第 56 卷　第 2 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 56　No. 2
2017 年　3 月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　Mar.　2017

DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2017.02.009

平面区域的对数导数单叶性内径*

刘浔冰，刘雅萍，杨宗信
（江西师范大学数学与信息科学学院，江西 南昌 330022）

摘　要： 研究了对数导数意义下平面区域的单叶性内径，讨论了对数导数意义下单叶性内径的相关性质，得到了角域的对数导数单叶性内径的上界估计。

关键词： 对数导数；单叶性内径；万有 Teichmüller 空间

中图分类号： O174.51　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 0529－6579（2017）02－0053－04

On the inner radius of univalency by pre-Schwarzian derivative

LIU Xunbing, LIU Yaping, YANG Zongxin
(School of Mathematics and Informatics, Jiangxi Normal University, Nanchang 330022, China)

Abstract: The inner radius of univalency of hyperbolic domains by pre-Schwazian derivative is studied, Some properties for the norm of pre-Schwarzian derivative and inner radius are established. As an application, the bounds of inner radius for angular domains are obtained.

Key words: pre-Schwarzian derivative; inner radius of univalency; universal Teichmüller space

设 D 为复平面 $\mathbf{C}$ 上的边界多于两点的单连通区域，$\rho_D(z)|\mathrm{d}z|$ 为其高斯曲率 $K=-4$ 的双曲度量。用 B 表示单位圆盘 $B=\{z:|z|<1\}$，U 表示上半平面 $U=\{z:\mathrm{Im}\,z>0\}$，则有 $\rho_B(z)=\dfrac{1}{(1-|z|^2)}$，$\rho_U(x+\mathrm{i}y)=\dfrac{1}{2y}$。对于一般的单连通区域 D，其双曲度量密度由公式 $\rho_D(z)=\dfrac{|h'(z)|}{(1-|h(z)|^2)}$ 确定，其中 $h:D\to B$ 为共形映射。

设 f 是区域 D 内局部单叶的解析函数，则 $f'(z)\neq 0$，$\forall z\in D$。定义 f 的对数导数（pre-Schwarz 导数）为 $T_f(z)=(\log f'(z))'=\dfrac{f''(z)}{f'(z)}$，并定义 T_f 的范数为

$$\|T_f\|_D=\sup_{z\in D}|T_f(z)|\rho_D^{-1}(z)$$

定义区域 D 的对数导数单叶性内径 $\tau(D)$ 为

$$\tau(D)=\sup\{a:\|T_f\|_D\leqslant a\Rightarrow f\text{ 在 }D\text{ 内单叶}\}$$

这一定义等价于

$$\tau(D)=\inf\{\|T_f\|_D:f\text{ 在 }D\text{ 内单叶,但}f(D)\text{ 不是拟圆}\}$$

类似地，对于区域 D 内局部单叶的解析函 f，可以定义 f 的 Schwarz 导数

$$S_f(z)=\left(\frac{f''}{f'}\right)'-\frac{1}{2}\left(\frac{f''}{f'}\right)^2$$

其范数 $\|S_f\|_D=\sup\limits_{z\in D}|S_f(z)|\rho_D^{-2}(z)$，区域 D 的 Schwarz 导数单叶性内径 $\sigma(D)$ 为

$$\sigma(D)=\sup\{a:\|S_f\|_D\leqslant a\Rightarrow f\text{ 在 }D\text{ 内单叶}\}$$

Becker[1] 最早得到了对数导数与函数单叶性的关系，然后，Becker- Pommerenke[2] 研究了单位圆内局部单叶的解析函数的对数导数与拟共形延拓的关系。1986 年，Zhuravlev[3] 及 Astala-Gehring[4] 建立了对数导数意义下的万有 Teichmüller 空间模型，激起了许多研究者的浓厚兴趣，人们首先想到的是与 Schwarz 导数意义下的 Bers 嵌入的万有 Teichmüller 空间模型进行对比研究。

