

复合树的 Felicitous 性质*

张明军¹, 杨思华², 姚兵³

- (1. 兰州财经大学信息工程学院, 甘肃 兰州 730020;
2. 兰州财经大学陇桥学院, 甘肃 兰州 730101;
3. 西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州 730070)

摘要: 将多个具有集有序 Felicitous 性质的树上的点与一棵集有序优美树上的点重合, 构造出一棵较大的复合树, 经研究计算, 该复合树具有集有序 Felicitous 性质。

关键词: 复合树; 集有序 Felicitous 标号; 集有序优美标号

中图分类号: O157.5 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2017) 06-0060-04

The Felicitous property of composite trees

ZHANG Mingjun¹, YANG Sihua², YAO Bing³

- (1. School of Information Engineering, Lanzhou University of Finance and Economics, Lanzhou 730020, China;
2. Longqiao college, Lanzhou University of Finance and Economics, Lanzhou 730101, China;
3. College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

Abstract: Multiple trees with set-ordered Felicitous property are coupled with a vertex on set-ordered graceful trees, and a larger composite tree is constructed. It is shown that, the composite tree has set-ordered Felicitous property.

Key words: composite trees; set-ordered felicitous labelling; set-ordered graceful labelling

图的标号广泛应用于编码理论、通讯网络、物流、同步机码设计、无线电频道分配和读取 DNA 序列等领域。优美图是图的标号研究中十分重要的课题之一。1966 年, Rosa^[1]提出了一个猜想: 每一棵树都是优美树。后来, Bermond^[2]又提出了猜想: 所有龙虾树都是优美树。关于这两个猜想已经有了很多结果, 但是一直没有彻底的解决。Lee 等^[3]于 1991 年提出了猜想: 每一棵树都是 Felicitous 树。该猜想与优美树猜想具有同等的理论价值, 而且具有相同的难度, 都是 NP-hard 问题^[4-13]。对于数学猜想的进攻, 导致图的标号迅速发展成为当今图论学科中十分活跃的分支。

1 预备知识

本文涉及的图均为有限、无向简单图。文中没有定义的术语和符号均来自文献 [14]。为叙述简便, 我们把一个有 p 个顶点 q 条边的连通图记为 (p, q) -图。记号 $[m, n]$ 表示非负整数集合 $\{m, m+1, m+2, \dots, n\}$, 其中 m 和 n 均为整数, 且满足 $0 \leq m < n$; $[k, l]^e$ 表示偶数集 $\{k, k+2, k+4, \dots, l\}$, 其中其中 k 和 l 均为整数, 且满足 $0 \leq k < l$; $[s, t]^o$ 表示奇数集 $\{s, s+2, s+4, \dots, t\}$, 其中其中 s 和 t 均为整数, 且满足 $0 \leq s < t$ 。

定义 1 设 G 是 (p, q) -图, 若存在一个单射

* 收稿日期: 2017-03-01

基金项目: 国家自然科学基金 (61363060, 61662066); 兰州财经大学高等教育教学改革研究重点项目 (LJZ201707); 甘肃省高等学校科研项目 (2017A-047)

作者简介: 张明军 (1973 年生), 男; 研究方向: 图的标号与复杂网络; E-mail: zhangmjz@163.com

$f:V(G) \rightarrow [0,q]$, 使得边标号集合 $\{f(uv) \mid uv \in E(G)\} = [0,q-1]$, 其中边标号为 $f(uv) = f(u) + f(v) \pmod{q}$, 那么称 G 是 Felicitous 图, 并称 f 是 G 的一个 Felicitous 标号. 进一步, 设 (X,Y) 是二部图 G 的顶点集的一个二部划分, 如果 G 有一个 Felicitous 标号 f , 使得

$$\max\{f(x) \mid x \in X\} < \min\{f(y) \mid y \in Y\}$$

(以下简记为 $f(X) < f(Y)$)

则称 G 是集有序 Felicitous 图, 也称 f 是 G 的一个集有序 Felicitous 标号.

