DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2016.04.009

Birkhoff 系统的 Noether-Mei 对称性与守恒量*

王雪萍[1]，张 毅[2]
（1. 苏州科技大学数理学院，江苏 苏州 215009；
2. 苏州科技大学土木工程学院，江苏 苏州 215011）

摘 要：研究 Birkhoff 系统 Noether-Mei 对称性与守恒量。给出 Birkhoff 系统 Noether-Mei 对称性的定义和判据，研究了 Birkhoff 系统的 Noether-Mei 对称性导致的 Noether 守恒量和 Mei 守恒量的条件及其形式，建立了两个 Noether-Mei 对称性定理，并举例说明结果的应用。

关键词：Birkhoff 系统；Noether-Mei 对称性；Noether 守恒量；Mei 守恒量

中图分类号：O316 **文献标志码：**A **文章编号：**0529-6579（2016）04-0053-03

Noether-Mei symmetry and conserved quantity of Birkhoffian system

WANG Xueping[1], *ZHANG Yi*[2]
（1. College of Mathematics and Physics, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215009, China;
2. College of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou 215011, China）

Abstract: The Noether-Mei symmetry and the conserved quantity of a Birkhoffian system are studied. The definition and the criteria of the Noether-Mei symmetry of the system are given. The conditions that the Noether-Mei symmetry leads to the Noether conserved quantity or the Mei conserved quantity and the form of the conserved quantities are obtained. Two theorems for the Noether-Mei symmetry and the conserved quantity are established. At the end, an example is given to illustrate the application of the results.

Key words: Birkhoffian system; Noether-Mei symmetry; Noether conserved quantity; Mei conserved quantity

动力学系统的对称性与守恒量的研究具有重要意义，在现代数学、力学、物理学中占有重要的地位，也是分析力学的一个近代发展方向。对称性主要有：Noether 对称性，Lie 对称性和 Mei 对称性[1-5]。随着研究的深入，人们对两种以上的对称性进行综合研究，并已取得一些成果[6-13]。本文将研究 Birkhoff 系统 Noether-Mei 对称性与守恒量，给出系统 Noether-Mei 对称性定义和判据，研究 Noether-Mei 对称性与 Noether 守恒量和 Mei 守恒量之间的关系，建立了两个 Noether-Mei 对称性定理，并给出算例以说明结果的应用。

1 Birkhoff 系统的 Noether-Mei 对称性

Birkhoff 系统的运动微分方程为[1]

* **收稿日期：**2015-10-17
基金项目：国家自然科学基金资助项目（11272227，11572212）；苏州科技大学研究生科研创新计划资助项目（SKCX15_062）
作者简介：王雪萍（1989 年生），女；**研究方向：**力学中的数学方法；**通讯作者：**张毅；E-mail：zhy@mail.usts.edu.cn

$$\Omega_{\mu\nu}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}=0\quad(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n)\tag{1}$$

其中 $R_{\mu}=R_{\mu}(t,a)$ 为 Birkhoff 函数组，$B=B(t,a)$ 为 Birkhoff 函数，且

$$\Omega_{\mu\nu}=\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}-\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\tag{2}$$

称为 Birkhoff 系统的张量。设系统非奇异，即有 $\det(\Omega_{\mu\nu})\neq 0$，由（1）解得

$$\dot{a}^{\mu}=\Omega^{\mu\nu}\left(\frac{\partial B}{\partial a^{\nu}}-\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\right)\tag{3}$$

其中 $\Omega^{\mu\nu}\Omega_{\nu\tau}=\delta^{\mu}_{\tau}$。

定义 1 对于 Birkhoff 系统（1），如果一个对称性既是其 Noether 对称性又是其 Mei 对称性，则称这个对称性为该系统的 Noether-Mei 对称性。

取变量 $\boldsymbol{a}^{\mu}$ 和时间 t 的无限小变换

$$t^{*}=t+\varepsilon\xi_{0}(t,\boldsymbol{a}),a^{\mu *}=a^{\mu}+\varepsilon\xi_{\mu}(t,\boldsymbol{a})\tag{4}$$

