

一类 SD 振子的周期函数的单调性问题*

曾求海, 吴奎霖

(贵州大学数学系, 贵州 贵阳 550025)

摘要: SD 振子是一类既含有光滑又含有非连续的非线性模型, 这类模型在物理学上有广泛的应用。研究一类 SD 振子的周期轨道的周期的单调性问题。证明了该类 SD 振子的周期都是单调的。

关键词: SD 振子; 周期函数; 等时中心

中图分类号: O123.4 文献标志码: A 文章编号: 0529-6579 (2017) 01-0093-03

The monotonicity of the period function of a SD oscillator

ZENG Qiuhai, WU Kuilin

(Department of Mathematics, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

Abstract: SD oscillator is a smooth and discontinuous nonlinear model, which has extensively applications in physics. For periodic orbits of a class of SD oscillator, the monotonic problem of the period is studied. It is proven that the period function of the SD oscillator is monotone.

Key words: SD oscillator; period function; isochronous center

平面微分系统的一个奇点 E 称为一个中心, 如果 E 的一个邻域全由围绕 E 的周期轨道组成。这样最大的邻域称为中心 E 的周期环域, 通常记为 P 。对一般的可积微分系统

$$\begin{cases} x' = X(x, y), \\ y' = Y(x, y) \end{cases} \quad (1)$$

不妨设原点 $O(0,0)$ 是系统 (1) 的一个中心, 设 $H(x,y)$ 是其首次积分。围绕 $O(0,0)$ 的周期环域记为 $P := \{\gamma_h : H(x,y) = h, h \in \Sigma\}$, 其中 Σ 为 h 的极大值区间, 使得轨道 $\gamma_h : H(x,y) = h$ 是系统 (1) 的周期轨道。则周期轨道 γ_h 的周期为

$$T(h) := \oint_{\gamma_h} dt = \oint_{\gamma_h} \frac{dx}{X(x,y)} = \oint_{\gamma_h} \frac{dy}{Y(x,y)} \quad (2)$$

称函数 $T(h)$ 为系统 (1) 的周期函数。周期函数 $T(h)$ 的极值点称为系统 (1) 的临界周期。称中心 $O(0,0)$ 是等时中心如果周期函数 $T(h)$ 是一个常数, i. e. $T'(h) \equiv 0$ 。周期函数的单调性问题在庞

加莱分支理论^[1]、Neumann 问题^[2]、同异宿分支理论有重要的应用^[3]。文献 [4-5] 研究了二次多项式系统周期函数的单调性。另外文献 [6-8] 分别研究了多项式系统周期函数的临界周期的个数问题。

1 SD 振子

SD 振子 (Smooth and Discontinuous oscillator) 是物理上一种比较常见的现象。该文讨论下面这个 SD 振子周期轨道的周期单调性问题

$$mX'' + 2kX \left(1 - \frac{L}{\sqrt{X^2 + Y^2}} \right) = 0 \quad (3)$$

其中 L 表示均势长度, X 表示位移, $2l$ 表示刚性支撑见的长度, 详情请参考文献 [9]。令

$$x = \frac{X}{L}, a = \frac{l}{L} \geq 0,$$

* 收稿日期: 2016-06-28

基金项目: 国家自然科学基金 (11301105); 贵州省科学基金 (黔科合 J 字 [2015] 2036 号, 黔科合基础 [2016] 1038)

作者简介: 曾求海 (1992 年生), 男; 研究方向: 常微分方程及应用; E-mail: 2631402850@qq.com

通信作者: 吴奎霖 (1981 年生), 男; 研究方向: 微分方程与动力系统; E-mail: wkuilin@163.com

$$t = \frac{\tau}{\sqrt{\frac{2k}{m}}} \quad \begin{cases} x' = -U(x)y, \\ y' = f(x, y^2) \end{cases} \quad (8)$$

则系统 (3) 可变为

$$x'' + x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right) = 0 \quad (4)$$

这个系统是一个非多项式系统。当 $a > 0$ 时, 系统 (4) 是一个光滑微分系统。当 $a = 0$ 时, 系统 (4) 变为下面这个非连续微分系统:

$$x'' + (x - \operatorname{sgn}(x)) = 0 \quad (5)$$

令 $y = -x'$, 则系统 (4) 可化为下面的微分方程组

$$\begin{cases} x' = -y, \\ y' = x - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \end{cases} \quad (6)$$

当 $a = 0$ 时, 系统 (6) 有两个奇点: 中心 $P_1 = (-1, 0)$ 和中心 $P_2 = (1, 0)$; 当 $0 < a < 1$ 时, 系统 (6) 有三个奇点: 鞍点 $O(0, 0)$, 中心 $P_1(-\sqrt{1-a^2}, 0)$, 中心 $P_2(\sqrt{1-a^2}, 0)$; 当 $a \geq 1$ 时, 系统 (6) 只有唯一的奇点: 中心 $O(0, 0)$ 。田等人 [10] 研究了系统 (6) 当 $a = 1$ 时的余维二分岔。这里研究了系统 (6) 的周期环域所对应的周期函数单调性问题, 主要结论是下面的定理。

