DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2017.01.014

双优无标度网络模型*

马飞，姚兵
（西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州 730070）

摘 要： 基于标准的无标度网络模型，首先扩展了网络增长的“优先连接机制”原则，从更一般的情形出发，设立不同约束条件下的点优先连接概率，既而建立了更一般的网络动力系统所符合的偏微分方程，给出无标度网络的一个拓扑性质。然后，给出了一种更加符合现实的择优概率，接着，建立了一类更一般的网络演化模型，并讨论了它的无标度特性，得到它的幂率指数 γ 在 1 ~ 4 之间。

关键词： 无标度网络模型；动态演化；偏微分方程；六度分离

中图分类号： O157.5 **文献标志码：** A **文章编号：** 0529－6579（2017）01－0085－08

Double preferential scale-free network models

MA Fei, *YAO Bing*
(College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Based on the “classic” scale-free network model, the network growth principle (preferential attachment mechanism) is extended. Starting from a more general situation, some vertex-preferential attachment probability in different constraint conditions are established, and then the partial differential equation satisfied a more general network dynamic system is set up, and also another important topological property of scale-free network is found. Then a much realistic preferential attachment probability is presented. Finally, a more general network model is generated. By discussing its scale-free property, that scale-free parameter γ ranges from 1 to 4 is captured.

Key words: scale-free network model; dynamic evolution; partial differential equation; the six degrees of separation

我们生活的世界中充满了无数的网络，如细胞中的新陈代谢网、大脑中的神经网、生态系统中的食物链网、社会关系网络、科研合作网络、经贸互惠网络、互联网、万维网以及电力网和交通运输网等等。这些网络都能被抽象成网络模型——图，起初研究者们运用图论的方法做研究，但是图论中研究的图形大多都是规则的、单一的，但真实网络的结构不仅很复杂的，而且构成网络的节点数目也是很庞大的，这样一来，网络研究对传统经典图论的发展提出了新的要求。上世纪 50 年代，Erdös 等基于经典图论的研究，提出了随机网络模型（ER 模型）该模型能很好的体现网络的随机性，但是节点的度（与节点相连接的边的数目）之间相差不大，几乎相等，度分布服从 Poisson 分布，其图像是一条钟型曲线。显然，真实网络中节点的度并不是相等的。为了解释蕴含在网络中的规律，Watts 等[1-2]提出了小世界网络模型，该模型在继承了随机网络模型的随机性后，出现了新的网络拓扑性质：属于该网络模型中初始节点的度相对要大一些，它的度分布呈现出指数衰减。1999 年，基于

* **收稿日期：** 2016－05－18
基金项目： 国家自然科学基金（61662066，61163054，61363060）
作者简介： 马飞（1992 年生），男；**研究方向：** 动态图论与复杂网络；E-mail：mafei123987@163.com
通信作者： 姚兵（1956 年生）；男；**研究方向：** 动态图论与复杂网络；E-mail：yybb918@163.com

万维网拓扑结构的研究，Barabási 等[3]发现钟型曲线消失了，出现了一条递减的曲线，为了刻画这一结果，他们首次提出了无标度网络模型（BA－模型），该模型满足幂率分布式

$$P(k) \approx k^{-\gamma} \tag{1}$$

其中 γ 叫做无标度指数，它的取值范围是 $2 < \gamma < 3$。在他们首创性的研究工作之后，复杂网络的研究得到了众多科研人员的重视，经过大量研究后发现：生活中大量的网络都具有无标度特性（scale-free property），即服从幂率分布（1），但部分真实网络的幂律指数 γ 的取值范围却超出了 2～3，落在 1～4 之间[4]。通过计算机仿真模拟后，确实证明了这一点[5-7]。

近年来，国内外的研究人员对 BA－模型进行了不同层次的推广和拓展，得到的成果颇多。但在这些研究中，人们认同网络中存在“先到先得，富者越富，适者更富”现象。针对这种现象，总结得出具有无标度特性的网络演化（增长）必须满足 2 条性质：均匀增长和择优连接。特别是择优连接方式对一个演化的网络是否具有无标度特性起到决定性的作用，已证实运用线性择优连接方式将会得到无标度网络，非线性的择优连接方式将会影响到网络的度分布，使其不再服从幂率分布[8]。

1 一般形式的动态微分方程

在 Barabási 等[3]提出无标度网络模型（BA－模型）之后，研究人员不论是采取理论研究手段，还是采用计算机仿真模拟，他们对网络动态演化的描述与刻画都存在着相似之处[4]，都是讨论随着时间的延续，网络中不断地会有外界新的节点进入，同时，网络自身内部也发生着变化（如：网络中未连边的节点之间由于某种联系而产生新的连边），随着这种演化方式的进行，网络的规模会变得越来越庞大，但是这种增长方式不可能无休止地进行下去，在历经一段时间的增长后，网络的规模就会趋于稳态或衰退，即网络中出现节点“湮灭”和旧边被“删除”。对一个最初具有 m_0 个节点的网络 $N(0)$ 而言，假设它的动态演化是连续的，t 时刻后，对网络 $N(t)$ 中一个度为 $k_i(t)$ 的节点，依据事件的独立性给出一个动态方程[9]：

$$\frac{\partial k_i(t)}{\partial t} = f^*(t) + g^*(t) + h^*(t) + z^*(t) + \varphi(t) \tag{2}$$