* **收稿日期：** 2016－06－15
基金项目： 国家自然科学基金（11261022）
作者简介： 刘浔冰（1995 年生），女；**研究方向：** 函数论；E-mail：ashnilx@ 163.com
通信作者： 杨宗信（1966 年生），男；**研究方向：** 复分析；E-mail：yangzxn@ 163.com

可是，对数导数所涉及的条件远比 Schwarz 导数的条件弱，所以，两种万有 Teichmüller 空间模型之间虽有一些类似性质，但在某些性质上也有巨大差别。例如，Schwarz 导数万有 Teichmüller 空间是连通的，而对数导数万有 Teichmüller 空间却有无穷多个分支；Schwarz 导数单叶性内径取得最大值的区域只有圆域和半平面，而对数导数单叶性内径取得最大值的区域可以是除圆域和半平面以外的凸区域。

关于区域的 Schwarz 导数单叶性内径的精确值，已知的结果包括圆域（半平面）、角域、正多边形区域、菱形、某些矩形和某些等角六边形区域，所有这些结果都建立在与角域进行比较的基础上再根据 Schwarz 导数的范数在 Möbius 变换下的不变性而得到的。

对数导数的范数仅在仿射变换下保持不变，目前只知道任何边界多于两点的单连通区域 D 有 $\tau(D)\leqslant 1$。Astala-Gehring[4] 证明了当且仅当 D 是拟圆时 $\tau(D)>0$。Stowe[5] 证明了：当 D 为凸区域时，$\tau(D)\leqslant 1$；当区域 D 非凸时，$\tau(D)<1$。程涛等通过构造拟共形反射等方法给出了某些区域的对数导数单叶性内径的下界估计[4-12]。

由于得不到角域的对数导数单叶性内径的精确值，所以不能像研究 Schwarz 导数单叶性内径那样通过区域的核收敛来得到单叶性内径的上界和下界。我们研究对数导数范数的性质，并用于估计单叶性内径。

设 f,g 是区域 D 内局部单叶的解析函数，h 是区域 G 到区域 D 上的共形映射，则 $\rho_G=(\rho_D\circ h)|h'|$，由

$$\frac{(f\circ h)''}{(f\circ h)'}(z)=\frac{h''}{h'}(z)+h'(z)\cdot\frac{f''}{f'}(h(z))$$

即

$$T_{f\circ h}(z)=T_f(h(z))\cdot h'(z)+T_h(z)\qquad(1)$$

可知，$\tau(D)$ 是仿射变换 $z\longmapsto az+b\ (a,b\in\mathbf{C})$ 下的不变量。由式（1）得

$$T_{f\circ h}-T_{g\circ h}=(T_f\circ h-T_g\circ h)h'$$

从而有

$$\|T_f-T_g\|_D=\|T_{f\circ h}-T_{g\circ h}\|_G$$

特别地，若 $g=h^{-1}$ 是区域 D 上的共形映射，则由此可得

$$\|T_f-T_g\|_D=\|T_{f\circ g^{-1}}\|_{g(D)}$$

再令 f 为恒等映射，则有

$$\|T_g\|_D=\|T_{g^{-1}}\|_{g(D)}$$

当 $g=h^{-1}$ 是区域 D 上的仿射变换时，有

$\|T_f\|_D=\|T_{f\circ g^{-1}}\|_{g(D)}$

引理 1[1] 设 h 是定义在单位圆盘 B 内的解析函数，$h'(0)\neq 0$，且对所有 $z\in B$ 有 $\left|\frac{z\cdot h''(z)}{h'(z)}\right|\leqslant\frac{1}{1-|z|^2}$，则 h 在 B 内单叶。

定理 1 设 h 是单位圆盘 B 上的解析函数，$h'(0)\neq 0$，且对所有 $z\in B$ 有 $\left|\frac{z\cdot h''(z)}{h'(z)}\right|\leqslant\frac{1}{1+|z|}$，则 $\tau(h(B))\geqslant 1$。

