

非超可解极大子群指数为素数幂的有限群*

李士恒¹, 赵先鹤²

(1. 郑州航空工业管理学院理学院, 河南 郑州 450015;
2. 河南师范大学数学与信息科学学院, 河南 新乡 453007)

摘要: 如果有限群 G 的每个非超可解群极大子群的指数均为素数幂, 那么 G 的合成因子为素数阶群或同构于下列单群: A_5 , $PSL(2, 8)$, $PSL(2, 11)$, $PSL(2, p)$, 其中 p 为奇素数且 $p \equiv \pm 1(8)$.

关键词: 有限群; 非超可解; 极大子群; 几乎单群

中图分类号: O152.1 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2017)02-0057-06

Finite groups whose every non-super-solvable maximal subgroup is of prime power index

LI Shiheng¹, ZHAO Xianhe²

(1. College of Science, Zhengzhou University of Aeronautics, Zhengzhou 450015, China;
2. College of Mathematics and Information Science, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

Abstract: Let G be a finite group. If $|G:M|$ is of prime power for every non-supersolvable maximal subgroup M of G , then any composition factor of G is of prime order or isomorphic to one of the following: A_5 , $PSL(2, 8)$, $PSL(2, 11)$ and $PSL(2, p)$, where p is a prime and $p \equiv \pm 1(8)$.

Key words: finite groups; non-supersolvable group; maximal subgroup; almost simple groups

有限群的子群性质对群的结构有重要的影响, 很多文献对此都有研究^[1-4]。其中极大子群的群论或数论性质对群的结构也有重要的影响, 如有限群超可解当且仅当它的所有极大子群指数为素数(Huppert定理); 黎先华^[1]研究了极大子群指数型为 $[m, n, p_1, p_2, \dots, p_s]$ 的有限群, 推广了Huppert定理。众所周知, 可解群的每个极大子群的指数都是素数幂, 但是其逆命题不成立。Guralnick^[5]证明了: 如果有限群 G 的每个极大子群的指数均为素数幂, 则 $G/S(G) \cong PSL(2, 7)$ 或 1, 其中 $S(G)$ 为 G 的最大可解正规子群。进一步, 郭秀云^[6]对极大子群进行了限制, 得到:

如果有限群 G 的每个非幂零的极大子群的指数均为素数幂, 则 $G/S(G) \cong PSL(2, 7)$ 或 1, 其中

$S(G)$ 为 G 的最大可解正规子群。

在本文我们对极大子群做进一步的限制得到了结论:

定理 1 如果有限群 G 的每个非超可解极大子群的指数均为素数幂, 则 G 的合成因子为素数阶群或同构于单群: $A_5, PSL(2, 8), PSL(2, 11), PSL(2, p)$, 其中 p 为奇素数且 $p \equiv \pm 1(8)$ 。

下面的例 1 (相关符号和概念见后面的定义 2 和文 [7, A, 第 18 节]) 说明在定理 1 的条件下不能得到类似于文 [6] 的定理 1 或文 [5] 的推论 3 的结果, 即 $G/S(G)$ 可解或者同构于某个几乎单群。

例 1 设 $G = PGL(2, 7)$ wr S_2 , 基群 $B = \{(a, b) \mid a, b \in PGL(2, 7)\} \cong PGL(2, 7) \times PGL(2, 7)$,

* 收稿日期: 2016-08-05

基金项目: 国家自然科学基金(11501176); 河南省高等学校重点科研项目(16A110039)

作者简介: 李士恒(1977生), 男; 研究方向: 群论; E-mail: lishiheng01@163.com

$N = \{(a, b) \mid a, b \in PSL(2, 7)\} \cong PSL(2, 7) \times PSL(2, 7), M < \cdot G$ (表示 M 是 G 的极大子群)。若 $M \geq N$, 由 G/N 可解得 $|G:M|$ 为素数幂。若 M 不包含 N 则 $G = MN$ 。因此存在 $\alpha \in M \setminus B$ 对换 $B_1 = \{(a, 1) \mid a \in PGL(2, 7)\}$ 和 $B_2 = \{(1, a) \mid a \in PGL(2, 7)\}$, 由下面的引理 2 可假设 $\alpha = (12), M \leq M_{(1)} wr S_2 = (M_{(1)} \times M_{(2)}) \rtimes S_2$, 显然 $M_{(i)} \leq PGL(2, 7), i = 1, 2$ 。若 $M_{(1)}$ 不是 $PGL(2, 7)$ 的极大子群, 则存在 $H < \cdot PGL(2, 7)$ 使 $M_{(1)} < H$, 从而有 $M < H wr S_2$ 超可解, 和 M 是极大子群矛盾。因此 $M_{(1)} < \cdot PGL(2, 7)$ 或 $M_{(1)} = PGL(2, 7)$ 。当 $M_{(1)} < PGL(2, 7)$ 时 $M \cong M_{(1)} wr S_2$, 由 $|PGL(2, 7):M_{(1)}| = 7$ 或 $2^{3[8]}$ 得 $|G:M|$ 为 7^2 或 2^6 。当 $M_{(1)} = PGL(2, 7)$ 时, $M \geq D \rtimes S_2$, 其中 $D = \{(a, a) \mid a \in PGL(2, 7)\} \cong PGL(2, 7)$ 为对角子群。此时 $N(D \rtimes S_2) \leq G$ 且 $|N(D \rtimes S_2)| = |N \parallel D \rtimes S_2| / |E| = |N \parallel D \parallel S_2| / |E| = 2|N \parallel S_2| < 8|N| = |G|$, 其中 $E = \{(a, a) \mid a \in PSL(2, 7)\}$, 所以 $D \rtimes S_2$ 不是 G 的极大子群。因此, 存在 $x = (a, b) \in M \setminus (D \rtimes S_2)$ 或 $y = (a, b)(12) \in M \setminus (D \rtimes S_2)$ 。其中 $a \neq b$ 且 $a, b \in PGL(2, 7)$ 。后一种情况, 由 $x = y(12) \in M$ 归结为前一种情况。前一种情况时, 设 $m = ab^{-1}$, 由 $M \ni x(b^{-1}, b^{-1}) = (ab^{-1}, 1)$ 得 $(m, 1) \in M$ 且 $m \neq 1$ 。于是, 由 $PSL(2, 7)$ 为非交换单群得 $N_1 = \langle (m, 1)^E \rangle \leq M$, 其中 $N_1 = \{(a, 1) \mid a \in PSL(2, 7)\}$ 。再由 M 在 $\{B_1, B_2\}$ 上传递得 $N_2 \subseteq M$, 其中 $N_2 = \{(1, a) \mid a \in PSL(2, 7)\}$, 因此 $N \leq M, M/N$ 为 G/N 的极大子群, 由 G/N 可解得为素数幂。总之, G 的每一个极大子群的指数均为素数幂。