对于定义 1 中的图 G 和 Felicitous 标号 f , 以下简记顶点标号集合为 $f(V(G)) = \{f(u) \mid u \in V(G)\}$, 边标号集合为 $f(E(G)) = \{f(u) + f(v) \mid uv \in E(G)\}$, 以及 $f(E(G)) \pmod{q} = \{f(uv) \mid uv \in E(G)\}$.

定义 2 设 G 是 (p,q) -图, 若存在一个单射 $f:V(G) \rightarrow [0,q]$, 使得边标号集合 $\{f(uv) \mid uv \in E(G)\} = [1,q]$, 其中边标号为 $f(uv) = |f(u) - f(v)|$, 那么称 G 是优美图, 并称 f 是 G 的一个优美标号. 进一步, 设 (X,Y) 是二部图 G 的顶点集的一个二部划分, 若 G 有一个优美标号 f , 使得 $f(X) < f(Y)$, 则称 G 是集有序优美图, 也称 f 是 G 的一个集有序优美标号.

定义 3 设 T, H_1, H_2, \dots, H_p 是树, $|V(T)| = p$, $V(T) = \{w_i \mid i \in [1,p]\}$, $|V(H_i)| = n$, $|V(H_i)| = \{u_{i,j} \mid i \in [1,p], j \in [1,n]\}$, 将 T 的顶点 $w_i (i \in [1,p])$ 与树 H_i 中的一个 $u_{i,j_0} (j_0 \in [1,n])$ 重合, 得到的图 G 叫做复合树, 特记为 $G = [T; H_1, H_2, \dots, H_p]$.

2 主要结论及其证明

定理 1 设树 $H_1, H_2, \dots, H_{|V(T)|}$ 有集有序 Felicitous 标号, 树 T 是集有序优美树, 且其顶点集二部划分 (X,Y) 满足 $||X| - |Y|| \leq 1$, 则复合树 $[T; H_1, H_2, \dots, H_{|V(T)|}]$ 具有集有序 Felicitous 标号.

证明 根据定理假设, 树 T 是有 p 个顶点的集有序优美树, 其顶点集二部划分为 (X,Y) , 其中 $||X| - |Y|| \leq 1$, $X = \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$, $Y = \{w_{l+1}, w_{l+2}, \dots, w_p\}$. 树 T 有一个集有序优美标号 f , 使得 $f(w_i) = i - 1, i \in [1,p]$, 并且 $f(X) < f(Y)$.

树 H_1, H_2, \dots, H_p 有集有序 Felicitous 标号 $h_0^k (k \in [1,p])$, 且 (X_k, Y_k) 是 $V(H_k) (k \in [1,p])$ 的二部划分, 其中 $X_k = \{u_{k,i} \mid i \in [1,s]\}$ 和 $Y_k =$

$\{v_{k,j} \mid j \in [1,t]\}$. 对于某个固定的 k , 有

$$h_0^k(u_{k,1}) < h_0^k(u_{k,2}) < \dots < h_0^k(u_{k,s}) < h_0^k(v_{k,1}) < h_0^k(v_{k,2}) < \dots < h_0^k(v_{k,t})$$

令 $|V(H_k)| = n$, 则有 $s + t = n$, 且有 $h_0^k(u_{k,i}) = i - 1, i \in [1,s]$; $h_0^k(v_{k,j}) = s + j - 1, j \in [1,t]$. 显然, $h_0^k(V(H_k)) = [0, n - 1]$, 以及 $h_0^k(E(H_k)) \pmod{n - 1} = [0, n - 2]$.

利用 f 定义 T 的一个标号 f' 如下: $f'(w_i) = f(w_i) + 1 = i, i \in [1,p]$. 由 p 的奇偶性来定义复合树 $[T; H_1, H_2, \dots, H_p]$ 的一个标号 h .