证明 由条件知 h 在 B 内单叶。设 f 是区域 $D=h(B)$ 上的解析函数且满足 $\left|\frac{f''}{f'}\right|\leqslant\rho_D$，令 $g=f\circ h$，由 $|h'(z)|\rho_D(h(z))=\rho_B(z)=\frac{1}{1-|z|^2}$，可得

$$\left|z\cdot\frac{g''}{g'}(z)\right|=\left|z\cdot\frac{h''}{h'}(z)+zh'(z)\cdot\frac{f''}{f'}(h(z))\right|\leqslant$$

$$\frac{1}{1+|z|}+\frac{|z|}{1-|z|^2}\leqslant\frac{1}{1-|z|^2},\ z\in B$$

由引理 1 可知 g 在 B 内单叶，从而 f 在区域 $D=h(B)$ 内单叶，即 $\tau(D)=\tau(h(B))\geqslant 1$。

注 1 当 h 满足 $h'(0)\neq 0$，且有 $\left|z\cdot\frac{h''(z)}{h'(z)}\right|\leqslant\frac{1}{1+|z|}$，$z\in B$，可以得到：当 $z\neq 0$ 时，$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right)\geqslant\frac{|z|}{1+|z|}>0$；当 $z=0$ 时，$\mathrm{Re}\left(1+\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right)=1>0$。根据文［8］中的定理 2.11 可知 $h(B)$ 为凸区域，所以存在除圆域和半平面以外的凸区域，其对数导数单叶性内径为 1。文［5］中的定理 2，在较强的条件 $\left|\frac{zh''(z)}{h'(z)}\right|\leqslant\frac{1}{2}$ 下得到了上述结论。

1 凸区域

若 f 把单位圆 B 共形映照成凸区域，则 $\forall z\in B$，函数 $g(z)=1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}$ 有正的实部，即 $\mathrm{Re}g(z)=\mathrm{Re}\left\{1+\frac{zf''(z)}{f'(z)}\right\}>0$，$\forall z\in B$。因为 $g(0)=1$，即 g 从属于半平面映照 $l(z)=\frac{1+z}{1-z}$，从而存在某个 Schwarz 函数 ω，使得 $g(z)=l(\omega(z))$。换句话说，

$$\frac{zf''(z)}{f'(z)}=\frac{1+\omega(z)}{1-\omega(z)}-1=\frac{2\omega(z)}{1-\omega(z)}$$

其中 $\omega(z)$ 在单位圆 B 内解析且 $\omega(0)=0$，$|\omega(z)|\leqslant 1$。由 Schwarz 引理，$\forall z\in B$，有 $|\omega(z)|\leqslant|z|$。记

$\varphi(z) = \dfrac{\omega(z)}{z}$，则 f 的对数导数有

$$\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{2\varphi(z)}{1 - z\varphi(z)}$$

其中 $\varphi(z)$ 在单位圆 B 内解析且 $|\varphi(z)| \leqslant 1$。

定理 2　设 f 将单位圆 B 共形映照成凸区域，则 $(1 - |z|^2)\left|\dfrac{f''(z)}{f'(z)}\right| < 4$。

证明　对于 $z \in B$，由于 $|\omega(z)| \leqslant |z| < 1$，有 $|1 - \omega(z)| \geqslant 1 - |\omega(z)| \geqslant 1 - |z| > 0$，所以

$$\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| = \frac{2|\omega(z)|}{|1 - \omega(z)|} \leqslant \frac{2|\omega(z)|}{1 - |z|} \leqslant \frac{2|z|}{1 - |z|}$$

从而

$$(1 - |z|^2)\left|z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leqslant 2|z|(1 + |z|)$$

因此，

$$(1 - |z|^2)\left|\frac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leqslant 2(1 + |z|) < 4$$

