其中 $(\varphi_1(\theta), \varphi_2(\theta), \varphi_3(\theta)) \in C([- \tau, 0], \mathbf{R}_{+0}^3)$ ，表示从区间 $[- \tau, 0]$ 到 \mathbf{R}_{+0}^3 且具上确界范数的 Banach 空间的连续泛函， $\mathbf{R}_{+0}^3 = \{(x_1, x_2, x_3) : x_i \geq 0\}$ 。

由泛函微分方程的基本理论知识^[11]可知，系统 (2) 存在唯一满足初始条件 (3) 的解 $(T(t), I(t), V(t))$ ，且对任意 $t \geq 0$ ，都有 $T(t) > 0, I(t) > 0, V(t) > 0$ 。

1 平衡点的存在性^[10]

显然，系统 (2) 总有一个无病平衡点 $E_0(T_0, 0, 0)$ ，其中 $T_0 = \frac{s}{\mu}$ 。

当 $d\mu < s\gamma\beta$ ，即 $\frac{d}{\gamma\beta} < T_0 = \frac{s}{\mu}$ 时，系统 (2) 存在正平衡点 $E_+(T^*, I^*, V^*)$ ，其中

$$\begin{cases} T^* = \frac{s\gamma + d}{\gamma(\beta + \mu)}, \\ I^* = \frac{s\gamma\beta - d\mu}{\alpha\gamma(\beta + \mu)}, \\ V^* = \frac{s\gamma\beta - d\mu}{d(\beta + \mu)} \end{cases}$$

2 无病平衡点 $E_0(T_0, 0, 0)$ 和正平衡点 $E_+(T^*, I^*, V^*)$ 的局部稳定性^[10]

定理 1 当 $d\mu > s\gamma\beta$ ，对任意 $\tau \geq 0$ ，无病平衡点 $E_0(T_0, 0, 0)$ 是局部渐近稳定的；当 $d\mu < s\gamma\beta$ ，对任意 $\tau \geq 0$ ，无病平衡点 $E_0(T_0, 0, 0)$ 是不稳定的。

定理 2 当 $d\mu < s\gamma\beta$ ，对任意 $\tau \geq 0$ ，正平衡点 $E_+(T^*, I^*, V^*)$ 是局部渐近稳定的。

3 无病平衡点 $E_0(T_0, 0, 0)$ 和正平衡点 $E_+(T^*, I^*, V^*)$ 的全局渐近稳定性

定理 3 当 $d\mu > s\gamma\beta$ ，对任意 $\tau \geq 0$ ，无病平衡点 $E_0(T_0, 0, 0)$ 是全局渐近稳定的^[10]。

定义函数

$F: \mathbf{R}(> 0) \rightarrow \mathbf{R}(\geq 0)$ ， $F(z) = z - 1 - \ln z$
易知，对 $\forall z > 0$ ， $F(z) \geq 0$ ，且有 $F_{\min} = F(1) = 0$ 。

定理 4 当 $d\mu < s\gamma\beta$ ，对任意 $\tau \geq 0$ ， $E_+(T^*, I^*, V^*)$ 全局渐近稳定。

证明 令 $(T(t), I(t), V(t))$ 是系统 (2) 满足初始条件 (3) 的任意正解。定义 Lyapunov 函数：

$$W_1 = T^* F\left(\frac{T}{T^*}\right) + F\left(\frac{I}{I^*}\right) + \frac{1}{\gamma} F\left(\frac{V}{V^*}\right)$$

计算函数 W_1 沿系统 (2) 的全导数:

$$\begin{aligned} \frac{dW_1}{dt} &= T^* F\left(\frac{T}{T^*}\right) + I^* F\left(\frac{I}{I^*}\right) + \frac{1}{\gamma} V^* F\left(\frac{V}{V^*}\right) = \\ &\left(1 - \frac{T^*}{T}\right) T' + \left(1 - \frac{I^*}{I}\right) I' + \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) V' = \\ &\left(1 - \frac{T^*}{T}\right) \left(s - \mu T(t) - \frac{\beta T(t)V(t)}{1+V(t)}\right) + \\ &\left(1 - \frac{I^*}{I}\right) \left(\frac{\beta T(t-\tau)V(t-\tau)}{1+V(t-\tau)} - \alpha I(t)\right) + \\ &\frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{V^*}{V}\right) (\alpha \gamma I(t) - dV(t)) \quad (4) \end{aligned}$$