方程（2）右端有 5 个功能函数：加点函数（优先连接函数）$f^*(t) = f(ap_1(t)m, t, k_i(t), \prod_1(k_i))$ 的含义是：t 时刻有 a 个“新”节点进入到网络 $N(t-1)$ 中，每个“新”节点与网络 $N(t-1)$ 中已存在的节点间连接产生 $p_1(tm$ 条新边$(0 < p_1(t) < 1)$，度数为 $k_i(t)$ 的顶点获得与“新”节点连边的概率（优先连接概率）为 $\prod_1(k_i)$。删点函数 $g^*(t) = g(p_2(t)b, t, k_i(t), \prod_1(k_i))$ 的含义是：在网络快速增长一段时间后，t 时刻有 $p_2(t)b(0 < p_2(t) < 1)$ 个“旧”节点从网络 $N(t-1)$ 中消失，每一个“旧”节点被删除的概率（反择优概率）为 $\prod_2(k_i)$。加边函数 $h^*(t) = h(p_3(t)r, t, k_i(t), \prod_3(k_i))$ 的含义是：每一时刻都有 $p_3(t)r(0 < p_3(t) < 1)$ 条“新”边在已存于网络中的节点间产生，每条“新”边产生的过程中，其关联的两个节点的选取符合概率（优先连接概率）$\prod_3(k_i)$。删边函数 $z^*(t) = z(p_4(t)s, t, k_i(t), \prod_4(k_i))$ 的含义是：每一时刻都有 $p_4(t)s(0 < p_4(t) < 1)$ 条已存于网络中节点间的“旧”边被删除，在每条“旧”边被删除的过程中，其关联的两个节点的选取符合概率（反择优概率）$\prod_4(k_i)$。外界扰动函数 $\varphi(t)$ 的含义是：网络演化过程中可能受到来自外界其他因素的影响。一般地，网络的演化是在内部因素（加边，删边，删点）与外部因素（加点，扰动）共同作用下完成的。

设方程（2）的解为 $k_i(t) = \theta(t, t_i, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r)$，其中参数 $\alpha_i(i = 1, 2, \cdots, r)$ 与时间变量 t 和 t_i 无关。进一步，得

$$P(k_i(t) < k) = P(t_i > \theta^{-1}(t, t_i, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r)) \tag{3}$$

方程（3）中的参数 $\beta_i(i = 1, 2, \cdots, r)$ 与时间变量 t 和 t_i 均无关，上述方程（3）中的记号 $\theta^{-1}(t, t_i, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r)$ 表示函数 $k_i(t)$ 的反函数。解得网络 $N(t)$ 中顶点度数为 k 的概率

$$P(k) = \frac{\partial P(k_i(t) < k)}{\partial k} = \frac{\partial}{\partial k} P(t_i > \theta^{-1}(k_i(t), t, \beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r)) \tag{4}$$

本文以文献［6，10－12］中的结论来解释由方程（2）所建立的模型，尝试对复杂网络进行综合性的研究。包括演化网络所符合的动态微分方程、择优连接方式、如何进行网络之间比较、如何优化网络等方面，并建立一种幂律指数 γ 的取值范围在 1 到 4 之间的无标度网络模型（双优无标度网络模型）。

2　设立反择优连接的标准

通过对大量现实网络的研究，人们认识到几乎所有的网络都表现出无标度特性，为了更好地模拟无标度网络，从理论上出发，研究者们建立研究方法，并通过计算机进行仿真模拟。然而经验告诉我们：网络的动态演化中包含增长与衰退，许多研究学者都认为网络以“择优”方式进行增长，以“反择优”方式进行衰退。在 Barabási 等[3]首次提出线性择优增长模型之后，研究者们依此为基础，对“择优”方式进行了不断地改进、完善，相应地建立了不同的网络模型，从不同的侧重点进行刻画、模拟现实生活中已存在的网络，并对网络的动态演化特征做出一些相关的预测，同时也为建立新的更加健全的网络模型提供理论支持。

Krapivisky 等[8]证明了线性择优方式能够保证增长后的网络拥有无标度特性，非线性择优方式将会破坏网络的无标度特性。本文针对线性择优概率 $\prod$ 提出线性反择优概率 $\overline{\prod}$ 的建立必须符合以下几条标准（全体事件记为 I, 基本事件记为 i）：

1）正性：对任意基本事件 $i \in I, \overline{\prod} \geqslant 0$；

2）正则性：$\sum\limits_{i \in I} \overline{\prod}_i = 1$；

3）可列可加性：若 $i_1, i_2, \cdots, i_n, \cdots$ 互不相容，则 $\overline{\prod}_{\cup_{j=1}^{\infty} i_j} = \cup_{j=1}^{\infty} \overline{\prod}_{i_j}$；

4）反性：对任意的基本事件 $i, j \in I$, 若 $\prod_i \geqslant \prod_j$, 则 $\overline{\prod}_i \leqslant \overline{\prod}_j$；

5）同阶性：对 $\prod_i$ 与 $\overline{\prod}_i$, 有 $\lim\limits_{t\to\infty} \dfrac{\prod}{\overline{\prod}} = o(c)$。