其中 ε 为无限小参数，ξ_0,ξ_{μ} 为无限小变换的生成元。

假设在无限小变换（4）的作用下，Birkhoff 函数组 R_{μ} 和 Birkhoff 函数 B 分别变为 R_{μ}^{*} 和 B^{*}，则有

$$\begin{gathered}R_{\mu}^{*}=R_{\mu}(t^{*},\boldsymbol{a}^{*})=\\R_{\mu}(t,\boldsymbol{a})+\varepsilon X^{(0)}(R_{\mu})+o(\varepsilon^{2}),\\B^{*}=B(t^{*},\boldsymbol{a}^{*})=\\B(t,\boldsymbol{a})+\varepsilon X^{(0)}(B)+o(\varepsilon^{2})\end{gathered}\tag{5}$$

其中

$$X^{(0)}=\xi_{0}\frac{\partial}{\partial t}+\xi_{\mu}\frac{\partial}{\partial a^{\mu}}\tag{6}$$

如果无限小变换（4）的生成元 ξ_0,ξ_{μ} 满足方程

$$\left[\frac{\partial}{\partial a^{\mu}}X^{(0)}(R_{\nu})-\frac{\partial}{\partial a^{\nu}}X^{(0)}(R_{\mu})\right]\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial}{\partial a^{\mu}}X^{(0)}(B)-\frac{\partial}{\partial t}X^{(0)}(R_{\mu})=0\tag{7}$$

则相应对称性为 Birkhoff 系统的 Mei 对称性；如果存在规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{a})$，使无限小生成元 ξ_0，ξ_{μ} 满足 Noether 等式

$$\left(\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\dot{a}^{\mu}-\frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_{0}+\left(\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}\right)\xi_{\mu}+R_{\mu}\dot{\xi}_{\mu}-B\dot{\xi}_{0}+\dot{G}_{N}=0\tag{8}$$

则相应对称性为 Birkhoff 系统的 Noether 对称性。于是有

判据 1 如果存在规范函数 $G_N=G_N(t,\boldsymbol{a})$，使无限小变换的生成元 ξ_0,ξ_{μ} 满足方程

$$\left\{\left(\frac{\partial R_{\mu}}{\partial t}\dot{a}^{\mu}-\frac{\partial B}{\partial t}\right)\xi_{0}+\left(\frac{\partial R_{\mu}}{\partial a^{\nu}}\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}\right)\xi_{\mu}+R_{\mu}\dot{\xi}_{\mu}-B\dot{\xi}_{0}+\dot{G}_{N}\right\}^{2}+\left\{\left[\frac{\partial}{\partial a^{\mu}}X^{(0)}(R_{\nu})-\frac{\partial}{\partial a^{\nu}}X^{(0)}(R_{\mu})\right]\dot{a}^{\nu}-\frac{\partial}{\partial a^{\mu}}X^{(0)}(B)-\frac{\partial}{\partial t}X^{(0)}(R_{\mu})\right\}^{2}=0\tag{9}$$

则相应对称性为 Birkhoff 系统的 Noether-Mei 对称性。

2 Noether-Mei 对称性导致的守恒量

定理 1 对于 Birkhoff 系统（1），如果无限小生成元 ξ_0,ξ_{μ} 满足 Noether 等式（8），或使广义 Killing 方程

$$R_{\mu}\frac{\partial\xi_{\mu}}{\partial a^{\nu}}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial a^{\mu}}\xi_{\mu}+\frac{\partial R_{\nu}}{\partial t}\xi_{0}-B\frac{\partial\xi_{0}}{\partial a^{\nu}}=-\frac{\partial G_{N}}{\partial a^{\nu}},\quad(\mu,\nu=1,2,\cdots,2n)\tag{10}$$

$$\frac{\partial B}{\partial t}\xi_{0}+B\frac{\partial\xi_{0}}{\partial t}+\frac{\partial B}{\partial a^{\mu}}\xi_{\mu}-R_{\mu}\frac{\partial\xi_{\mu}}{\partial t}=\frac{\partial G_{N}}{\partial t}\tag{11}$$