情形 I 当 $p = 2\beta + 1$ 时, 从而有 $||X| - |Y|| = 1$. 令 $|X| = |Y| + 1$. 我们定义复合树 $[T; H_1, H_2, \dots, H_p]$ 的标号 h 如下:

(i) 当 $k \in [1, \beta + 1]$ 时, 令

$$h(u_{k,i}) = n(k - 1) + h_0^k(u_{k,i}) = n(k - 1) + i - 1, i \in [1, s];$$

$$h(v_{k,j}) = n(\beta + k - 1) + h_0^k(v_{k,j}) = n(\beta + k - 1) + s + j - 1, j \in [1, t]$$

(ii) 当 $l \in [\beta + 2, 2\beta + 1]$ 时, 令

$$h(u_{l,i}) = n(3\beta + 2 - l) + h_0^l(v_{l,1}) - h_0^l(v_{l,i}) - 1 = n(3\beta + 2 - l) + s - i, i \in [1, s];$$

$$h(v_{l,j}) = n(2\beta + 2 - l) - h_0^l(v_{l,j}) + h_0^l(v_{l,1}) - 1 = n(2\beta + 2 - l) - j, j \in [1, t]$$

经过计算得 $h(V([T; H_1, H_2, \dots, H_{2\beta+1}])) = [0, n(2\beta + 1) - 1]$, 且有

$$\{h(u_{k,i}) : k \in [1, \beta + 1], i \in [1, s]\} \cup \{h(v_{l,j}) : l \in [\beta + 2, 2\beta + 1], j \in [1, t]\} = [0, n\beta + s - 1] = X^* ;$$

$$\{h(v_{k,j}) : k \in [1, \beta + 1], j \in [1, t]\} \cup \{h(u_{l,i}) : l \in [\beta + 2, 2\beta + 1], i \in [1, t]\} = [n\beta + s, n(2\beta + 1) - 1] = Y^*$$

注意到, 若 (X^*, Y^*) 是复合树 $[T; H_1, H_2, \dots, H_p]$ 的顶点集二部划分, 则有 $h(X^*) < h(Y^*)$, 由复合树的构造易知 $|E([T; H_1, H_2, \dots, H_{2\beta+1}])| = n(2\beta + 1) - 1$.

下面, 证明标号 h 是复合树 $[T; H_1, H_2, \dots, H_p]$ 的集有序 Felicitous 标号.

当 $k \in [1, \beta + 1], i \in [1, s]$ 和 $j \in [1, t]$ 时, H_k 的每一条边 $u_{k,i}v_{k,j}$ 满足

$$h(u_{k,i}v_{k,j}) = h(u_{k,i}) + h(v_{k,j}) = n(k - 1) + h_0^k(u_{k,i}) +$$

$$n(\beta + k - 1) + h_0^k(v_{k,j}) = n(\beta + 2k - 2) + s + i + j - 2,$$

$$h(u_{k,i}v_{k,j}) \in \bigcup_{k=1}^{\beta+1} [n(\beta + 2k - 2) + s,$$

$$n(\beta + 2k - 1) + s - 2]$$

当 $l \in [\beta + 2, 2\beta + 1]$, $i \in [1, s]$ 和 $j \in [1, t]$ 时, H_l 的每一条边 $u_{l,i}v_{l,j}$ 满足

$$\begin{aligned} h(u_{l,i}v_{l,j}) &= h(u_{l,i}) + h(v_{l,j}) = \\ &= n(2\beta + 2 - l) - h_0^l(v_{l,j}) + \\ &+ 2h_0^l(v_{l,i}) + n(3\beta + 2 - l) - h_0^l(u_{l,i}) - 2 = \\ &= n(5\beta - 2l + 4) + s - i - j, \\ h(u_{l,i}v_{l,j}) &\in \bigcup_{l=\beta+2}^{2\beta+1} [n(5\beta - 2l + 3) + s, \\ &= n(5\beta - 2l + 4) + s - 2], \\ h(E(H_1, H_2, \dots, H_{2\beta+1})) &= \\ [n\beta + s, n(3\beta + 1) + s - 2] \setminus N^* \end{aligned}$$