3　满足方程（2）的网络模型

在本文中, t 时刻的网络模型记为 $N(t)$, 它的节点集合和边集合分别是 $V(t)$ 和 $E(t)$, 网络模型 $N(t)$ 的节点个数是 $n_v(t) = |V(t)|$, 它的边数目是 $n_e(t) = |E(t)|$, $n_i(t)$ 表示 $N(t)$ 中节点度数为 k_i 的节点数目。

3.1　陈庆华等模型

陈庆华等模型的演化算法[13]：步骤 1、在已存在的节点中添加 l 条新边：随机选择一个节点作为与新边连接的起始点，点 i 被选择作为新边另一节点的概率满足

$$\prod(k_i, t) = \frac{k_i + \alpha}{\sum_j (k_j + \alpha)} \tag{5}$$

重复操作 l 次, 所有节点具有一个初始的吸引度 $\alpha \geqslant 0$; 步骤 2、新增一个度为 m 的节点: 新增的节点连接已存于系统中的节点 i 的概率是(5)式中的 $\prod(k_i, t)$; 步骤 3、重新连接系统中已经存在的 n 条边: 随机的选择一个节点 i 与连接 i 的边 l_{ij}, 然后断开节点 i, 重新连接节点 s 与 j 得到边 l_{sj}, 其中节点 s 被选择的概率由（5）式决定。在方程（2）中, 取 $f^*(t) = m\prod(k_i, t)$, $g^*(t) = 0$, $h^*(t) = (l+n)\prod(k_i, t) + l/n_v(t)$, $z^*(t) = -n\frac{1}{n_v(t)} - (l+n)\frac{1}{n_v(t)}\prod(k_i, t)$, $\varphi(t) = 0$（解释上述每一项: $h^*(t)$ 中的 $(l+n)\prod(k_i, t)$ 表示节点 i 依择优概率 $\prod(k_i, t)$ 被选作所加边的另一节点时引起度的变化, $l/n_v(t)$ 表示节点 i 依随机概率 $1/n_v(t)$ 被选作所加边的起始节点时引起度的变化。$z^*(t)$ 中的 $-n/n_v(t)$ 表示节点 i 依随机概率 $1/n_v(t)$ 被选作所删边的另一节点时引起度的变化, $-(l+n)\frac{1}{n_v(t)}\prod(k_i, t)$ 表示节点 i 依择优概率 $\prod(k_i, t)$ 被选作所删边的另一节点时引起度的变化）。可得满足上述过程的动态方程

$$\frac{\partial k_i(t)}{\partial t} = (l-n)\frac{1}{n_v(t)} + (l+m+n)\cdot \frac{k_i + \alpha}{\sum_j k_j + \alpha} - (l+n)\frac{1}{n_v(t)}\frac{k_i + \alpha}{\sum_j k_j + \alpha} \tag{6}$$

令 $a = \dfrac{l+m+n}{2l+2m+\alpha}$, 当 $t \to \infty$ 时，可知

$$\frac{\partial k_i(t)}{\partial t} = a\frac{k_i + \alpha}{t} + \frac{l-n}{t}$$

将初值 $k_i(t_i) = m$ 代入上式，解得 $k_i(t) = (m+\alpha)\left(\dfrac{t}{t_i}\right)^a - \alpha$，进而得

$$P(k_i(t) < k) = P\left(t_i > t\left(\frac{k+\alpha}{m+\alpha}\right)^{-\frac{1}{a}}\right) = 1 - P\left(t_i \leqslant t\left(\frac{k+\alpha}{m+\alpha}\right)^{-\frac{1}{a}}\right) \tag{7}$$

由（7）式可得

$$P(k) = \frac{\partial P(k_i(t) < k)}{\partial k} = \frac{1}{a}\left(\frac{t}{t+m_0}\right)\left(\frac{1}{m+\alpha}\right)(k+\alpha)^{-\gamma}$$

其中幂率指数 $\gamma = \dfrac{1}{a} + 1 = \dfrac{2l+2m+\alpha}{l+m+n} + 1$。对（6）式求和，得到

$$\sum n_i(t)\frac{\partial k_i(t)}{\partial t} =$$

$$(l-n)+(l+m+n)-(l+n)\frac{1}{n_v(t)} \quad (8)$$

当 $t\to\infty$ 时,$1/n_v(t)\to 0$,有 $\sum n_i(t)\frac{\partial k_i(t)}{\partial t}\propto 2l+m$，结果是一个常数。

3.2 梁洪振等模型

梁洪振等模型的演化算法[14]：步骤1 和步骤2 与 BA－模型相同[3]，步骤3、删除 c 条旧边:节点 i 依反择优概率 $p^{-1}(k_i)=\frac{1-\prod_i}{n_v(t)-1}$ 被选择。在方程（2）中,取 $f^*(t)=m\prod(k_i,t)$,$g^*(t)=0$,$h^*(t)=n[\prod(k_i)\times 1+\sum_{j\neq i}\prod(k_j)\prod(k_i)]$,$z^*(t)=-c[p^{-1}(k_i)\times 1+\sum_{j\neq i}p^{-1}(k_j)\prod(k_i)]$以及 $\varphi(t)=0$，得到动态方程

$$\frac{\partial k_i(t)}{\partial t}=m\prod(k_i)+ n[\prod(k_i)\times 1+\sum_{j\neq i}\prod(k_j)\prod(k_i)]- c[p^{-1}(k_i)\times 1+\sum_{j\neq i}p^{-1}(k_j)\prod(k_i)] \quad (9)$$