将 $s = \mu T^* + \frac{\beta T^* V^*}{1+V^*}$ 代入 (4) 式得

$$\begin{aligned} \frac{dW_1}{dt} &= \left(1 - \frac{T^*}{T(t)}\right) \cdot \\ &\left(-\mu(T(t) - T^*) - \frac{\beta T(t)V(t)}{1+V(t)} + \frac{\beta T^* V^*}{1+V^*}\right) + \\ &\left(1 - \frac{I^*}{I(t)}\right) \left(\frac{\beta T(t-\tau)V(t-\tau)}{1+V(t-\tau)} - \alpha I(t)\right) + \\ &\frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{V^*}{V(t)}\right) (\alpha \gamma I(t) - dV(t)) = \\ &-\frac{\mu}{T(t)} (T(t) - T^*)^2 - \frac{\beta T(t)V(t)}{1+V(t)} + \frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} + \\ &\frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} \left(1 - \frac{T^*}{T(t)}\right) + \frac{\beta T(t-\tau)V(t-\tau)}{1+V(t-\tau)} - \\ &\frac{I^* \beta T(t-\tau)V(t-\tau)}{I(t)(1+V(t-\tau))} + \alpha I^* + \\ &\frac{1}{\gamma} \left(-dV(t) - \alpha \gamma V^* \frac{I(t)}{V(t)} + dV^*\right) \quad (5) \end{aligned}$$

注意到 $\frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} = \alpha I^*$, $\alpha \gamma I^* = dV^*$, 于是

$$\frac{d}{\gamma} = \frac{\alpha I^*}{V^*} = \frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} \cdot \frac{1}{V^*}$$

则 (5) 式为

$$\begin{aligned} \frac{dW_1}{dt} &= -\frac{\mu}{T(t)} (T(t) - T^*)^2 - \frac{\beta T(t)V(t)}{1+V(t)} + \\ &\frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} + \frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} \left(1 - \frac{T^*}{T(t)}\right) + \\ &\frac{\beta T(t-\tau)V(t-\tau)}{1+V(t-\tau)} - \frac{\beta T^* V^* I^* (1+V^*)}{1+V^* T^* V^*} \cdot \\ &\frac{T(t-\tau)V(t-\tau)}{I(t)(1+V(t-\tau))} - \frac{\beta T^* V^* \cdot V(t)}{1+V^* V^*} - \\ &\frac{\beta T^* V^* \cdot V^* \cdot I(t)}{1+V^* I^* V(t)} + 2 \frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} \end{aligned}$$