1 定义与引理

定义 1^[9] 设 H 为 G 的子群。若存在 $K \leq G$ 满足 $HK = G$, 那么称 K 是 H 在 G 中的广义补。

定义 2^[9] 圈积: 对于群 L , 把由所有函数

$$\Sigma \rightarrow L, \Sigma = \{1, \dots, n\}$$

所做成的集合 L^n 看作一个群, 其乘法按照点来定义为:

对所有的 $i \in \Sigma$ 及 $a^1, a^2 \in L^n$ 有, $i^{a^1 a^2} = i^{a^1} i^{a^2}$ 其中 i^{a^k} 表示 a_k 的第 i 个位置上的元素, $k = 1, 2$ 。圈积 $L wr S_n$ 表示 L^n 关于 S_n 的半直积: 如果 $s \in S_n, a \in L^n$, 那么对所有的 $i \in \Sigma$ 有 $i^{a^s} = (i^{s^{-1}})^a$ 。此外, 对 $U \leq L$ 记 L^n 的子群 U_i 为 $U_i = \{a \in U^n \mid j^n = 1, \text{当 } j \neq i\}$ 。特别, $L^n = L_1 \times \dots \times L_n$ 。令 $W = L wr S_n$, 记 π_i 为 $N_W(L_i) = L_i \times (L_1 \times \dots \times L_{i-1} \times L_{i+1} \times \dots \times L_n) S_{n-1}$ 到 L_i 上的投射。对于 W 的子群 G , 我们记 $G_{(i)}$ 为 i 在

所有这些函数 $N_G(L_i)^{\pi_i}$ 作用下的像的集合, 即

$$G_{(i)} = \{i^{(N_G(L_i))^{\pi_i}} = w \in L_i \mid \text{存在 } g \in N_G(L_i) \text{ 使 } i^g = i^w\}$$

因此, $G_{(i)}$ 是 L 的一个子群。称 S_n 为圈积 $W = L wr S_n$ 的顶群。

定义 3 设 N 是一个非交换单群, 如果群 G 满足 $N \leq G \leq \text{Aut}(N)$, 那么称 G 为几乎单群。

引理 1 设 $G = W = L wr S_n, L$ 是几乎单群。设 K 是 L 的自正规化子群, 且 $L = KT$, 这里 $T = \text{Soc}(L)$ 。设 $M = N_G(K^n) = K wr S_n$ 。如果 M 在 G 中有素数幂指数, 那么 K 在 L 中也有素数幂指数。

证明 若 M 在 G 中有素数幂指数, 设为 p^k , 则 G 有一个 Sylow p -子群 P 使 $MP = G$ 。由 $|G| = |M \parallel P| / |M \cap P|$ 得 $(|G:M|, |G:P|) = 1$ 。又 L 是 G 的次正规子群, 所以 $L = (L \cap M)(L \cap P) = K(L \cap P)$ 。因此 $|L:K|$ 为素数幂。

引理 2^[9] 设 G 是圈积 $W = L wr S_n$ 的传递地作用在 $\{L_1, \dots, L_n\}$ 上的子群。那么存在 $g \in L_2 \times \dots \times L_n$ 使 $G^g \leq V = G_{(1)} wr S_n$, 其中 V 是 W 的子群且具有和 W 相同的顶群。

引理 3^[5] 设 G 为非交换有限单群, $H \leq G$ 且 $|G:H| = p^\alpha$, 其中 p 为素数, 那么下列断言之一成立:

(i) $G = A_n, H \cong A_{n-1}$, 其中 $n = p^\alpha$;

(ii) $G = PSL(n, q), H$ 是直线或超平面的稳定化子, $|G:H| = (q^n - 1)/(q - 1) = p^\alpha$, 这里 n 是素数。