将初 $k_i(t_i)=m$ 代入上式，解得 $k_i(t)=m\left(\frac{t}{t_i}\right)^a$，进而得

$$P(k_i(t)<k)=P\left(t_i>t\left(\frac{k}{m}\right)^{-\frac{1}{a}}\right)= 1-P\left(t_i\leqslant t\left(\frac{k}{m}\right)^{-\frac{1}{a}}\right) \quad (10)$$

由（10）式可得

$$P(k)=\frac{\partial P(k_i(t)<k)}{\partial k}=\frac{m^\gamma}{a}\left(\frac{t}{t+m_0}\right)k^{-\gamma}$$

其中幂率指数 $\gamma=\frac{1}{a}+1=\frac{2(m+n-c)}{m+2a}+1$。对（9）式求和，得到

$$\sum n_i(t)\frac{\partial k_i(t)}{\partial t}= \sum\left[-\frac{2c}{t}+\frac{m+2n}{2(m+n-c)t}k_i\right]= m+2n-2c \quad (11)$$

和式（11）的结果是一个常数。

3.3 贾秀丽等模型

贾秀丽等[15]模型的演化算法：开始时（$t=0$）网络内至少有 $m_0>1$ 个少量孤立点,在此以后的每一时刻都会发生如下操作:步骤 1、生长择优:增加一个新节点,新节点与网络中原有的 $m(m<m_0)$ 个不同节点相连接,新节点与旧节点相连的概率为 $\prod_i=k_i/\Sigma_j k_j$;步骤 2、在原网络中随机的删除 c 个旧节点:随机的删除原网络中的 c 个节点,以及与这 c 个节点连接的边;步骤 3、在原网络中增加 r 条新边:新边的两个节点均以择优概率被选择;步骤 4、在原网络中删除 n 条旧边:被删除的旧边的两个节点均以反择优概率 $p^{-1}(k_i)=\frac{1-\prod_i}{n_v(t)-1}$ 来选择。依据上述条件在方程（2）中，取

$$f^*(t)=m\prod(k_i,t),g^*(t)=-\frac{ck_i}{n_v(t)},$$

$$h^*(t)=r[\prod(k_i)\times 1+\sum_{j\neq i}\prod(k_j)\prod(k_i)],$$

$$z^*(t)=-n[p^{-1}(k_i)\times 1+\sum_{j\neq i}p^{-1}(k_j)\prod(k_i)]$$

以及 $\varphi(t)=0$，易得网络动态演化满足下面的方程

$$\frac{\partial k_i(t)}{\partial t}=m\prod(k_i)-c\frac{k_i}{n_v(t)}+ r[\prod(k_i)\times 1+\sum_{j\neq i}\prod(k_j)\prod(k_i)]- n[p^{-1}(k_i)\times 1+\sum_{j\neq i}p^{-1}(k_j)\prod(k_i)] \quad (12)$$

（解释上式每一项的含义，第 1 项新节点加入到网络中引起 k_i 的变化,第 2 项是随机删除节点引起 k_i 的变化,第3 项是网络择优加边引起 k_i 的变化（第一部分:节点 i 依择优概率 $\prod(k_i)$ 被选作所加边的起始节点时引起度发生变化;第二部分:节点 i 依择优概率 $\prod(k_i)$ 被选作所加边的另一节点时引起度发生变化）,第4 项是网络反择优删除边引起 k_i 的变化（第一部分:节点 i 依反择优概率 $p^{-1}(k_i)$ 被选作所删边的起始节点时引起度发生变化;第二部分:节点 i 依反择优概率 $p^{-1}(k_i)$ 被选作所删边的另一节点时引起度发生变化））。在 t 时刻节点的平均度为

$$[k(t)]=\frac{2n_e(t)}{n_v(t)}=\frac{2[m-c[k(t)]+r-n]}{1-c}$$

因此 $[k(t)]=\frac{2n_e(t)}{n_v(t)}=\frac{2(m+r-n)}{1+c}$,把 $n_v(t)=(1-c)t$（t 充分的大）和节 点的平均度代入上式可得

$$n_e(t)=\frac{2(m+r-n)(1-c)}{1+c}t$$

将 $n_v(t)$、$n_e(t)$ 代入方程（12），得到一阶近似微分方程

$$\frac{\partial k_i(t)}{\partial t}=\frac{m+2r-cm+2cn}{2(m+r-n)(1-c)}\frac{k_i}{t}-\frac{2n}{1-c}\frac{1}{t} \quad (13)$$

令 $a=\frac{m+2r-cm+2cn}{2(m+r-n)(1-c)}, b=-\frac{2n}{1-c}$，初始条件为 $k_i(t_i)=m$，则有

$$k_i(t)=\left(m-\frac{b}{a}\right)\left(\frac{t}{t_i}\right)^a-\frac{a}{b}$$

因此

$$P(k_i(t)<k)=P\left(t_i>t\left(\frac{m+b/a}{k+b/a}\right)^{-\frac{1}{a}}\right)=$$

$$1-P\left(t_i\leqslant t\left(\frac{m+b/a}{k+b/a}\right)^{-\frac{1}{a}}\right) \qquad (14)$$