此处

$$\begin{aligned} N^* &= [n(\beta + 1) + s - 1, \\ &= n(\beta + 2) + s - 1, n(\beta + 3) + s - 1, \dots, \\ &= n(3\beta - 1) + s - 1, 3n\beta + s - 1] \end{aligned}$$

1) 对固定的 $i_0 \in [1, s]$, 将 $H_m (m \in [1, 2\beta + 1])$ 的顶点 u_{m,i_0} 与树 T 的顶点 w_m 重合。对 $k \in [1, \beta + 1]$, $l \in [\beta + 2, 2\beta + 1]$, 关于复合树 $[T; H_1, H_2, \dots, H_{2\beta+1}]$ 的边 $w_k w_l$ 有

$$\begin{aligned} f'(w_k w_l) &= f'(w_k) + f'(w_l) = h(u_{k,i_0}) + \\ &+ h(u_{l,i_0}) = n(3\beta + k - l + 1) + s - 1 \end{aligned}$$

经过计算得

$$\begin{aligned} f'(w_k w_l) &\in [n(\beta + 1) + s - 1, n(\beta + 2) + s - 1, \\ &= n(\beta + 3) + s - 1, \dots, n(3\beta - 1) + s - 1, \\ &= 3n\beta + s - 1] = N^* \end{aligned}$$

2) 对固定的 $j_0 \in [1, t]$, 将 $H_m (m \in [1, 2\beta + 1])$ 的顶点 v_{m,j_0} 与树 T 的顶点 w_m 重合。对 $k \in [1, \beta + 1]$, $l \in [\beta + 2, 2\beta + 1]$, 计算复合树 $[T; H_1, H_2, \dots, H_{2\beta+1}]$ 的边 $w_k w_l$, 得到

$$f'(w_k w_l) = f'(w_k) + f'(w_l) =$$

$$h(v_{k,j_0}) + h(v_{l,j_0}) =$$

$$n(3\beta + k - l + 1) + s - 1$$

经过计算得

$$\begin{aligned} f'(w_k w_l) &\in \\ &= [n(\beta + 1) + s - 1, n(\beta + 2) + s - 1, \\ &= n(\beta + 3) + s - 1, \dots, n(3\beta - 1) + s - 1, \\ &= 3n\beta + s - 1] = N^* \end{aligned}$$

综上得, 边标号集合 $h(E([T; H_1, H_2, \dots, H_p])) = [n\beta + s, n(3\beta + 1) + s - 2]$ 。因此,

$$\begin{aligned} h(E([T; H_1, H_2, \dots, H_p])) &\cdot \\ &= (\text{mod } n(2\beta + 1) - 1) = [0, n(2\beta + 1) - 2], \\ h(V([T; H_1, H_2, \dots, H_{2\beta+1}])) &= [0, n(2\beta + 1) - 1] \end{aligned}$$

以及

$$h(X^*) < h(Y^*)$$

故当 p 是奇数时, 标号 h 是复合树 $[T; H_1, H_2, \dots, H_p]$ 的集有序 Felicitous 标号。

情形 II 当 $p = 2\beta$ 时, 则有 $||X| - |Y|| = 0$ 。定义标号 h 如下:

(i) 当 $k \in [1, \beta]$ 时, 令

$$\begin{aligned} h(u_{k,i}) &= n(k - 1) + i - 1, i \in [1, s]; \\ h(v_{k,j}) &= n(\beta + k - 1) + j - 1, j \in [1, t] \end{aligned}$$

(ii) 当 $l \in [\beta + 1, 2\beta]$ 时, 令

$$\begin{aligned} h(u_{l,i}) &= n(3\beta + 1 - l) - i, i \in [1, s]; \\ h(v_{l,j}) &= n(2\beta + 1 - l) - j, j \in [1, t] \end{aligned}$$