注 2　对于单位圆内满足规范化条件 $f(0) = f'(0) - 1 = 0$ 的单叶解析函数族 S，当 $f \in S$ 时，有 $\left|z\dfrac{f''(z)}{f'(z)} - \dfrac{2|z|^2}{1 - |z|^2}\right| \leqslant \dfrac{4|z|}{1 - |z|^2}$，从而 $\left|\dfrac{f''(z)}{f'(z)}\right| \leqslant \dfrac{6}{1 - |z|^2}$，由于 Koebe 函数 $k(z) = \dfrac{z}{(1 - z)^2} \in S$，有 $\dfrac{k''(z)}{k'(z)} = \dfrac{2z + 4}{1 - z^2}$，所以上述不等式是精确的。

定理 3　设 f 是单位圆 B 内局部单叶的解析函数，且存在 B 内满足 $|\varphi(z)| \leqslant 1$ 的解析函数 φ，使 $\dfrac{f''(z)}{f'(z)} = \dfrac{2\varphi(z)}{1 - z\varphi(z)}$，则 f 将单位圆 B 共形映照成一个凸区域。

证明　由 $\dfrac{f''(z)}{f'(z)} = \dfrac{2\varphi(z)}{1 - z\varphi(z)}$，可得 $z\dfrac{f''(z)}{f'(z)} = \dfrac{2z\varphi(z)}{1 - z\varphi(z)} = \dfrac{1 + z\varphi(z)}{1 - z\varphi(z)} - 1$，即

$$1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1 + z\varphi(z)}{1 - z\varphi(z)}$$

从而有

$$2\mathrm{Re}\left\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} = \frac{1 + z\varphi(z)}{1 - z\varphi(z)} + \frac{1 + \bar{z}\,\overline{\varphi(z)}}{1 - \bar{z}\,\overline{\varphi(z)}} = \frac{2(1 - |z|^2)|\varphi(z)|^2}{|1 - z\varphi(z)|^2} > 0$$

所以 $\mathrm{Re}\left\{1 + z\dfrac{f''(z)}{f'(z)}\right\} > 0$，$f(B)$ 是凸区域。

记 $F(z) = \dfrac{f(z) - f(0)}{f'(0)}$，则 $F(0) = 0$，$F'(0) = 1$，且

$$\mathrm{Re}\left\{1 + z\frac{F''(z)}{F'(z)}\right\} = \mathrm{Re}\left\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} > 0$$

仍用 f 记规范化后的函数 F。设 f 将圆周 $|z| = r < 1$ 映为曲线 C_r，（见文［8］，P43），由 $\mathrm{Re}\left\{1 + z\dfrac{f''(z)}{f'(z)}\right\} > 0$，$|z| = r$，可得

$$\mathrm{Im}\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}\log\left[\mathrm{i}re^{\mathrm{i}\theta}f'(re^{\mathrm{i}\theta})\right]\right\} > 0$$

或 $\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg\left\{\dfrac{\partial}{\partial\theta}f(re^{\mathrm{i}\theta})\right\}\right) > 0$

即曲线 C_r 上的切方向与正实轴的夹角是严格单调递增的。当一点 z 沿 C_r 正向绕行一周时，切方向与正实轴的夹角增量为

$$\int_0^{2\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\arg\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}f(re^{\mathrm{i}\theta})\right\}\right)\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi}\mathrm{Re}\left\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\}\mathrm{d}\theta = \mathrm{Re}\left\{\int_{|z| = r}\left[1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right]\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}\right\} = 2\pi, z = re^{\mathrm{i}\theta}$$

因此，C_r 是包围凸区域的一条简单闭曲线。由 $|z| = r < 1$ 的任意性，f 是单位圆 B 内的共形映照。

2　正 n 边形区域

引理 2　设 D 为边界多于两点的单连通区域，$h: B \to D$ 是共形映射，则 $\tau(D) \geqslant 1 - \|T_h\|_B$。

证明　设 f 在区域 D 内局部单叶解析，且 $\|T_f\|_D \leqslant 1 - \|T_h\|_B$，则 $f\circ h$ 在单位圆 B 内局部单叶解析，并且 $\|T_{f\circ h}\|_B = \|T_f - T_{h^{-1}}\|_D \leqslant \|T_f\|_D + \|T_{h^{-1}}\|_D \leqslant \|T_f\|_D + \|T_h\|_B \leqslant 1$，这表明 $f\circ h$ 是在单位圆 B 上的单叶函数，因而 f 在 D 内单叶，即 $\tau(D) \geqslant 1 - \|T_h\|_B$。