所以节点的度分布：

$$P(k)=\frac{\partial P(k_i(t)<k)}{\partial k}=$$

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{t}{m+t}\cdot\frac{(m+b/a)^{\frac{1}{a}}}{(k+b/a)^{\frac{1+a}{a}}}$$

其中幂率指数

$$\gamma=\frac{1}{a}+1=\frac{2(m+r-n)(1-c)}{m+2r-cm+2cn}+1$$

对（12）式求和，得到

$$\sum n_i(t)\frac{\partial k_i(t)}{\partial t}=\sum -\frac{2c}{t}+$$

$$\sum\frac{m+2r}{2(m+r-n)t}k_i-c\sum\frac{k_i}{n_v(t)} \qquad (15)$$

当 $t\to\infty$ 时，

$$\sum n_i(t)\frac{\partial k_i(t)}{\partial t}=$$

$$\sum -\frac{2c}{t}+\sum\frac{m+2r}{2(m+r-n)t}k_i-c\sum\frac{k_i}{n_v(t)}=$$

$$m+2r-2n$$

我们得到一个结论：在网络动态演化的过程中，对相应的动态方程（2）求和后将等于一个常值 M，并且 M 就等于每一时刻网络的动态变化值。

4　双优无标度网络模型

针对现实生活中确实存在幂律指数 $\gamma>3$ 的无标度网络（例如：Sexual Contacts 网络的幂律指数 $\gamma=3.4$[16]，本文建立一类网络模型，它不仅能很好的说明该类无标度网络的存在性，而且还可以包含经典的 BA 模型。基于构造 BA 模型的均匀增长、优先连接算法，几乎当前所有的网络模型都认为新节点的加入、新边的产生都完全地遵循优先连接，旧节点的删除、旧边的删除都绝对地遵循反择优删除。但是绝对的事实并非都完全成立，例如：在科学家合作网络中，刚出道的年轻研究者往往渴望与著名专家合作，进行科研（只要有机会），但在随机的情况下有时会与一位同样年轻的研究者进行合作。这种现象在网络演化模型中可以解释为：刚进入网络的新节点，在采用优先连接概率与已存在于网络中的旧节点连边时，会随机的与节点度数不大（甚至很小）的节点进行连边运算，但是连边的过程中优先连接概率起主要的支配作用。同样的道理，在删除旧边的过程中，并不是所有被删除的边都采用反择优概率，偶尔也会出现随机删边的现象，但反择优概率在删边运算中起决定作用[17-20]。

鉴于此种现象的确存在，本文提出了优选优先连接概率与优选反择优删除概率。如下：

①优选优先连接概率

$$\prod_1=\alpha\prod_{11}+(1-\alpha)\prod_{12}$$

其中 $\prod_{11}$ 表示优先连接概率，$\prod_{12}$ 表示随机连接概率，参数 $\alpha(1/2\leqslant\alpha\leqslant1)$ 意指“优选”，即在概率 $\prod_1$ 中，$\prod_{11}$ 起支配作用。

②优选反择优删除概率

$$\prod_2=(1-\beta)\prod_{21}+\beta\prod_{22}$$

其中 $\prod_{21}$ 表示反择优概率，$\prod_{22}$ 表示随机删除概率，参数 $\beta(0\leqslant\beta\leqslant1/2)$ 意指“优选”，即在概率 $\prod_2$ 中，$\prod_{21}$ 起支配作用。

按照上面的优选优先连接概率与优选反择优删除概率，本文构造了如下的双优无标度网络模型 $N(t)$：初始网络 $N(0)$ 是具有 m_0 个节点、n_0 条边的简单连通图。从 $t>1$ 时刻起，网络模型将执行以下两个操作进行演化。

1）优选优先连接（$1/2\leqslant\alpha\leqslant1$）：$t$ 时刻有 a 个节点加入网络 $N(t-1)$ 中，每个新节点分别采用优选优先连接概率 $\prod_1$ 与已存在于网络模型中的 m 个不同节点连边。度数为 k_i 的旧节点获得与新节点连边的概率满足如下关系：

$$\prod_1=\alpha\prod_{11}+(1-\alpha)\prod_{12}=$$

$$\alpha\frac{k_i}{\sum_j k_j}+\frac{1-\alpha}{|V(t-1)|}$$

2）优选反择优删除（$0\leqslant\beta\leqslant1/2$）：$t$ 时刻有 b 条边从网络 $N(t-1)$ 中分别采用优选反择优概率 $\prod_2$ 被删除。每条被删除边的一个节点随机选取，选择另一个节点时按优选反择优概率

$$\prod_2=(1-\beta)\prod_{21}+\beta\prod_{22}=$$

$$\frac{1-\beta}{|V(t-1)|}\left(1-\frac{k_i}{\sum_j k_j}\right)+\frac{\beta k_i}{2|E(t-1)|}$$