用与奇数情形相同的方法, 可得到边标号集合 $h(E([T; H_1, H_2, \dots, H_p])) (\text{mod } 2n\beta - 1) = [0, 2n\beta - 2]$

综合情形 1 和情形 2 的讨论, 本定理得证。(图 1 与图 2 是解释定理 1 的两个例子)

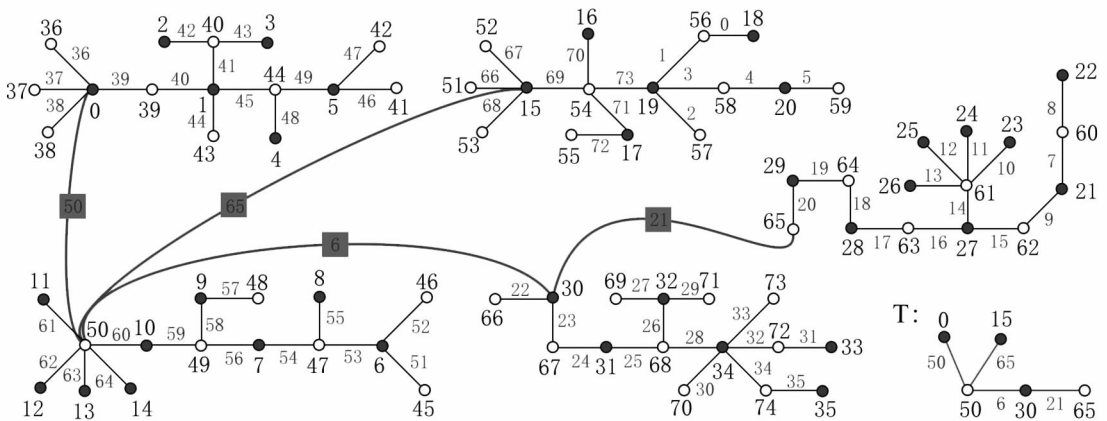


图 1 解释定理 1 的一个例子

Fig. 1 An example for illustrating Theorem 1

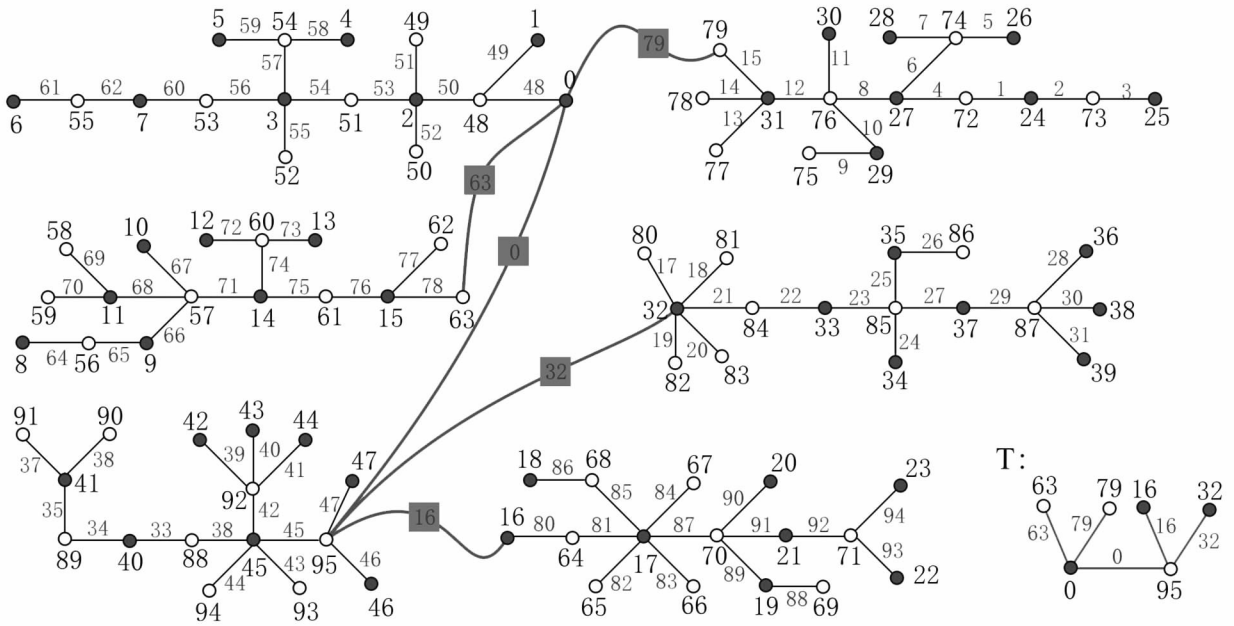


图 2 解释定理 1 的另一个例子

Fig. 2 Another example for illustrating Theorem 1

参考文献：

[1] ROSA A. On certain valuations of the vertices of a graph [J]. Theory of Graphs, 1967: 349 – 355.

[2] BERMOND J C. Graceful graphs, radio antennae and French windmills [J]. Graph Theory & Combinatorics, Pitman London, 1979, 34: 18 – 37.

[3] LEE S M, SCHMEICHEL E, SHEE S C. On felicitous graphs [J]. Discrete Mathematics, 1991, 93(2/3): 201 – 209.

[4] GALLIAN J A. A dynamic survey of graph labeling [J]. The electronic journal of combinatorics, 2009, 12: 42 – 43.

[5] MANICKAM K, MARUDAI M, KALA R. Some results on felicitous labeling of graphs [J]. Journal of Combinatorial Mathematics & Combinatorial Computing, 2012, 81: 273 – 279.

[6] GNANAJOTHI R B. Topics in graph theory [D]. Madurai: Madurai Kamaraj University, 1991.

[7] YAO B, CHENG H, YAO M, et al. A note on strongly graceful trees [J]. Ars Combinatoria, 2009, 92: 155 – 169.

[8] GRAHAMS R L, SLOANE N J A. On additive bases and harmonious graphs [J]. Siam Journal on Algebraic & Discrete Methods, 2006, 1(1): 382 – 404.