定理 4　设 P_n 为正 n 边形区域，则 $\tau(P_n) \geqslant 1 - 4/n$。

证明　作单位圆盘 B 到正 n 边形区域 P_n 上的共形映射

$$g_n: z \longmapsto g_n(z) = \int_0^z (1 - \zeta^n)^{\frac{-2}{n}}\mathrm{d}\zeta$$

通过计算得

$$T_{g_n}(z) = \frac{g''_n(z)}{g'_n(z)} = \frac{2z^{n-1}}{1 - z^n}$$

下面估计 $\|T_{g_n}\|_B = \sup\limits_{z\in B} 2|z|^{n-1}\dfrac{1 - |z|^2}{|1 - z^n|}$。

首先，

$$\lim_{r\to 1}|T_{g_n}(r)|(1 - r^2) = \lim_{r\to 1} 2r^{n-1}\frac{1 - r^2}{|1 - r^n|} = \frac{4}{n}$$

其次，由

$$\frac{1}{|z|} - |z| = 2\sin\mathrm{h}\left(\log\frac{1}{|z|}\right) \leqslant 2\cdot\frac{2}{n}\sin\mathrm{h}\left(\frac{n}{2}\log\frac{1}{|z|}\right) \leqslant \frac{2}{n}\left(\frac{1}{|z|^{\frac{n}{2}}} - |z|^{\frac{n}{2}}\right)$$

可知

$$|z|^{n-1}\frac{1-|z|^2}{|1-z^n|}\leqslant\frac{2}{n}$$

所以 $\|T_{g_n}\|_B=\frac{4}{n}$。由引理2，得 $\tau(P_n)\geqslant 1-\frac{4}{n}$。

注 3 当 $n=3,4$ 时，结果是平凡的；当 $n\to\infty$ 时，$\tau(P_n)\to 1$。

3 角域 A_k

引理 3[5] 若 D 是凸区域，则 $\tau(D)\leqslant 1$。

引理 4[5] 若 D 为非凸区域，则 $\tau(D)<1$。

利用复合函数对数导数的范数表达式，通过估计 Riemann 映射的对数导数的范数，我们给出单连通区域的对数导数单叶性内径的下界估计。

对于角域 $A_k=\{z:0<\arg z<k\pi\}(0\leqslant k\leqslant 2)$，程涛等通过构造拟共形反射的方法给出了 A_k 的对数导数单叶性内径的下界。

引理 5[6] $\tau(A_k)\geqslant\begin{cases}k, & 0\leqslant k\leqslant 1;\\ 2-k, & 1\leqslant k\leqslant 2\end{cases}$

设 $A_k=\{z:0<\arg z<k\pi\}(0<k<2)$ 为角域，则对任何正实数 ε，解析函数 $f(z)=z^{\frac{i\varepsilon}{k}}$ 在 A_k 内都不单叶，（例如，对于 $0<k<2$，i^k 取主值，则有 $i^k\neq i^k\exp\left(\frac{2k\pi}{\varepsilon}\right)\in A_k$，$f\left(i^k\right)=f\left(i^k\exp\left(\frac{2k\pi}{\varepsilon}\right)\right)$）由此我们可以得到 $\tau(A_k)$ 的一个上界。

