第 56 卷　第 6 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 56　No. 6
2017 年　11 月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　Nov.　2017

DOI:10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2017. 06. 010

Banach 空间混合型泛函方程的稳定性问题*

成立花
（西安工程大学理学院，陕西 西安 710048）

摘　要：首先整合资源，给出 Banach 空间一类混合型泛函方程的等价性证明，其次利用不动点的择一性逐步分类地研究了 Banach 空间中混合型泛函方程的稳定性问题，得到较为精确的上界。

关键词：混合型泛函方程；广义 Hyers-Ulam-Rassias 稳定性；不动点的择一性

中图分类号：O175. 25　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529－6579（2017）06－0068－04

Stability of a mixed type functional equation in Banach spaces

CHENG Lihua
（College of Science，Xi’an Polytechnic University，Xi’an 710048，China）

Abstract：The equivalence of two mixed type functional equations in Banach space is given. By using the fixed point method，the stability of the mixed functional equation in Banach space is built up step by step. Furthermore，the better upper bound is gotten.

Key words：mixed functional equation；generalized Hyers-Ulam-Rassias stability；fixed point alternative

泛函方程的稳定性起源于 Ulam：在什么条件下，一个从群到度量群的近似加法映射附近存在唯一的加法映射？即：设 G_1 是一个群，且设 G_2 是一个具有度量 $d(\cdot,\cdot)$ 的度量群，对于任意的 $\varepsilon>0$，是否存在 $\delta>0$，使得对于任意的 $x,y\in G_1$，当映射 $f:G_1\to G_2$ 满足如下条件 $d(f(xy),f(x)f(y))\leqslant\delta$ 时，是否存在一个满足 $d(f(x),g(x))\leqslant\varepsilon$ 的群同态 $g:G_1\to G_2$？紧接着，Hyers 关于可加函数在 Banach 空间的稳定性问题给出肯定性的答案。随之，一大批数学家开始在各种特殊空间提出特定的泛函方程的存在性问题[1-8]。也有学者专注研究特定空间中单次或混合型泛函方程的稳定性问题或广义稳定性（Hyers-Ulam-Rassias）（简称 HUR）问题[3-5]。更多更新的不同空间中泛函方程稳定性问题，读者请参阅文［9－10］。基于前人的贡献和理论基础，本文旨在关注 RASSIAS 等[5]研究的混合型泛函方程

$$f(x+2y)-f(x-2y)=2[f(x+y)-f(x-y)]+2f(3y)-6f(2y)+6f(y) \tag{1}$$

和 ESKANDANI[6]的混合型泛函方程

$$f(x+2y)+f(x-2y)=2[f(x+y)-f(-x-y)+f(x-y)-f(y-x)]+f(2y)+f(-2y)+4f(-x)-2f(x) \tag{2}$$

两篇文章研究的均为 Banach 空间中混合型泛函方程，但方程表达形式不同，侧重点不同，前者重在研究泛函方程的存在性问题，而后者则致力于分析泛函方程的稳定性问题。本文立意整合方程（1）和方程（2），首先给出这两类方程的等价性问题，然后利用不动点的择一性给出 Banach 空间混合型泛函方程的稳定性问题。

1　方程的等价性

在本节中，总是假设 X,Y 是 Banach 空间。首先给出方程（1）和（2）的等价性问题。

定理 1　设 X,Y 是 Banach 空间，且设映射 $f:X$

*　**收稿日期**：2017－01－11
基金项目：国家自然科学基金（11101323）；陕西省科技厅自然科学专项基金（2016JQ1029）
作者简介：成立花（1973 年生），女；**研究方向**：算子理论与小波分析；E－mail：178529238@ qq. com

$\to Y$ 满足泛函方程（1）或（2），则如下结论等价：

（i）f 满足泛函方程（1）。

（ii）f 满足泛函方程（2）。

（iii）对于任意 $x \in X$，存在唯一的一次映射 A：$X \to Y$、二次映射 $Q:X \times X \to Y$ 和三次映射 $C:X \times X \times X \to Y$ 满足 $f(x) = A(x) + Q(x,x) + C(x,x,x)$。