定义

$$\begin{aligned} W_2 &= W_1 + \beta \int_{t-\tau}^t \left(\frac{T(\xi)V(\xi)}{1+V(\xi)} - \frac{T^* V^*}{1+V^*} - \right. \\ &\left. \frac{T^* V^*}{1+V^*} \ln \frac{(1+V^*)T(\xi)V(\xi)}{T^* V^* (1+V(\xi))}\right) d\xi \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{dW_2}{dt} &= \frac{dW_1}{dt} + \frac{\beta T(t)V(t)}{1+V(t)} - \frac{\beta T(t-\tau)V(t-\tau)}{1+V(t-\tau)} + \\ &\frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} \cdot \ln \frac{(1+V(t))T(t-\tau)V(t-\tau)}{(1+V(t-\tau))T(t)V(t)} = \\ &-\frac{\mu}{T(t)} (T(t) - T^*)^2 + \frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} + \\ &\frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} \left(1 - \frac{T^*}{T(t)}\right) - \frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} \cdot \\ &\frac{I^* (1+V^*)}{T^* V^*} \frac{T(t-\tau)V(t-\tau)}{I(t)(1+V(t-\tau))} - \\ &\frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} \cdot \frac{V(t)}{V^*} - \frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} \cdot \frac{V^*}{I^*} \cdot \frac{I(t)}{V(t)} + 2 \frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} + \\ &\frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} \cdot \ln \frac{(1+V(t))T(t-\tau)V(t-\tau)}{(1+V(t-\tau))T(t)V(t)} = \\ &-\frac{\mu}{T(t)} (T(t) - T^*)^2 - \\ &\frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} \left(\frac{T^*}{T(t)} - 1 - \ln \frac{T^*}{T(t)}\right) - \\ &\frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} \left(\frac{I^* (1+V^*)T(t-\tau)V(t-\tau)}{T^* V^* I(t)(1+V(t-\tau))} - \right. \\ &\left. 1 - \ln \frac{I^* (1+V^*)T(t-\tau)V(t-\tau)}{T^* V^* I(t)(1+V(t-\tau))}\right) - \\ &\frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} \left(\frac{V^* I(t)}{I^* V(t)} - 1 - \ln \frac{V^* I(t)}{I^* V(t)}\right) - \\ &\frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} \left(\frac{1+V(t)}{1+V^*} - 1 - \ln \frac{1+V(t)}{1+V^*}\right) + \frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} - \\ &\frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} \cdot \frac{V(t)}{V^*} + \frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} \left(\frac{1+V(t)}{1+V^*} - 1\right) \end{aligned}$$

由于

$$\frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} - \frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} \cdot \frac{V(t)}{V^*} +$$

$$\frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} \left(\frac{1+V(t)}{1+V^*} - 1\right) =$$

$$\begin{aligned} &-\frac{\beta T^* V^* (V(t) - V^*)}{(1+V(t))(1+V^*)} + \frac{\beta T^* V^* (V(t) - V^*)}{(1+V^*)^2} = \\ &\frac{-\beta T^* (V(t) - V^*)^2}{(1+V(t))(1+V^*)^2} \end{aligned}$$

因此

$$\frac{dW_2}{dt} = -\frac{\mu}{T(t)} (T(t) - T^*)^2 -$$

$$\frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} \left(\frac{T^*}{T(t)} - 1 - \ln \frac{T^*}{T(t)}\right) -$$

$$\frac{\beta T^* V^*}{1+V^*} \left(\frac{I^* (1+V^*)T(t-\tau)V(t-\tau)}{T^* V^* I(t)(1+V(t-\tau))} -$$

$$1 - \ln \frac{I^* (1+V^*)T(t-\tau)V(t-\tau)}{T^* V^* I(t)(1+V(t-\tau))}\right) -$$

$$\frac{\beta T^* V^*}{1 + V^*} \left(\frac{V^* I(t)}{I^* V(t)} - 1 - \ln \frac{V^* I(t)}{I^* V(t)} \right) -$$

$$\frac{\beta T^* V^*}{1 + V^*} \left(\frac{1 + V(t)}{1 + V^*} - 1 - \ln \frac{1 + V(t)}{1 + V^*} \right) -$$

$$\frac{\beta T^* (V(t) - V^*)^2}{(1 + V(t))(1 + V^*)^2}$$

注意到 $T^*, I^*, V^* > 0$, 因此 $\frac{dW_2}{dt} \leq 0$ 。容易看出,

$\frac{dW_2}{dt} = 0$ 的最大正向不变集为

$$M = \{ (T^*, I^*, V^*) \}$$

故由 LaSalle 不变集原理知, 正平衡点

$$E_+ (T^*, I^*, V^*)$$

在 $\mathbf{R}_{+0}^3 = \{ (x_1, x_2, x_3) : x_i \geq 0 \}$ 上全局渐近稳定。

4 数值模拟

在系统 (2) 中, 令参数 $s = 5, \mu = 0.01, \beta = 0.0002, \alpha = 0.5, \gamma = 2400, d = 5, \tau = 4$, 显然 $d\mu < s\gamma\beta$, 此时系统 (2) 有一个正平衡点 $E_+ (490, 96, 46)$, 根据定理 4 可知, E_+ 是全局渐近稳定的, 数值模拟结果验证了上述结论 (见图 1)。