(iii) $G = PSL(2, 11), H \cong A_5$;

(iv) $G = M_{23}$ 且 $H \cong M_{22}$ 或 $G = M_{11}$ 且 $H \cong M_{10}$;

(v) $G = U_4(2) \cong S_4(3), H$ 是指数为 27 的抛物子群。

引理 4 设 G 是一个几乎单群, 若任意的 G 的不包含 $\text{Soc}(G)$ 的极大子群均为超可解的则 $\text{Soc}(G) \cong PSL(2, p)$, 其中 p 为满足 $p \equiv \pm 1(8)$ 的素数。

证明 若任意的 G 的不包含 $\text{Soc}(G)$ 的极大子群 M 均为超可解, 则 $\text{Sec}(M)$ 超可解, 从而由文[10, 定理] 得到结论。

引理 5 设群 G 满足 $\text{Soc}(G) = PSL(2, p^f) < PGL(2, p^f) \leq G$, 其中 p 为奇素数, $f = 2^r$ 。则对任意的满足 $\text{Soc}(G) \not\subseteq M$ 的极大子群 M , 则有下列情况之一成立:

(i) M 超可解;

(ii) $M \cap PSL(2, p^f)$ 为 A_4 或为 p^f 阶初等交换群和 $(p^f - 1)/2$ 阶循环群的半直积。

证明 为了方便起见, 用 $p^m \cdot t$ 表示 p^m 阶初等

交换群和 t 阶循环群的半直积, E_m 表示 p^m 阶初等交换群, C_k 表示 k 阶循环群。

若 $f = 2^r > 1$, 则由文 [11] 的 II, 8.27 得 $PSL(2, p^m) < PGL(2, p^m) < PSL(2, p^f)$, 其中 $m = 2^k, 0 \leq k < r$ 且 k, r 均为整数。设 $\alpha \in PGL(2, p^f) \setminus PSL(2, p^f)$, 则 α 不正规化 $PSL(2, p^m)$ 。设 M 是 G 的极大子群且 $Soc(G) \not\subseteq M$, 则 $M \cap PSL(2, p^f)$ 为 $PSL(2, p^f)$ 的真子群, 且 $M = N_G(M \cap PSL(2, p^f))$ 。于是, 由文 [11] 的 II, 8.27 可得 $M \cap PSL(2, p^f)$ 可能为 $p^m \cdot t$ ($0 < m \leq f$)、 z 阶循环群 C_z 、 $2z$ 阶二面体群 D_{2z} 、 A_4 、 S_4 、 A_5 、 $PSL(2, p^m)$ 或 $PGL(2, p^m)$ ($0 < m < f$), 其中 $z \mid (p^f \pm 1)/2, t \mid (p^m - 1)/2$ 且 $t \mid p^f - 1$ 。

由文 [11] 的 II, 8.27 可得 $PGL(2, p^f) \leq PSL(2, p^{2f})$, 所以 $PGL(2, p^f)$ 的子群类型同文 [11, II, 8.27] 中的。

下面对 $M \cap PSL(2, p^f)$ 分情况讨论:

(i) 当 $M \cap PSL(2, p^f)$ 为 $PSL(2, p^m)$ 或 $PGL(2, p^m), m < f$ 时, $M = N_G(PSL(2, p^m)) \geq PGL(2, p^m)$ 且包含 $PGL(2, p^f) \setminus PSL(2, p^f)$ 中的一个元素 (这是因为 $G = M PSL(2, p^f)$), 设为 α 。于是, $PSL(2, p^{2f}) \geq (PGL(2, p^f) \cap M) \geq \langle PGL(2, p^m), \alpha \rangle$, 且 α 正规化 $PSL(2, p^m)$, 但是由文 [11] 的 II, 8.27 可知 $PSL(2, p^{2f})$ 没有同构于 $\langle PGL(2, p^m), \alpha \rangle$ 的子群。

(ii) 当 $M \cap PSL(2, p^f) = A_5$ 且 $p \neq 5$ 时 (情况 $p = 5$ 属于情况 (i))。设 $\alpha \in PGL(2, p^f) \setminus PSL(2, p^f)$, 由 $G = M PSL(2, p^f)$ 得 $PGL(2, p^f) = PSL(2, p^f)(PGL(2, p^f) \cap M)$ 。因此, 存在 $\alpha \in (PGL(2, p^f) \cap M)$ 且 $\alpha \notin PSL(2, p^f)$ 使 $PGL(2, p^f) = PSL(2, p^f)\langle \alpha \rangle$ 。显然有 $PGL(2, p^f)/PSL(2, p^f) = PSL(2, p^f)(PGL(2, p^f) \cap M)/PSL(2, p^f) \cong (PGL(2, p^f) \cap M)/(PSL(2, p^f) \cap M) = \langle \alpha \rangle(PSL(2, p^f) \cap M)/(PSL(2, p^f) \cap M) = \langle \alpha \rangle A_5/A_5$ 。由文献 [11] II, 8.27(8) 可得 $PSL(2, p^{2f}) \geq PGL(2, p^f) \geq \langle \alpha \rangle A_5$, 但由 $p \neq 5$ 和文 [11] 的 II, 8.27 可知这是不可能的。