证明　（i）$\Leftrightarrow$（iii）。证明参见文［3］。

（ii）$\Rightarrow$（iii）。为方便起见，首先将 f 分成偶部和奇部，即对于 $\forall x \in X$，有

$$f_e(x) = \frac{1}{2}(f(x) + f(-x)),$$

$$f_o(x) = \frac{1}{2}(f(x) - f(-x))$$

易知 $f(x) = \frac{1}{2}(f_e(x) + f_o(x))$。

如果 f 满足方程（2），则可以验证以下结果：

$$\begin{aligned}
&f_e(x+2y) + f_e(x-2y) = \\
&\frac{1}{2}[f(x+2y) + f(-x-2y) + \\
&f(x-2y) + f(-x+2y)] = \\
&\frac{1}{2}[f(x+2y) + f(x-2y)] + \\
&\frac{1}{2}[f(-x-2y) + f(-x+2y)] = \\
&2\left\{\frac{1}{2}[f(x+y) + f(-x-y)]\right\} - \\
&2\left\{\frac{1}{2}[f(-x-y) + f(x+y)]\right\} + \\
&2\left\{\frac{1}{2}[f(2y) + f(-2y)]\right\} + \\
&4\left\{\frac{1}{2}[f(-x) + f(x)]\right\} - \\
&2\left\{\frac{1}{2}[f(x) + f(-x)]\right\} = \\
&2[f_e(x+y) - f_e(-x-y) + f_e(x-y) - \\
&f_e(y-x) - f_e(x)] + \\
&f_e(2y) + f_e(-2y) + 4f_e(-x) = \\
&2f_e(2y) + 2f_e(x)
\end{aligned} \tag{3}$$

在式（3）中用 $\frac{y}{2}$ 替代 y 可以看到，

$$f_e(x+y) + f_e(x-y) = 2f_e(y) + 2f_e(x)$$

由文［6］知，满足上面泛函方程的 f_e 当且仅当为二次泛函。因此对于所有的 $x \in X$，存在唯一的二次映射 $Q:X \times X \to Y$ 使得 $f_e = Q(x,x)$。

另一方面，如果 f 满足方程（2），同样的道理可以验证 f_o 满足

$$\begin{aligned}
&f_o(x+2y) + f_o(x-2y) = \\
&2[f_o(x+y) - f_o(-x-y) + f_o(x-y) - \\
&f_o(y-x) - f_o(x)] + \\
&f_o(2y) + f_o(-2y) + 4f_o(-x) = \\
&4[f_o(x+y) + f_o(x-y)] - 6f_o(x)
\end{aligned}$$

由文［5］，满足上面泛函方程的 f_o 当且仅当为一个立方－可加映射。也就是说，对于所有的 $x \in X$，存在唯一的可加映射 $A:X \to Y$ 和三次映射 $C:X \times X \times X \to Y$ 满足 $f_o = A(x) + C(x,x,x)$。因此，

$$\begin{aligned}
&f(x) = f_e(x) + f_o(x) = \\
&A(x) + Q(x,x) + C(x,x,x)
\end{aligned}$$

（iii）$\Rightarrow$（ii）。易证。

证明完毕。

推论 1　设 X, Y 是向量空间，且 $f:X \to Y$ 满足泛函方程（1），则以下结论成立：

（i）若 f 为偶映射，则 f 是二次的。

（ii）若 f 奇映射，则 f 是立方－可加的。

2　稳定性

设 X 是一个向量空间，Y 是一个 Banach 空间。对于映射 $f:X \to Y$，对于 $\forall x,y \in X$ 定义

$$\begin{aligned}
D_f(x,y) &= f(x+2y) - f(x-2y) - 2f(x+y) + \\
&2f(x-y) - 2f(3y) + 6f(2y) - 6f(y)
\end{aligned}$$