有解，则系统的 Noether-Mei 对称性导致 Noether 守恒量

$$I_{N}=R_{\mu}\xi_{\mu}-B\xi_{0}+G_{N}=\text{const}\tag{12}$$

定理 2 对于 Birkhoff 系统（1），如果无限小生成元 ξ_0,ξ_{μ} 和规范函数 $G_M=G_M(t,\boldsymbol{a})$ 满足结构方程

$$[X^{(0)}(R_{\mu})\dot{a}^{\mu}-X^{(0)}(B)]\xi_{0}+X^{(1)}\cdot[X^{(0)}(R_{\mu})\dot{a}^{\mu}-X^{(0)}(B)]+\dot{G}_{M}=0\tag{13}$$

则系统的 Noether-Mei 对称性导致 Mei 守恒量

$$I_{M}=X^{(0)}(R_{\mu})\xi_{\mu}-X^{(0)}(B)\xi_{0}+G_{M}=\text{const}\tag{14}$$

其中

$$X^{(1)}=X^{(0)}+(\dot{\xi}_{\mu}-\dot{a}^{\mu}\xi_{0})\frac{\partial}{\partial\dot{a}^{\mu}}\tag{15}$$

3 算 例

例 已知四阶 Birkhoff 系统的 Birkhoff 函数为[1-2]

$$B=\frac{1}{2}[(a^{3})^{2}+(a^{4})^{2}]+a^{2}\tag{16}$$

Birkhoff 函数组为

$$R_{1}=a^{3},R_{2}=a^{4},R_{3}=R_{4}=0\tag{17}$$

试研究系统的 Noether-Mei 对称性与守恒量。

方程（3）给出

$$\dot{a}^{1}=a^{3},\dot{a}^{2}=a^{4},\dot{a}^{3}=0,\dot{a}^{4}=-1\tag{18}$$

做计算，有

$$\begin{gathered}X^{(0)}(R_{1})=\xi_{3},\quad X^{(0)}(R_{2})=\xi_{4},\\X^{(0)}(R_{3})=0,\quad X^{(0)}(R_{4})=0,\\X^{(0)}(B)=\xi_{2}+a^{3}\xi_{3}+a^{4}\xi_{4}\end{gathered}\tag{19}$$

Mei 对称性的确定方程（7）给出

$$\left(\frac{\partial\xi_4}{\partial a^1}-\frac{\partial\xi_3}{\partial a^2}\right)\dot{a}^2-\frac{\partial\xi_3}{\partial a^3}\dot{a}^3-\frac{\partial\xi_3}{\partial a^4}\dot{a}^4-\frac{\partial\xi_2}{\partial a^1}-a^3\frac{\partial\xi_3}{\partial a^1}-a^4\frac{\partial\xi_4}{\partial a^1}-\frac{\partial\xi_3}{\partial t}=0,$$

$$\left(\frac{\partial\xi_3}{\partial a^2}-\frac{\partial\xi_4}{\partial a^1}\right)\dot{a}^1-\frac{\partial\xi_4}{\partial a^3}\dot{a}^3-\frac{\partial\xi_4}{\partial a^4}\dot{a}^4-\frac{\partial\xi_2}{\partial a^2}-a^3\frac{\partial\xi_3}{\partial a^2}-a^4\frac{\partial\xi_4}{\partial a^2}-\frac{\partial\xi_4}{\partial t}=0,$$

$$\frac{\partial\xi_3}{\partial a^3}\dot{a}^1+\frac{\partial\xi_4}{\partial a^3}\dot{a}^2-\frac{\partial\xi_2}{\partial a^3}-\xi_3-a^3\frac{\partial\xi_3}{\partial a^3}-a^4\frac{\partial\xi_4}{\partial a^3}=0,$$

$$\frac{\partial\xi_3}{\partial a^4}\dot{a}^1+\frac{\partial\xi_4}{\partial a^4}\dot{a}^2-\frac{\partial\xi_2}{\partial a^4}-a^3\frac{\partial\xi_3}{\partial a^4}-\xi_4-a^4\frac{\partial\xi_4}{\partial a^4}=0 \tag{20}$$

方程（20）有解

$$\xi_0=0,\xi_1=1,\xi_2=(a^3)^2,\xi_3=-2a^3,\xi_4=0 \tag{21}$$

生成元（21）相应于系统的 Mei 对称性。

Noether 等式（8）给出

$$\dot{a}^3\xi_1+(\dot{a}^4-1)\xi_2-a^3\xi_3-a^4\xi_4+a^3\dot{\xi}_1+a^4\dot{\xi}_2-B\dot{\xi}_0+\dot{G}_N=0 \tag{22}$$