(iii) 当 $M \cap PSL(2, p^f)$ 为 S_4 时, 同上可得矛盾。

(iv) 当 $M \cap PSL(2, p^f) = p^m \cdot t$, 其中 $t \mid (p^m - 1)/2$ 且 $t \mid p^f - 1$ 时, 由 p^m 阶初等交换群是 $p^m \cdot t$ 的特征子群得 $M \leq N_G(E_m)$ 且 $N_G(E_m) \geq E_{f \cdot m}$ 。结合 G 无可解正规子群得 $m = f$, 从而 $M \cap PSL(2, p^f) = N_{PSL(2, p^f)}(E_f) = p^f \cdot ((p^f - 1)/2)$ 。此时, E_f 是 $PSL(2, p^f)$ 的 Sylow p -子群, 由 Frattini 论断得 $G = PSL(2, p^f)N_G(E_f)$ 。设 M 为包含 $N_G(P)$ 的 G 的极大

子群则有 $M \cap PSL(2, p^f) = p^f \cdot ((p^f - 1)/2)$ 。这说明这样的 M 是存在的。

(v) 当 $M \cap PSL(2, p^f)$ 为 4 阶初等交换群时, 由文 [11] 的 II, 8.16, 8.17 可得 $M \geq N_{PSL(2, p^f)}(M \cap PSL(2, p^f)) \cong A_4$ 或 S_4 , 这和 $M \cap PSL(2, p^f)$ 为 4 阶初等交换群矛盾。

(vi) 当 $M \cap PSL(2, p^f) = C_z$ 或二面体群 $D_{2z} \ni (z > 2)$ 时, $\text{Aut}(N_1) = PGL(2, p^f) \cdot \text{Aut}(q)$ 为 $PGL(2, p^f)$ 和 f 阶循环群的半直积, 且有正规列 $\text{Aut}(N_1) \triangleright PGL(2, p^f) \triangleright PSL(2, p^f) \triangleright 1$ 。当 $z > 2$ 时, C_z 为二面体群 D_{2z} 的特征子群, 所以 M 有正规列 $M \triangleright M \cap PGL(2, p^f) \triangleright D_{2z} \triangleright C_z \triangleright 1$ ($M \cap PSL(2, p^f) = D_{2z}$ 时) 或 $M \triangleright M \cap PGL(2, p^f) \triangleright C_z \triangleright 1$ ($M \cap PSL(2, p^f) = C_z$ 时)。又由 $M/(M \cap PGL(2, p^f)) \cong M PGL(2, p^f)/PGL(2, p^f) \leq \text{Aut}(N_1)/PGL(2, p^f) \cong C_f$ 得 $M/(M \cap PGL(2, p^f))$ 为循环群。另有, $(M \cap PGL(2, p^f))/(M \cap PSL(2, p^f)) \cong (M \cap PGL(2, p^f)PSL(2, p^f)/PSL(2, p^f)) \leq PGL(2, p^f)/PSL(2, p^f)$ 得 $(M \cap PGL(2, p^f))/(M \cap PSL(2, p^f))$ 为 2 阶循环群。因此, M 为超可解群。

引理 6 设 $p (> 2)$ 为奇数, $n \geq 2$ 为偶数, 则 $4 \nmid p^n + 1$ 。

证明 设 $p = 2k + 1, n = 2j$, 其中 k 和 j 均为不小于 1 的整数。由二项式定理得 $(2k + 1)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i (2k)^i$, 结合 $i \geq 2$ 时, $C_n^i (2k)^i = 2^i C_n^i k^i$ 和 $i = 1$ 时 $C_n^i (2k)^i = 2nk = 4jk$ 得 4 除 $p^n + 1$ 的余数为 2, 即 $4 \nmid p^n + 1$ 。

引理 7 设 $3^k = 2^f = 1$, 其中 k, f 为正整数, 则 $k = 1, f = 1$ 或 $k = 2, f = 3$ 。

证明 若 k 为奇数, 则由二项式定理知, 存在正整数 j 使 $2^f = (2 + 1)^k - 1 = 2(2j + a)$, 因此可得 $2j + a = 1$, 从而 $a = 1$ 。

若 k 为偶数, 设 $k = 2d$, 则 $2^f = 3^{2d} - 1 = (3^d - 1)(3^d + 1)$, 从而 $3^d - 1$ 和 $3^d + 1$ 都是 2 的方幂。又 $3^d - 1$ 和 $3^d + 1$ 的最大公因子为 2, 因此 $3^d - 1 = 2$, 从而 $d = 1$, 于是 $k = 2, f = 3$ 。

2 定理 1 的证明

证明 用反证法证明, 假设结论不成立, 设 G 为极小阶反例。

(i) G 有唯一的极小正规子群 N 且 $N \cong N_1 \times N_2 \times \dots \times N_r, C_G(N) = 1$, 其中 $N_1 \cong \dots \cong N_r$ 是非交换单群。

显然, 对 G 的每一个正规子群 $H, G/H$ 满足定

理的条件。因此, G/H 的每一个合成因子都同构于素数阶群或 $A_5, PSL(2, 8), PSL(2, 11), PSL(2, p)$, 其中 p 为奇素数且 $p \equiv \pm 1(8)$ 。于是, G 有唯一的极小正规子群 N , 这是因为 $G/(L \cup H)$ 的合成因子同构于 G/H 或 G/L 的合成因子, 其中 K 和 H 是 G 的正规子群。因为 G 是极小阶反例, 所以 N 是非可解的。因此, $N \cong N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_r, C_G(N) = 1$, 其中 $N_1 \cong \cdots \cong N_r$ 是非交换单群。