经历这样的 t 次演化后，网络模型 $N(t)$ 具有 m_0

$+at$ 个节点和 $n_0+(am-b)t$ 条边。显然当参数 $a=1,b=0,\alpha=1,\beta=0$ 时，该网络模型就退化成 BA－模型。

假设 k_i 是连续实变量，根据模型的演化机理，在方程（2）中，取加点函数

$$f^*(t)=am\prod_1=am\left(\alpha\frac{k_i}{\sum_j k_j}+\frac{1-\alpha}{m_0+at}\right)$$

删边函数

$$z^*(t)=\frac{b}{n_0+amt-bt}+b\prod_2=\frac{b}{n_0+amt-bt}+b\frac{(1-\beta)}{m_0+at-1}\left(1-\frac{k_i}{\sum_j k_j}\right)+\frac{b\beta k_i}{2(n_0+amt-bt)}$$

删边函数 $z^*(t)$ 中的第 1 项 $b/\{n_0+amt-bt\}$ 表示节点 i 被随机选中作为起始节点时引起度的变化，第 2 项 $b\prod_2$ 表示节点 i 被采用优选反择优删除概率选中作为另一节点时引起度的变化，$g^*(t)=h^*(t)=\varphi(t)=0$。则有如下动态方程：

$$\frac{\partial k_i(t)}{\partial t}=am\alpha\frac{k_i}{\sum_j k_j}+\frac{am(1-\alpha)}{m_0+at}-\frac{b}{n_0+amt-bt}-\frac{b\beta k_i}{2(n_0+amt-bt)}-b\left(1-\frac{1}{m_0+at}\right)\frac{1-\beta}{m_0+at-1}\left(1-\frac{k_i}{\sum_j k_j}\right)\quad(16)$$

进一步可得：

$$\frac{\partial k_i(t)}{\partial t}=\frac{(am\alpha-b\beta)k_i-2b}{2(n_0+amt-bt)}+\frac{am(1-\alpha)}{m_0+at}-\frac{b(1-\beta)}{m_0+at}\left[1-\frac{k_i}{2(n_0+amt-bt)}\right]=\left[\frac{am\alpha-b\beta}{2(n_0+amt-bt)}+\frac{b(1-\beta)}{2(m_0+at)(n_0+amt-bt)}\right]k_i+\left[\frac{am(1-\alpha)}{m_0+at}-\frac{b}{n_0+amt-bt}-\frac{b(1-\beta)}{m_0+at}\right]=M(t)k_i+R(t)$$

在初始条件 $k_i(t_i)=m$ 下，上述一阶微分方程的通解为：

$$k_i(t)=mA(t)\left(\frac{t}{t_i}\right)^{h/l},\quad A(t)=O\left(\exp\left(-\frac{1}{t}\right)\right)\quad(17)$$

其中 $h=am\alpha-b\beta$，$l=2(am-b)$。网络中任选一个节点度数为 $k_i(t)$ 且不超过 k 的概率可以被写成如下：

$$P(k_i(t)<k)=P\left(t_i>t\left(\frac{mA(t)}{k}\right)^{l/h}\right)\quad(18)$$

假设插入“新”节点到网络中的时间 t 服从均匀分布，即 $P(t_i)=1/(m_0+t)$，便可得到节点的度分布函数

$$P(k)=\frac{\partial P(k_i(t)<k)}{\partial k}=\frac{l(mA(t))^{l/h}t}{h(m_0+t)}\cdot\frac{1}{k^{l/h+1}}\quad(19)$$

当 t 充分大时，

$$P(k)\approx\frac{l(mA(t))^{l/h}}{h}\cdot\frac{1}{k^{l/h+1}}$$

网络度分布服从幂率分布，且幂率指数

$$\gamma=l/h+1=1+\frac{2(am-b)}{am\alpha-b\beta}$$

现对该双优无标度网络模型的幂律指数 $\gamma=l/h+1$ 进行分析。当 $\alpha=1/2,\beta=1/2$ 时，$\gamma=l/h+1=4$；当 $\alpha=1,\beta=0$ 时，$\gamma=l/h+1<3$；当 $\alpha=2/3,\beta=1/3$ 时，$\gamma=l/h+1=3$。所以幂律指数 γ 的范围为

$$1<1+\frac{2(am-b)}{am\alpha-b\beta}=\gamma\leqslant 4$$

对（16）式进行求和计算得

$$\sum n_i(t)\frac{\partial k_i(t)}{\partial t}=\sum\left[\frac{(am\alpha-b\beta)k_i-2b}{2(n_0+amt-bt)}+\frac{am(1-\alpha)}{m_0+at}-\frac{b\left(1-\beta\left(1-\frac{k_i}{2(n_0+amt-bt)}\right)\right)}{m_0+at-1}\right]\quad(20)$$

当 t 充分大时，（20）式的左端趋近于常数

$$m[a\alpha+(1-\alpha)]-b\left[\beta+\frac{1}{am-b}+(1-\beta)\right]$$

5 总结及问题

本文提出了一种新的择优连接规则，开始尝试用纯数学方法（动力系统＋偏微分方程）来解释网络演化的动态特征，通过对几类特殊动态网络演化模型的理论分析，进一步的说明用偏微分方程去刻画这一动力系统的必要性和重要性。然后依据本文中的分析建立了一类新的网络模型，不仅讨论了它的无标度特性，同时也验证了新发现——对动态方程（2）求和后值将是一个常数。作为今后的研究，提出下面的问题：