定理 1 系统 (6) 的所有周期环域所对应的周期函数都是单调的。

2 主要结论的证明

根据 a 的取值, 定理 1 的证明分三种情形给予证明: $a = 0, 0 < a < 1, a \geq 1$ 。

引理 1 当 $a = 0$ 时, 系统 (6) 的中心都是等时中心。

证明 当 $a = 0$ 时, 系统 (6) 的首次积分为

$$H(x, y) = x^2 + y^2 - 2|x|$$

系统 (6) 围绕中心 $P_i = (0, 0)$ 的周期环域记为

$P_i: = \{\gamma_h: H(x, y) = h, h \in (-1, 0)\}$, $i = 1, 2$ 这两个周期环域关于 y -轴对称, 因此它们对应的周期函数有相同的性质。只需考虑当 $x < 0$ 时, 中心 $P_1 = (-1, 0)$ 对应的周期函数为:

$$T(h): = \oint_{\gamma} dt = - \oint_{H(x,y)=h} \frac{dx}{y} = 2\pi \quad (7)$$

因此系统 (6) 的中心 $P_i = (\pm 1, 0)$, ($i = 1, 2$) 是等时中心。

基于文献 [11] 的思想, 文献 [12] 研究了下面可逆微分系统周期函数的单调性问题并给出了一个周期函数的判别方法。

系统 (8) 有如此形式的首次积分

$$H(x, y) = B(x)y^2 + C(x)$$

我们将借助文献 [12] 的判别方法来研究系统 (6) 的周期函数的单调性问题。为了方便, 我们给出文献 [12] 的判别方法。

引理 2 假设原点是系统 (8) 的非退化中心, $C(0) = 0, U(0) > 0, B(x) > 0$ 。记 (x_l, x_s) 为原点所对应周期环域 P 在 x -轴上的投影, 即

$$(x_l, x_s) = \{x \in \mathbf{R} \mid \exists y \in \mathbf{R}, \text{ s. t. } (x, y) \in P\}$$

定义函数

$$\mu(x) = \frac{1}{\sqrt{1B(x)(U(x)C'(x))^2} \cdot [(B(x)C(x))'U(x)C'(x) - 2B(x)C(x)(U(x)C'(x))]}$$

和

$$S_\sigma(\mu)(x) = \frac{\mu(x)}{C'(x)} - \frac{\mu(\sigma(x))}{C'_\sigma(\sigma(x))}$$

其中 $\sigma(x)$ 是一个解析对合函数满足

$$C(x) = C(\sigma(x)), \quad \forall x \in (x_l, x_s)$$

如果 $S_\sigma(\mu)(x) > 0$ (或 < 0) 对任意 $x \in (0, x_s)$ 或 $x \in (x_l, 0)$, 则原点所对应的周期函数是单调的。

下面借助引理 2 来研究 $0 < a < 1, a \geq 1$ 这两种情形。

引理 3 当 $0 < a < 1$ 时, 系统 (6) 的中心所对应的周期函数都是单调的。

证明 当 $0 < a < 1$ 时, 系统 (6) 有两个中心 P_1 和 P_2 , 且首次积分为

$$H(x, y) = y^2 + (\sqrt{a^2 + x^2} - 1)^2$$

同上情形一样, 只需考虑 $x < 0$ 的情况。为了把系统 (6) 的中心 $P_1(-\sqrt{1-a^2}, 0)$ 平移到原点, 作变换 $X = x + \sqrt{1-a^2}$ 。中心 $P_1(-\sqrt{1-a^2}, 0)$ 对应的周期函数为

$$T(h): = \oint_{\gamma} dt = - \oint_{H(x,y)=h} \frac{dx}{y} = - \oint_{\bar{H}(X,y)=h} \frac{dX}{y} \quad (9)$$

其中 $\bar{H}(X, y) = y^2 + C(X), h \in (0, (1-a^2)^2)$, 且

$$C(X) = (\sqrt{a^2 + (X - \sqrt{1-a^2})^2} - 1)^2$$

显然 $C(0) = 0$ 。原点所对应周期环域 P 在 X -轴上的投影为

$$(X_l, X_s) = (-\infty, \sqrt{1-a^2})$$

根据引理 2, 用 Mathematica 直接计算得到

$$\frac{\mu(x)}{C'(X)} = \frac{a^2}{2(X - \sqrt{1-a^2})^3}$$

进而有

$$\left(\frac{\mu(X)}{C'(X)}\right)'_x = \frac{3a^2}{2(X - \sqrt{1 - a^2})^4} > 0$$