(ii) 设 $V = G_{(1)} wr S_r$, 则 $N \leq G \leq V = G_{(1)} wr S_r$ 。

由 (i) 得到 $G = G/C_G(N)$ 可看做是 $\text{Aut}(N) = W = \text{Aut}(N_1) wr S_r$ 的一个子群。再由 N 为 G 的极小正规子群知道 G 传递的作用在 $\{\text{Aut}(N_1), \text{Aut}(N_2), \dots, \text{Aut}(N_r)\}$ 上和引理 2 可设 $G \leq V = G_{(1)} wr S_r$ 。

(iii) 设 $M_{(1)}$ 为 $G_{(1)}$ 的极大子群且 $M_{(1)}N_{(1)} = G_{(1)}, M = (M_{(1)})', K = N_W(M) \cap G$, 则 $K_{(1)} = M_{(1)}$ 且 K 是 G 的极大子群。

显然 $G = KN, N_W(M) = M_{(1)} wr S_r$ 。于是 $K \cap N = (M_{(1)} \times \cdots \times M_{(r)}) \cap N = (M_{(1)} \cap N_{(1)}) \times \cdots \times (M_{(r)} \cap N_{(r)})$ 。假设 $K_{(1)} = M'_{(1)} < M_{(1)}$ 。则 $K \leq M' = M'_{(1)} wr S_r$ 。于是 $G = KN \leq M'N = (M'_{(1)}N_{(1)}) wr S_r, G_{(i)} = M'_{(i)}/N_{(i)} (i = 1, 2, \dots, r)$ 。又由 $K \cap N \leq M' \cap N = (M'_{(1)} \cap N_{(1)}) \times \cdots \times (M'_{(r)} \cap N_{(r)})$ 得 $(M'_{(i)} \cap N_{(i)}) = (M_{(i)} \cap N_{(i)}), i = 1, 2, \dots, r$ 。于是 $|G_{(i)}| = |M_{(i)}N_{(i)}| = |M_{(i)}| |N_{(i)}| / |M_{(i)} \cap N_{(i)}| > |M'_{(i)}| |N_{(i)}| / |M'_{(i)} \cap N_{(i)}| = |M'_{(i)}N_{(i)}| = |G_{(i)}|$, 这是一个矛盾。另外, 同文 [9, 定理 1.5] 证明, 得 K 是 G 的极大子群。

(iv) $G_{(1)}$ 的每个非超可解极大子群的指数都是素数幂的。

设 $M_{(1)}$ 为 $G_{(1)}$ 的极大子群且 $M_{(1)}N_1 = G_{(1)}$ 。若 $M_{(1)}$ 非超可解, 则 K 也非超可解。因此 $|G:K|$ 为素数幂, 从而存在 G 的 Sylow 子群, 设为 P , 使 $G = KP$ 。所以 $V = G_{(1)} wr S_r = N_w(M)N = N_w(M)G = N_w(M)KP = N_w(M)P, N_w(M)$ 在 V 中的指数为素数幂。因此, 由引理 1 得 $M_{(1)}$ 在 $G_{(1)}$ 中的指数为素数幂。

(v) 假设 G 的满足 $MN = G$ 的极大子群 M 均是超可解的, 则 $G/N \cong M/(M \cap N)$ 可解且 $\text{Sec}(M) = M \cap N$ 超可解; 若极大子群 M 包含 N , 则由 $\text{Sec}(M)$ 的性质和 G/N 可解得 $\text{Sec}(M) = 1$ 超可解。于是, 对 G 的每一个极大子群 M 都有 $\text{Sec}(M)$ 超可解。因此, 由文 [10] 的定理可得 G 的合成因子同构于 $PSL(2, p)$, 其中 p 为满足 $p \equiv \pm 1(8)$ 的素数, 定理结论成立。所以, G 有满足 $MN = G$ 的极大子群 M 是非超可

解的, 从而 $|N: (M \cap N)| = |G: M|$ 是素数幂, 设为 p^k 。设 P 为 N 的 Sylow p -子群, 则 $(|N: (M \cap N)|, |N: P|) = 1$ 。因此, 由文 [7] 的 A, 1.6(b) 可得 $N = P(M \cap N)$ 。因为 $N_1 \leq N$, 所以 $N_1P \leq N$ 且 $N_1(M \cap N) \leq N$ 。由文 [7] 的 A, 1.6(c) 可得 $N_1 = (N_1 \cap P)(M \cap N_1)$ 。于是 $|N_1: (M \cap N_1)|$ 是素数幂, 由引理 3 得:

(a) $N_1 = A_n$, 其中 $n = p^\alpha$;

(b) $N_1 = PSL(n, q), (q^n - 1)/(q - 1)$ 为素数幂, 其中 n 为素数;

(c) $N_1 = M_{23}, M_{11}$ 或 $N_1 = U_4(2) \cong S_4(3)$ 。

(vi) 下面对 (v) 中的情况 (a), (b), (c) 逐条讨论, 其中 P_i 表示 $PSL(n, q)$ 的 i -型抛物子群。为了方便起见, 我们暂时用符号 G 来表示 $G_{(1)}$:

(a) 情形 $N_1 = A_n$: 当 $n > 10$ 时, 设 $G = A_n$ 或 S_n 。取 $M = S_{n-2} \times S_2$, 则由文 [12] 第一章, 定理 D 得 $M \cap G$ 为 G 的极大子群。此时, M 的指数为 $n(n-1)/2$, 不可能是素数幂。当 $n < 10$ 时由文 [8] 可得。

(b) 情形 $N_1 = PSL(2, q)$: 此时对 q 分情况讨论。

(A) 当 $q = 2^f$ 且 $f > 1$ 时, $PSL(2, q)$ 只有域自同构, $\text{Aut}(N_1) = PSL(2, q) \cdot \text{Aut}(GF(q))$, 其中 $\text{Aut}(GF(q))$ 表示 q 阶域的同构群。

(A1) 若 f 为合数, 则设 $f = mt$, 其中 t 为 f 的最小素因子。此时 $N_G(PSL(2, 2^m)) = (PSL(2, 2^m) \cdot \text{Aut}(GF(q))) \cap G$ 是 G 的极大子群, $N_G(PSL(2, 2^m)) \cap N_1 = PSL(2, 2^m)$ 。但

$$|G: N_G(PSL(2, 2^m))| = |N_1: PSL(2, 2^m)| = ((2^f + 1)2^f(2^f - 1))/((2^m + 1)2^m(2^m - 1))$$

不可能是素数幂。

(A2) 若 f 为奇素数, 则由 $2^{2^f} - 1 \equiv -2(5)$ 得 $5 | 2^{2^f} - 1$, 结合文 [11] 的 II, 8.27 可得 $PSL(2, q)$ 的真子群为 $2^f(2^f - 1)$ 的子群或超可解。

因此, 当 $2^f + 1$ 为素数幂时群 G 才可能满足定理条件。此时, 由 $2^f + 1 \equiv 0(3)$ 得 $2^f + 1$ 为 3 的方幂, 即 $2^f + 1 = 3^k$, 其中 k 为某个正整数。由引理 7 得 $f = 3, k = 2$, 从而 $N_1 = PSL(2, 8)$ 。

(B) 当 $q = p^5, p$ 是奇素数时, $\text{Aut}(N_1) = PGL(2, q) \cdot \text{Aut}(GF(q))$ 。由 $|PGL(2, q)/PSL(2, q)| = 2$ 得 G 有两种情况 $G \geq PGL(2, q)$ 或 $G \not\geq PGL(2, q)$ 。

(B1) 若 f 有奇素数因子 t 且 $f = tm$, 设 $M = (PGL(2, p^m) \cdot \text{Aut}(GF(q)))$, 则 $M_1 = M \cap G$ 是 G 的极大子群且 $\text{Aut}(N_1) = N_1M, N_1 \cap M_1 = N_1 \cap M = PSL(2, p^m)$ [11]。因此, 由 (iv) 得 $|G: M_1| = |N_1$

: $PSL(2, p^m) \mid$ 为素数幂。但是

$$\mid N_1 : PSL(2, p^m) \mid = \frac{(p^f + 1)p^f(p^f - 1)}{(p^m + 1)p^m(p^m - 1)}$$

不可能是素数幂。

(B2) 若 f 无奇素数因子且 $f > 1$, 设 $f = 2^r > 1$ 。设 M 是 G 的极大子群且 $N_1 \not\subseteq M$ 。

(B2.1) 假设 $G \cong PGL(2, q)$, 则由引理 5 得 M 超可解、 $M \cap PSL(2, q)$ 为 A_4 或 $p^f \cdot (p^f - 1)/2$ 。当 $M \cap PSL(2, q)$ 为 A_4 时, 由 M 的指数为素数幂得 N_1 只有 3 个素因子。根据文[13] 的引理 2.3 可得 N_1 同构于 $PSL(2, 4), PSL(2, 7), PSL(2, 8), PSL(2, 9)$ 或 $PSL(2, 17)$, 由文[8] 可得结果。当 $M \cap PSL(2, p)$ 为 $p^f \cdot (p^f - 1)/2$ 时, 显然 M 非超可解, 由 M 的指数为素数幂得 $\mid G : M \mid = p^f + 1$ 为素数幂, 从而为 2 的方幂。此时, 可设 $p^f + 1 = 2^k$, 由 $p > 2$ 和 $f > 1$ 得 $k > 3$, 从而 $4 \mid p^f + 1$, 这和引理 6 矛盾。

(B2.2) 假设 $G \not\cong PGL(2, q)$, 则 $G \leq \text{Aut}(N_1) = PSL(2, q) \cdot \text{Aut}(GF(q))$ 。设 $m = 2^{r-1}$, 此时 $PGL(2, p^m) \leq PSL(2, q), PGL(2, p^m)$ 是 $PSL(2, q)$ 的极大子群^[11]。设 $M = (PGL(2, p^m) \cdot \text{Aut}(GF(q)))$, 则 $M \cap G$ 是 G 的极大子群且 $N_1 \cap M = PGL(2, p^m)$ 。因此, 由(iv) 得 $\mid G : M \mid = \mid N_1 : PGL(2, p^f) \mid$ 为素数幂。但是

$$\mid N_1 : PGL(2, p^m) \mid = \frac{p^f(p^f + 1)(p^f - 1)}{2p^m(p^m + 1)(p^m - 1)}$$