问题 1 如何优化网络？前期对择优率（增长）的大量研究都局限于线性结构，是否生活中的网络都是线性择优增长的？为此，本文分析了一类简单的非线性择优增长率

$$\prod_i = \frac{k_i^{\alpha}}{\sum_j k_j^{\alpha}} \tag{21}$$

很显然，当（21）式中的参数 $\alpha = 1$ 时，便是“经典的线性择优增长率”；当(21)式中的参数 $\alpha < 1$ 时，网络中“小”节点(度数相对小)获得新边的概率就会有增加，特殊情形下，有 $\lim_{\alpha \to 0} \prod_i = \frac{1}{N}$，网络中所有节点获得新边的概率是均等的，这便是“绝对的公平”；当(21)式中的参数 $\alpha > 1$ 时，网络中“大”节点(度数相对大)获得新边的概率就会有增加，特殊情形下，当参数 $\alpha \to \infty$ 时，网络中仅有度特别大的节点获得所有的新边，度小的节点基本上不可能获得新边。那么，参数 α 应该在 0 到 1 之间，但 $\varepsilon < \alpha < 1$ 中下确界 ε 是多少？不妨称它为“社会贫富稳态系数”，它可能会成为优化社会系统的一个重要参数。

问题 2　从不同的考察角度和侧重点，研究者们建立的各种模型都是基于方程(2)中概率参数 $p_i(t) = 1(i = 1,2,3,4)$，在这种极为特殊的情形下，问题的讨论将变得具体、可操作，但现实生活中网络的演化是相当复杂的，每一时刻进入网络的节点数目、从网络中“湮没”的节点数目、网络中删除“旧”边的数目、网络中重新连接边的数目等都是变化的，所以有必要研究方程(2)中诸概率参数 $p_i(t) = 1(i = 1,2,3,4)$ 不是定值的网络演化情形。

问题3　“任何两个陌生人至多通过6个人便可以相识”，这便是社会学研究中的六度分离定理(the six degrees of separation)。网络是由若干个节点及他们之间的相互关系织成的一张“大网”，节点越多、关系越复杂形成的网络结构就越庞杂，节点的“复杂性”影响网络的结构，反过来，整个网络的高效运行也会通过反馈作用影响节点。基于这样的事实，我们可以设立一个函数 $\Psi(k_i)$ 来表示节点 i 对网络的影响作用。简单地说，在一个运行良好的网络中，如果删除节点 i 给网络中其他节点 j 产生了某种程度的“障碍”作用，那我们就说节点 j 被节点 i 影响了，反过来，节点 j 也可以影响节点 i。一个显然的事实就是，节点 j 与节点 i 之间的相互影响程度并不是等价的，比如：一个大公司和与之有贸易往来的一个小企业，如果这个大公司的经济政策发生了改变，将会在很大程度上影响到这家小企业的切身利益(商业运行模式)，但是如果这家小企业发生了经济紧缩，对该大公司的利益影响相对要小。在一个网络中，一般而言距离越近的节点间的相互作用明显要高于距离远的之间的相互作用，鉴于此，我们把节点 i 对节点 j 的影响定义为 $\omega_{i\to j}^{r}$(r 表示节点 i 与节点 j 间的距离)，也称节点 i 对节点 j 的影响系数，$\omega_{i\to j}^{r} = \frac{|k_i - k_j|}{k_j^r}$($k_j^r$ 表示节点 j 度数的 r 次方)。那么，就可以定义节点 i 对整个网络的影响力为节点 i 对所有节点产生影响的影响系数之和

$$\Psi(k_i) = \sum_{0<r\leqslant 6} \omega_{i\to j}^{r} = \sum_{0<r\leqslant 6} \frac{|k_i - k_j|}{k_j^r}$$

注意根据六度分离定理，忽略与节点 i 距离超过 6 的节点的影响系数，那么就可以定义关于节点 i 的择优概率为

$$\prod_i = \frac{\Psi(k_i)}{\sum_j \Psi(k_j)} \tag{22}$$

特殊情形下 $\prod_i = \frac{\omega_{i\to j}^{1}}{\sum_s \omega_{s\to t}^{1}}$。在网络演化过程中往往产生加边与删边，目前的研究者往往采用“同一”的标准，为了更符合人们的惯性思维，根据本文对一个节点影响度的定义，便可以定义 r 距离中的最强影响引子与最弱影响引子。我们称节点 j 为节点 i 的 r 距离最强影响引子，如果 $\omega_{i\to j}^{r} \geqslant \omega_{i\to l}^{r}\ \gamma\ \forall l, d_{ij} = d_{il} = r$，$d_{ij}$ 表示节点 i 与 j 之间的距离)；节点 u 为节点 i 的 r 距离最弱影响引子，如果 $\omega_{i\to u}^{r} \leqslant \omega_{i\to l}^{r}\ \gamma\ \forall l, d_{iu} = d_{il} = r$，$d_{ij}$ 表示节点 i 与 j 之间的距离)。当网络中旧的边要被删除时，旧边的一个节点可以随机选择，完美的情形下另一个节点应该是 1 距离中的最弱影响引子，一般情形下另一个节点可按 1 距离中的反择优概率

$$P(j) = \frac{\omega_{i\to j}^{1}}{\sum_{u\in\vartheta_i} \omega_{i\to u}^{1}}$$