将生成元（21）代入式（22），得到

$$G_N=0 \tag{23}$$

生成元（21）亦相应于系统的 Noether 对称性。因此，生成元（21）是这个四阶 Birkhoff 系统的 Noether-Mei 对称性。

与生成元（21）相应的 Mei 对称性的结构方程为

$$X^{(1)}[-2a^3\dot{a}^1+(a^3)^2]+\dot{G}_M=0 \tag{24}$$

其中

$$X^{(1)}=\frac{\partial}{\partial a^1}+(a^3)^2\frac{\partial}{\partial a^2}-2a^3\frac{\partial}{\partial a^3}+2a^3\dot{a}^3\frac{\partial}{\partial \dot{a}^2}-2\dot{a}^3\frac{\partial}{\partial \dot{a}^3} \tag{25}$$

方程（24）有解

$$G_M=0 \tag{26}$$

由定理 2，系统存在守恒量

$$I_M=-2a^3=\text{const} \tag{27}$$

式（27）是由系统的 Noether-Mei 对称性（21）导致的 Mei 守恒量。

将生成元（21）和规范函数（23）代入式（12），得

$$I_N=a^3+a^4(a^3)^2=\text{const} \tag{28}$$

由定理 1，式（28）是系统的 Noether-Mei 对称性（21）导致的 Noether 守恒量。

4　结　语

研究了 Birkhoff 系统的 Noether-Mei 对称性，这种对称性既是系统的 Noether 对称性又是系统的 Mei 对称性，既能导致 Noether 守恒量又能在一定条件下导致 Mei 守恒量。主要结果为文中给出的由 Birkhoff 系统的 Noether-Mei 对称性导致 Noether 守恒量和 Mei 守恒量的两个定理。文章方法和结果具有普遍意义，可以推广到其他类型的约束力学系统。

参考文献：

[1] 梅凤翔. 李群和李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京：科学出版社，1999.

[2] 梅凤翔. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京：北京理工大学出版社，2004.

[3] 王树勇，梅凤翔. 相空间中完整约束系统的形式不变性[J]. 中山大学学报（自然科学版），2002，41（6）：10－13.

[4] 张毅. 相空间中类分数阶变分问题的 Noether 对称性与守恒量[J]. 中山大学学报（自然科学版），2013，52（4）：45－50.

[5] 何胜鑫，朱建青. 基于分数阶模型的相空间中非保守力学系统的 Noether 准对称性[J]. 中山大学学报（自然科学版），2015，54（4）：37－42.

[6] FANG J H，WANG P，DING N. Noether-Mei symmetry of mechanical system in phase space [J]. Commun Theor Phys，2006，45（5）：882－884.

[7] 方建会，丁宁，王鹏. 非完整力学系统的 Noether-Lie 对称性[J]. 物理学报，2006，55（8）：3817－3820 .

[8] 刘仰魁，方建会. 相空间中变质量力学系统 Lie-Mei 对称性的两个守恒量[J]. 物理学报，2008，57（11）：6699－6703.

[9] LIU Y K，FANG J H，PANG T，et al. New conserved quantities of Noether-Mei symmetry for nonholonomic mechanical system [J]. Commun Theor Phys，2008，50（3）：603－606.

[10] ZHANG M J，FANG J H，LU K. Perturbation to Noether-Mei symmetry and adiabatic invariants for nonholonomic mechanical systems in phase space [J]. Commun Theor Phys，2009，51（4）：600－604.

[11] FANG J H，LIU Y K，ZHANG X N. New conserved quantities of Noether-Mei symmetry of mechanical system in phase space[J]. Chin Phys B，2008，17（6）：1962－1966.

[12] 徐超，李元成. 奇异 Chetaev 型非完整系统 Nielsen 方程的 Lie-Mei 对称性与守恒量[J]. 物理学报，2013，62（12）：120201.

[13] 王延志，孙现亭，贾利群. 非完整力学系统 Hamilton 方程的 Noether-Mei 对称性与守恒量[J]. 江南大学学报（自然科学版），2014，13（5）：607－610.