引理 6 $\tau(A_k)\leqslant 2k$。

证明 对于角域 $A_k=\{z:0<\arg z<k\pi\}(0<k<2)$ 内局部单叶的解析函数 $f(z)=z^{\frac{i\varepsilon}{k}}$，有

$$T_f(z)=\left(i\frac{\varepsilon}{k}-1\right)\frac{1}{z}$$

令 $z=re^{i\theta}$，则容易算得（也可由文［7］，P123），有

$$\rho_{A_k}^{-1}(z)=2kr\sin\left(\frac{\theta}{k}\right)$$

所以

$$\|T_f\|_{A_k}=\sup_{z\in A_k}|T_f(z)|\rho_{A_k}^{-1}(z)=$$

$$2\sup_{0<\theta<k\pi}\sqrt{k^2+\varepsilon^2}\sin\frac{\theta}{k}=2\sqrt{k^2+\varepsilon^2}$$

因为对任何正实数 ε，解析函数 $f(z)=z^{\frac{i\varepsilon}{k}}$ 在 A_k 内都不单叶，所以有 $\tau(A_k)\leqslant 2k$。

由引理 3－6，我们得到角域 A_k 的对数导数单叶性内径的一个估值。

定理 5 当 $0\leqslant k\leqslant\frac{1}{2}$ 时，$k\leqslant\tau(A_k)\leqslant 2k$；当 $\frac{1}{2}\leqslant k\leqslant 1$ 时，$k\leqslant\tau(A_k)\leqslant 1$；当 $1<k\leqslant 2$ 时，$\tau(A_k)<1$。

参考文献：

［1］ BECKER J. Löwnersche Differentialgleichung and quasikonform fortsetzbare schlichte Funktionen［J］. J Reine Angew Math, 1972, 255: 23－43.

［2］ BECKER J, POMMERENKE C. Schlichtheiskriterien and Jordangebiete［J］. J Reine Angew Math, 1984, 354:74－94.

［3］ ZHURAVLEV I V. Model of the universal Teichmüller space［J］. Sib Math J, 1986, 27: 691－697.

［4］ ASTALA K, GEHRING F W. Injectivity, the BMO norm and the universal Teichmüller space［J］. J Analyse Math, 1986, 46: 16－57.

［5］ STOWE D. Injectivity and the pre-Schwarzian derivative［J］. Michigen Math J, 1998, 45: 537－546.

［6］ 程涛,程纪修. 区域的对数导数单叶性内径[J]. 中国科学(A 辑),2007, 37(4): 504－512.
CHENG T, CHENG J X. The inner radius of univalency by logarithmic derivative［J］. Science in China (Series A), 2007, 37(4): 504－512.

［7］ LEHTO O. Univalent functions and Teichmüller spaces［M］. New York: Springer-Varlag, 1987.

［8］ DUREN P. Univalent functions［M］. New York: Springer-Varlag, 1983.

［9］ 郭辉,冯小高,崔泽建. 基于角域对数导数意义下的单叶性内径[J]. 深圳大学学报(理工版),2008, 25(4): 437－440.
GUO H, FENG X G, CUI Z J. The inner radius of univalence in the sense of pre-Schwarzian derivative based on angular domain［J］. Journal of Shenzhen University(Science & Engineering), 2008, 25(4): 437－440.

［10］ 程涛,石艳. 基于任意拟圆的对数导数意义下区域的单叶性内径[J]. 南昌大学学报(理科版),2009, 33(3): 219－223.
CHENG T, SHI Y. The Inner radius of univalence in the sense of pre-Schwarzian derivative based on any quasidisk［J］. Journal of Nanchang University(Natural Science), 2009, 33(3): 219－223.

［11］ 张思汇,陈纪修. 以无穷远为内点的平面区域的单叶性内径(英文)[J]. 复旦学报(自然科学版),2011, 50(6): 689－695.
ZHANG S H, CHEN J X. On the inner radius of univalency of plane domains containing the point ∞［J］. Journal of Fudan University(Natural Science), 2011, 50(6): 689－695.

［12］ PONNUSAMY S, SAHOO S K, SUGAWA T. Radius problems associated with pre-Schwarzian and Schwarzian derivatives［J］. Mathematics, 2012, 34(2): 163－172.