因此 $\frac{\mu(X)}{C'(X)}$ 在区间 $(X_l, X_s) = (-\infty, \sqrt{1 - a^2})$ 是单调的。从而可知：对任意

$$X \in (0, \sqrt{1 - a^2}), \quad (\sigma(X) \in (-\infty, 0))$$

有

$$S_\sigma(\mu)(X) = \frac{\mu(X)}{C'(X)} - \frac{\mu(\sigma(X))}{C'_\sigma(\sigma(X))} > 0$$

由引理 2 可知，周期函数 (9) 是单调的。

引理 4 当 $a \geq 1$ 时，系统 (6) 的中心 $O(0, 0)$ 所对应的周期函数是单调的。

证明 当 $a \geq 1$ 时，系统 (6) 只有一个中心 $O(0, 0)$ ，且首次积分为 $H(x, y) = y^2 + C(x)$ ，其中

$$C(x) = x^2 - 2\sqrt{x^2 + a^2} + 2a$$

中心 $O(0, 0)$ 所对应的周期环域

$$P := \{\gamma_h : H(x, y) = h, h \in (0, +\infty)\}$$

周期环域 P 在 x -轴下的投影为 $(x_l, x_s) = (-\infty, +\infty)$ 。中心 $O(0, 0)$ 对应的周期函数为

$$T(h) := \oint_{\gamma_h} dt = - \oint_{H(x,y)=h} \frac{dx}{y} \quad (10)$$

根据引理 2，用 Mathematica 直接计算得到

$$\frac{\mu(x)}{C'(x)} = \frac{1}{2x^3(-1 + \sqrt{x^2 + a^2})^3} [-2a^3(1 + a) -$$

$$3x^2(a^2 + \sqrt{x^2 + a^2}) + 2(1 + a)(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}]$$

注意当 $a \geq 1$ 时，系统 (6) 关于 x -轴、 y -轴都对称。此时对合函数 $\sigma(x) = -x$ ，

$$S_\sigma(\mu)(x) = \frac{2\mu(x)}{C'(x)}$$

下面证明 $\frac{\mu(X)}{C'(X)}$ 在区间 $(-\infty, 0)$ (或 $(0, +\infty)$) 上定号即可。令

$$\sqrt{x^2 + a^2} = t, \quad t \in (a, +\infty)$$

则

$$\frac{\mu(x)}{C'(x)} = \frac{(a - t)^2(-2a + a^2 + (2a - 1)t)}{2(t - 1)^3(t^2 - a^2)^{\frac{3}{2}}} > 0$$

由引理 2 可知，周期函数 (10) 是单调的。

定理 1 的证明 由引理 1、引理 3、引理 4 可

知，系统 (6) 的所有周期环域所对应的周期函数都是单调的。

参考文献：

[1] SCHAAF R. Global behaviour of solution branches for some Neumann problems depending on one or several parameters [J]. J Reine Angew Math, 1984, 346:1 - 31.

[2] CHOW S N, LI C Z, YI Y F. The cyclicity of period annulus of degenerate quadratic Hamiltonian system with elliptic segment [J]. Ergodic Theory Dynamical Systems, 2002, 22(2): 349 - 374.

[3] GUCKENHEIMER J, HOLMES P. Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields [M]. New York: Springer-Verlag, 1990.

[4] VILLADELPRAT J. On the reversible quadratic centers with monotonic period function [J]. Proc Amer Math Soc, 2007, 135(8): 2555 - 2565.

[5] ZHAO Y. The monotonicity of period function for codimension four quadratic system Q_4 [J]. J Differential Equations, 2002, 185(1): 370 - 387.

[6] ZHAO Y. The period function for quadratic integrable systems with cubic orbits [J]. J Math Anal Appl, 2005, 301(2): 295 - 312.

[7] LIANG H, ZHAO Y. On the period function of reversible quadratic centers with their orbits inside quartics [J]. Nonlinear Anal, 2009, 71(11): 5655 - 5671.

[8] 陈艳艳. 一类平面多项式系统的周期函数的临界点个数[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2009, 48(4): 130 - 132.

CHEN Y Y. The number of critical periods for a planar polynomial systems [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2009, 48(4): 130 - 132.

[9] THOMPSON J M T, HUNT G W. A general theory of elastic stability [M]. New York: Wiley, 1973.

[10] TIAN R, CAO Q, YANG S. The codimension-two bifurcation for the recent proposed SD oscillator [J]. Nonlinear Dynam, 2010, 59(1): 19 - 27.

[11] MAÑOSAS F, VILLADELPRAT J. Criteria to bound the number of critical periods [J]. J Differential Equations, 2009, 246(6): 2415 - 2433.

[12] WU K. On the monotonicity of the period function of reversible centers [J]. J App Anal Comput, 2012, 2(2): 205 - 212.