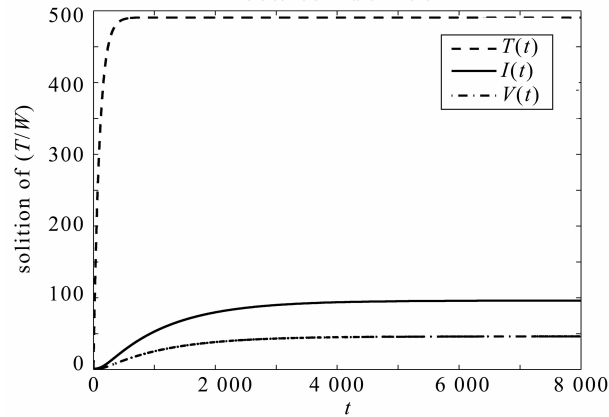


图 1 当 $d\mu < s\gamma\beta$ 时,

正平衡点 $E_+ (T^*, I^*, V^*)$ 是全局渐近稳定的

Fig. 1 If $d\mu < s\gamma\beta$, the positive equilibrium

$E_+ (T^*, I^*, V^*)$ is globally asymptotically stable

令参数 $s = 5, \mu = 1, \beta = 0.0002, \alpha = 0.5, \gamma = 2400, d = 5, \tau = 4$, 显然 $d\mu > s\gamma\beta$, 由定理 3 知, 此时系统 (2) 的无病平衡点 $E_0(T_0, 0, 0)$ 是全局渐近稳定的, 其中 $T_0 = \frac{s}{\mu} = 5$, 数值模拟结果验证了所得结论 (见图 2)。

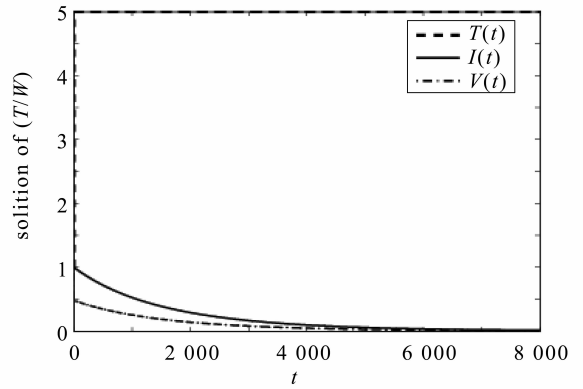


图 2 当 $d\mu > s\gamma\beta$ 时, 无病平衡点

$E_0(T_0, 0, 0)$ 是全局渐近稳定的

Fig. 2 If $d\mu > s\gamma\beta$, the disease-free equilibrium

$E_0(T_0, 0, 0)$ is globally asymptotically stable

5 讨论

本文研究了一类具时滞与饱和发生率的 HIV - 1 传染病模型, 讨论了系统 (2) 的无病平衡点 $E_0(T_0, 0, 0)$ 和正平衡点 $E_+ (T^*, I^*, V^*)$ 的局部渐近稳定性和全局稳定性。证明了当 $d\mu > s\gamma\beta$, 对任意 $\tau \geq 0$, 无病平衡点 $E_0(T_0, 0, 0)$ 是全局渐近稳定的^[10]; 当 $d\mu < s\gamma\beta$, 对任意 $\tau \geq 0$, $E_+ (T^*, I^*, V^*)$ 全局渐近稳定, 即时滞 τ 不会影响 E_0 和 E_+ 的全局稳定性, 数值模拟也证明了这一结论。

参考文献:

[1] 马知恩, 周义仓, 王稳地, 等. 传染病动力学的数学建模与研究 [M]. 北京: 科学出版社, 2004: 259 - 268.

[2] PERELSON A, NELSON P. Mathematical models of HIV dynamics in vivo [J]. SIAM Review, 1999, 41(1): 3 - 44.

[3] REGOES R R, EBERT D, BONHOEFFER S. Dose-dependent infection rates of parasites produce the Allee effect in epidemiology [J]. Proceedings of the Royal Society, 2002, 269(1488): 271 - 279.