选取，式中 ϑ_i 表示与节点 i 之间距离为 1 的节点构成的集合(也称节点 i 的 1－邻居集)。如果网络中已存节点间要有新边产生时，新边的一个节点可以随机选择，完美的情形下另一个节点应该是 $r(1 < r \leqslant 6)$ 距离中的最强影响引子，一般情形下另一个节点可按 $r(1 < r \leqslant 6)$ 距离中的择优概率

$$P(j) = \frac{\omega_{i\to j}^{r}}{\sum_{u\in\vartheta_i^6} \omega_{i\to u}^{r}}$$

选取，式中 ϑ_i^6 表示与节点 i 之间距离为 $d(1 < d \leqslant 6)$ 的节点构成的集合(也称节点 i 的 d－邻 居集)。

参考文献：

［1］ WATTS D J, STROGATZ S H. Collective dynamics of small-world networks［J］. Nature, 1998, 393: 440－442.

[2] WATTS D J. Small worlds: the dynamics of networks between order and randomness [M]. Princeton: Princeton University Press, 1999.

[3] BARABÁSI A L, ALBERT R, JEONG H. Mean-field theory for scale-free random networks [J]. Physica A Statistical Mechanics & Its Applications, 1999, 272(1/2): 173-187.

[4] 刘浩广，蔡绍洪，张玉强. 无标度网络模型研究进展[J]. 大学物理，2008，27(4)：43-47.
LIU H G, CAI S H, ZHANG Y Q. The research on the scale-free networks model [J]. College Physics, 27(4): 43-47.

[5] YAO B, LIU X, ZHANG W J, et al. Applying Graph theory to the Internet of Things[C]// IEEE International Conference on High Performance Computing and Communications, 2013: 2354-2361.

[6] YAO B, YAO M, CHEN X E, et al. Research on edge-growing models related with scale-free small-world networks [J]. Applied Mechanics & Materials, 2014, 513-517: 2444-2448.

[7] YAO B, YANG C, YAO M, et al. Graphs as models of scale-free networks [J]. Applied Mechanics & Materials, 2012, 380-384: 2720-2723.

[8] KRAPIVSKY P L, REDNER S, LEYVRAZ F. Connectivity of growing random networks [J]. Physics, 2000, 85(21): 4629-4632.

[9] MA F, SU J, YAO B, et al. Scale-free network models with parameters [C]. Joint International Information Technology, Mechanical and Electronic Engineering Conference, 2016, 59: 155-162.

[10] SONG C, KOREN T, WANG P, et al. Modelling the scaling properties of human mobility [J]. Nature Physics, 2010, 6(10): 818-823.

[11] YAN G, TSEKENIS G, BARZEL B, et al. Spectrum of controlling and observing complex networks [J]. Nature Physics, 2015, 11(9): 779-786.

[12] DEL GENIO C I, GROSS T, BASSLER K E. All scale-free networks are sparse [J]. Physical Review Letters, 2011, 107(17): 178701-178701.

[13] CHEN Q, SHI D. The modeling of scale-free networks [J]. Physica A Statistical Mechanics & Its Applications, 2004, 335: 240-248.

[14] 梁宏振，姚洪兴，张学兵. 一类无标度网络的特征分析[J]. 复杂系统与复杂性科学，2005，2(3)：67-71.
LIANG H Z, YAO H X, ZHANG X B. Characters analysis for a class of scale-free networks [J]. Complex Systems & Complexity Science, 2005, 2(3): 67-71.

[15] 贾秀丽，蔡绍洪，张芙蓉. 一种动态的无标度网络模型[J]. 四川师范大学学报(自然科学版)，2009，32(6)：839-842.
JIA X L, CAI S H, ZHANG F R. A dynamic scale-free network model [J]. Journal of Sichuan Normal University (Natural Science), 2009, 32(6): 839-842.

[16] 王林，戴冠中. 复杂网络的度分布研究[J]. 西北工业大学学报（自然科学版），2006，24(4)：405-409.
WANG L, DAI G Z. On degree distribution of complex network [J]. Journal of Northwestern Polytechnical University, 2006, 24(4): 405-409.

[17] YAO B, MA F, SU J, et al. Scale-free multiple-partite models towards information networks [C]// Proceedings of 2016 IEEE Advanced Information Management, Communicates, Electronic and Automation Control Conference (IMCEC 2016), 2016: 549-554.

[18] SU J, MA F, YAO B, et al. AS-mixed network models created by triangle-expanding operations [C]//Joint International Information Technology, Mechanical and Electronic Engineering Conference (JIMEC 2016), 2016, 59: 260-265.

[19] 王晓敏，赵喜杨，姚兵. 全边增长网络模型的生成树[J]. 中山大学学报（自然科学版），2016，55(1)：48-53.
WANG X M, ZHAO X Y, YAO B. Spanning trees of totally edge-growing network models [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2016, 55(1): 48-53.

[20] 杨俊仙，闫萍. 一类具饱和发生率的时滞 SEIR 传染病模型的分析[J]. 中山大学学报（自然科学版），2015，54(3)：51-55.
YANG J X, YAN P. Analysis of a delayed SEIR epidemic model with saturation incidence [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2015, 54(3): 51-55.