不可能是素数幂。

(B3) 若 $f = 1$, 则 $\text{Aut}(N_1) \cong PGL(2, p)$ 。

(B3.1) 当 $p^2 \neq 1(16)$ 时, $PSL(2, p)$ 有 $(2, 2)$ 型子群 K , 且所有的 $(2, 2)$ 型子群在 $PSL(2, p)$ 中共轭^[11]。于是由 Frattini 论断得 $G = N_1 N_c(K)$ 。设 M 是 G 的极大子群且 $M \geq N_c(K)$, 则 $N_1 \not\subseteq M$ 。又 $N_{N_1}(k) \cong A_4$ ^[11], 所以 M 非超可解。

若 $G = PGL(2, p)$, 则由引理 5 得 $M \cap PSL(2, p) \cong A_4$ 。由 M 的指数为素数幂得 N_1 只有 3 个素因子, 结合文[13] 引理 2.3 得 N_1 同构于 $PSL(2, 4), PSL(2, 7), PSL(2, 8), PSL(2, 9)$ 或 $PSL(2, 17)$, 由文[8] 可得结果。若 $G = PSL(2, p)$ 则 $M = A_4$ 或 A_5 ^[11]。当 $M = A_4$ 时与 $G = PGL(2, p)$ 时同理可得。当 $M = A_5$ 时, 设 $\mid G : M \mid = r^i$, 其中 r 为素数, 则由 Sylow 定理得 $PSL(2, p)$ 的 Sylow r -子群的个数 $kr + 1$ 为 60 的因子。显然 $k > 0$, 对 30 以下的素数逐个检验得 r 可能为 3, 5, 7, 11, 19, 29。于是, 由素数 p 为 $\mid PSL(2, p) \mid$ 的因子得 p 可能为 5, 7, 11, 19, 29, 由文[8] 可得结果。

(B3.2) 当 $p^2 \equiv 1(16)$ 时, 设 M 是 G 的极大子群且 $N_1 \not\subseteq M$, 则 $N_1 \cap M$ 超可解^[10]。所以 $N_1 \cap M$ 为 p 阶群, z 阶循环群, $2z$ 阶二面体群, 其中 $z \mid ((p \pm 1)/2)$ ^[11]。另外, 若 $z = 2$, 则 4 阶二面体群 D_4 在 N_1 中的正规化子同构于 S_4 ^[11], 从而 $N_1 \cap M$ 包含同构于 S_4 的子群, 这是一个矛盾。其他情况, 和引理 5 证明第(vi) 步类似可得 M 超可解。另外, 显然 $p^2 \equiv 1(16) \Leftrightarrow p \equiv \pm 1(8)$ 。

(c) 情形 $N_1 = PSL(3, q)$: 因为 $PSL(3, 2) \cong PSL(2, 7)$, 所以假定 $(n, q) \neq (3, 2)$ 。设 $L = (Z_{q-1})^2/Z_d S_3, d = (3, q - 1)$, 则从文[9, 引理 2.1] 证明的步骤(2) 的情形 $n = 3$ 知 $M = N_c(L)$ 是 G 的一个极大子群。显然 M 非超可解, 故 M 有素数幂广义补。但从文[12] 表 1 和表 3 得 M 在 G 中没有广义补。

(d) 情形 $N_1 = PSL(n, q), n \geq 5$ 且是素数: 若 $(n, q) = (5, 2)$, 则由文[8] 可知: 若 $G = PSL(5, 2)$ 则 G 有非超可解且指数为 155 的极大子群 $M = 2^6 : (S_3 \times PSL(3, 2))$; 若 $G = \text{Aut}(PSL(5, 2))$ 则 G 有非超可解且指数为 $2^4 \cdot 31$ 的极大子群 $M = PSL(4, 2) : 2$ 。因此, $(n, q) \neq (5, 2)$ 。此时分 G 是否包含图自同构这两种情况来讨论。

(A) 若 G 不包含图自同构, 则 $N_c(P_2)$ 是 G 的极大子群。由文[12] 知 P_2 为 2-维全奇异子空间的稳定子, 所以 P_2 必有同构于 $PSL(n - 2, q)$ 的截断(即子群的商群), 于是 $N_c(P_2)$ 非超可解。但由文[12] 的表 1 和表 3 可知 $N_c(P_2)$ 没有广义补, 于是不可能含有素数幂指数。这里抛物子群 P_2 显然非超可解。

(B) 若 G 包含图自同构, 则 $M = N_c(P_{(n-1)/2} \cap P_{(n+1)/2})$ 是 G 的极大子群。再由文[12] 第 5 页可知 $P_{(n-1)/2} \cap P_{(n+1)/2}$ 必有同构于 $PSL((n + 1)/2, q)$ 的截断, 于是 M 非超可解。故 M 有素数幂广义补。但从文[12] 的表 1 和表 3 可得 M 在 G 没有广义补。

(e) 情形 $N_1 = M_{23}, G = M_{11}$ 或 $U_4(2) \cong S_4(3)$: 此时从文[8] 第 18, 26 和 71 页可知 G 有非超可解极大子群 M 使 $\mid G : M \mid$ 非素数幂。

参考文献:

[1] 黎先华. 关于 $[m, n, p_1, p_2, \dots, p_s]$ 指数型群[J]. 数学学报, 1992, 33(2): 273 - 278.
LI X H. On $[m, n, p_1, p_2, \dots, p_s]$ index type groups [J]. Acta Mathematica Sinica, 1992, 33(2): 273 - 278.