[4] SONG X Y, NEUMANN A U. Global stability and periodic solution of the viral dynamics [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 329(1): 281 - 297.

[5] HERZ ANDERSON V M, BONHOEFFER S, ANDERSON R M, et al. Viral dynamics in vivo: Limitations on estimations on intracellular delay and virus delay [J]. Proceedings of the National Academy of Sciences, 1996, 93(14): 7247 - 7251.

- Vision, 2011, 41(1/2): 39 – 58.
- [15] FLEURET F, BERCLAZ J, LENGAGNE R, et al. Multicamera people tracking with a probabilistic occupancy map[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2008, 30(2): 267 – 282.
- [16] KHAN S M, SHAH M. Tracking multiple occluding people by localizing on multiple scene planes[J]. IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 2009, 31(3): 505 – 519.
- [17] 姜明新, 王洪玉, 刘晓凯. 基于多相机的多目标跟踪算法 [J]. 自动化学报, 2012, 38(4): 531 – 539.
- [18] ESHEL R, MOSES Y. Tracking in a dense crowd using multiple cameras[J]. International Journal of Computer Vision, 2010, 88(1): 129 – 143.
- [19] PENG P, TIAN Y, WANG Y, et al. Robust multiple cameras pedestrian detection with multi-view Bayesian network[J]. Pattern Recognition, 2015, 48(5): 1760 – 1772.
- [20] CRIMINISI A. Single-view metrology [M]//Accurate Visual Metrology from Single and Multiple Uncalibrated Images. London: Springer, 2001: 69 – 105.
- [21] STAUFFER C, GRIMSON W E L. Adaptive background mixture models for real-time tracking[C]//Proceedings of the IEEE Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition, 1999.
- [22] SUZUKI S. Topological structural analysis of digitized binary images by border following [J]. Computer Vision, Graphics, and Image Processing, 1985, 30(1): 32 – 46
- [23] DOUGLAS D H, PEUCKER T K. Algorithms for the reduction of the number of points required to represent a digitized line or its caricature[J]. Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization, 1973, 10(2): 112 – 122.
- [24] REN J, ORWELL J, JONES G, et al. Tracking the soccer ball using multiple fixed cameras [J]. Computer Vision and Image Understanding, 2009, 113(5): 633 – 642.
- [25] REN J, ORWELL J, JONES G, et al. Real-time modeling of 3 – d soccer ball trajectories from multiple fixed cameras [J]. IEEE, 2008, 18(3): 350 – 362.
- [26] REN J, XU M, ORWELL J, et al. Multi-camera video surveillance for real-time analysis and reconstruction of soccer games [J]. Machine Vision and Applications, 2010, 21(6): 855 – 863.

(上接第 29 页)

- [6] 杨俊仙, 闫萍. 一类具饱和发生率的时滞 SEIR 传染病模型的分析 [J]. 中山大学学报 (自然科学版), 2015, 54(3): 51 – 55.
- [7] BAIRAGI N, ADAK D. Global analysis of HIV-1 dynamics with Hill type infection rate and intracellular delay [J]. Applied Mathematical Modelling, 2014, 38(21/22): 5047 – 5066.
- [8] URSZULA F, JAN P. A delay-differential equation model of HIV related cancer-immune system dynamics [J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2011, 8(2): 627 – 641.
- [9] LI B, CHEN Y M, LU X J, et al. A delayed HIV – 1 model with virus waning term [J]. Mathematical Biosciences and Engineering, 2016, 13(1): 135 – 157.
- [10] LI D, MA W. Asymptotic properties of a HIV – 1 infection model with time delay [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2007, 335(1): 683 – 691.
- [11] XU R. Global stability of an HIV – 1 infection model with saturation infection and intracellular delay [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 375(1): 75 – 81.
- [12] 杨若晨, 马明菊, 齐逸飞, 等. 含潜伏时滞效应和非线性发生率的 SEIR 模型的长时间行为 [J]. 中山大学学报 (自然科学版), 2015, 54(1): 24 – 29, 36.
- [13] HALE J K, VERDUYN LUNRL S M. Introduction to functional differential equations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1993: 130 – 166.