[9] ZHOU X Q, YAO B, CHEN X E, et al. A proof to the odd-gracefulness of all lobsters [J]. Ars Combinatoria,

2012, 103: 13 – 18.

[10] 唐保祥, 任韩. 2 类优美图的冠的优美标号[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2015, 54(5): 24 – 27. TANG B X, REN H. Graceful labeling of the corona for two kinds of graceful graphs [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2015, 54(5): 24 – 27.

[11] 赵喜杨, 姚兵. 探讨树的 (k, d) - 边魔幻全标号[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2016, 55(6): 67 – 73. ZHAO X Y, YAO B. Probing (k, d) -edge magic total labellings of trees [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2016, 55(6): 67 – 73.

[12] 张明军, 赵喜杨, 姚兵. $(2m + 1, 1) - p$ 树的二分强优美性和二分强奇优美性[J]. 应用数学学报, 2016, 39(3): 419 – 428. ZHANG M J, ZHAO X Y, YAO B. On bipartite strongly gracefulfulness and bipartite strongly odd-gracefulness of $(2m + 1, 1) - p$ -trees [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 2016, 39(3): 419 – 428.

[13] 吴跃生. 图 $F_{n,4}(r_1, r_2, \dots, r_{3n+1})$ 的交错标号[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2016, 55(4): 11 – 14. WU Y S. The alternating labeling of the graph $F_{n,4}(r_1, r_2, \dots, r_{3n+1})$ [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2016, 55(4): 11 – 14.

[14] BONDY J A, MURTY U S R. Graph theory with applications [M]. London: The Macmillan Press Ltd, 1976.