- Vibration, 2013, 332: 282 – 293.
- [5] LU Z R, LIU J K. Identification of both structural damages in bridge deck and vehicular parameters using measured dynamic responses [J]. Computers & Structures, 2011, 89: 1397 – 1405.
- [6] MARES C, SURACE C. An application of genetic algorithms to identify damage in elastic structures [J]. Journal of Sound and Vibration, 1996, 195: 195 – 215.
- [7] KARABOGA D, BASTURK B. A powerful and efficient algorithm for numerical function optimization Artificial Bee Colony algorithm [J]. Journal of Global Optimization, 2007, 39(3): 459 – 471.
- [8] KARABOGA D, BASTURK B. On the performance of Artificial Bee Colony(ABC) algorithm [J]. Applied Soft Computing, 2008, 8(1): 687 – 697.
- [9] SUN H, LUS H, BETTI R. Identification of structural models using a modified Artificial Bee Colony algorithm [J]. Computers and Structures, 2013, 116: 59 – 74.
- [10] DING Z H, LU Z R, HUANG M. Structural damage detection using Artificial Bee Colony algorithm with hybrid search strategy [J]. Swarm and Evolutionary Computation, 2016, 28: 1 – 13.
- [11] XU H J, DING Z H, LU Z R, et al. Structural damage detection based on Chaotic Artificial Bee Colony algorithm [J]. Structural Engineering and Mechanics, 2015, 55(6): 1223 – 1239.
- [12] ZIMMERMAN D C, KAOUK M. Structural damage detection in beam structures using a subspace rotation algorithm [J]. AIAA Journal, 1992, 34(12): 2341 – 2350.
- [13] YAN A J, SHAO H S, GUO Z. Weight optimization for case-based reasoning using membrane computing [J]. Information Science, 2014, 287: 109 – 120.
- [14] 袁颖, 林皋, 闫东明, 等. 基于残余力向量法和改进遗传算法的结构损伤识别研究 [J]. 计算力学学报, 2007, 24(2): 224 – 230.
- YUAN Y, LIN G, YAN D M, et al. Damage identification based on residual force vectors and improved genetic algorithm [J]. Chinese Journal of Computational Mechanics, 2007, 24(2): 224 – 230.
- [15] KANG F, LI J J, XU Q. Damage detection based on improved particle swarm optimization using vibration data [J]. Applied Soft Computing, 2012, 12: 2329 – 2335.

(上接第61页)

- [2] 高百俊, 张佳, 缪龙. 给定阶子群的 N -次正规性对群结构的影响 [J]. 中山大学学报(自然科学版), 2016, 55(5): 27 – 30.
- GAO B J, ZHANG J, MIAO L. The influence of N -subnormal subgroups with certain order on the structure of finite groups [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2016, 55(5): 27 – 30.
- [3] 郭桂容, 赵涛. 弱 S -嵌入子群与有限群的超可解 [J]. 中山大学学报(自然科学版), 2013, 52(4): 25 – 28.
- GUO G R, ZHAO T. On the supersolubility and weakly S -embedded subgroups of finite groups [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2013, 52(4): 25 – 28.
- [4] 何宣丽, 李祥明, 王燕鸣. 含有 C^* -正规子群的有限群 [J]. 中山大学学报(自然科学版), 2009, 48(5): 12 – 15.
- HE X L, LI Y M, WANG Y M. Finite groups with some C^* -normal subgroups [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2009, 48(5): 12 – 15.
- [5] GURALNICK R. Subgroups of prime power index in a simple group [J]. J Algebra, 1983, 81: 304 – 311.
- [6] 郭秀云. 非幂零极大子群指数为素数幂的有限群 [J]. 数学年刊, 1994, 15A(6): 721 – 725.
- GUO X Y. Finite groups with non-nilpotent maximal subgroups of prime power index [J]. Chinese Annals of Mathematics, 1994, 15A(6): 721 – 725.
- [7] DOERK K, HAWKES T. Finite soluble groups [M]. New York, Berlin: Walter de Gruyter, 1992.
- [8] CONWAY J, NORTON S, PARKER R, et al. Atlas of finite groups [M]. Oxford, New York: Oxford Univ Press (Clarendon), 1985.
- [9] BAUMEISTER B. A characterization of the finite soluble groups [J]. Arch Math, 1999, 72: 167 – 176.
- [10] LI S, SHI W. A note on the solvability of groups [J]. J Algebra, 2006, 304: 278 – 285.
- [11] HUPPERT B. Endliche Gruppen I [M]. New York, Berlin Heidelberg: Springer-verlag, 1979.
- [12] LIEBECK M W, PRAEGER C E, SAXL J. The maximal factorizations of the finite simple groups and their automorphism groups [M]. Washington DC: Amer Math Soc, 1990.
- [13] ZHANG L, SHI W. Recognition of some simple groups by their noncommuting graphs [J]. Monatsh Math, 2010, 160: 211 – 221.