接下来讨论混合泛函方程的 HUR 稳定性。

引理 1　设 $s \in \{1, -1\}$，对于映射 $\varphi:X \times X \to [0,\infty]$ 存在 $L < 1$，使得对于任意的 $x,y \in X$，$\varphi(x,y) \leqslant 2^{2s}L\varphi(2^{-s}x, 2^{-s}y)$。已知 f 是一个偶映射，且满足 $f(0) = 0$ 和

$$\| D_f(x,y) \| \leqslant \varphi(x,y), \forall x,y \in X \tag{4}$$

则对于所有的 $x \in X$，存在唯一的二次映射 $Q:X \times X \to Y$ 使得

$$Q(x) := \lim_{n\to\infty} 2^{-2sn} f(2^{sn}x)$$

且满足

$$\| f(x) - Q(x) \| \leqslant \frac{1}{2^2(|1 - L^s|)}\left[\frac{1}{2}\varphi(0,x) + \varphi(x,x)\right] \tag{5}$$

证明　在式（4）中令 $x = 0$，得到

$$\| f(3y) - 3f(2y) + 3f(y) \| \leqslant \frac{1}{2}\varphi(0,y)$$

另一方面，在式（4）中用 y 替代 x 有，$\| f(3y) - 4f(2y) + 7f(y) \| \leqslant \varphi(y,y)$。

于是，由三角不等式得到

$$\left\| \frac{f(2y)}{4} - f(y) \right\| \leqslant \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2}\varphi(0,y) + \varphi(y,y)\right] \tag{6}$$

不妨设 $s=-1$。

考虑在式（6）中令 $y:=\frac{y}{2}$，有

$$\left\|f(y)-4f\left(\frac{y}{2}\right)\right\|\leqslant\frac{1}{2}\varphi\left(0,\frac{y}{2}\right)+\varphi\left(\frac{y}{2},\frac{y}{2}\right)$$

定义 $S:=\{g:X\to Y\}$ 上的广义度量：

$$d(g,h)=\inf\{\mu\in\mathbf{R}_+:\|g(x)-h(x)\|\leqslant \mu\left(\frac{1}{2}\varphi(0,x)+\varphi(x,x)\right),\forall x\in X\}$$

再定义映射 $J:S\to S$，使得对于任意的 $x\in X$，有 $Jf(x):=4f(\frac{x}{2})$。设 $c\in[0,\infty]$，则存在 $g,h\in S$，使得 $d(g,h)=c$，因此，对于 $\forall x\in X,g,h\in S$，有

$$\|Jg(x)-Jh(x)\|=\left\|4g\left(\frac{x}{2}\right)-4h\left(\frac{x}{2}\right)\right\|\leqslant 4c\left(\frac{1}{2}\varphi\left(0,\frac{x}{2}\right)+\varphi\left(\frac{x}{2},\frac{x}{2}\right)\right)\leqslant Lc\left(\frac{1}{2}\varphi(0,x)+\varphi(x,x)\right)$$

此即

$$d(Jg,Jh)\leqslant Ld(g,h),\forall x\in X,g,h\in S$$

于是由式（4）知，对于任意的 $x\in X,d(f,Jf)\leqslant\frac{L}{4}$。借助文［6］定理 2 得到，存在一个二次映射 $Q:X\times X\to Y$，满足：

（i）Q 是 J 的唯一不动点，满足 $Q(\frac{x}{2})=\frac{1}{4}Q(x),\forall x\in X$。且有 $\|f(x)-Q(x)\|\leqslant c\left[\frac{1}{2}\varphi(0,x)+\varphi(x,x)\right],\forall x\in X$，其中 $c\in(0,\infty)$。

（ii）当 $n\to\infty$ 时，有 $d(J^nf,Q)\to 0$。即对于 $\forall x\in X$，有

$$Q(x)=\lim_{n\to\infty}(J^nf)(x)=\lim_{n\to\infty}2^{2n}f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

（iii）$d(f,Q)\leqslant\frac{1}{(1-L)}d(Jf,f)$，这意味着 $d(g,Q)\leqslant\frac{L}{(1-L)},\forall x\in X$。因此有

$$\|f(x)-Q(x)\|\leqslant\frac{L}{4(1-L)}\left[\frac{1}{2}\varphi(0,x)+\varphi(x,x)\right]$$

与此同时，$\forall x,y\in X,n\in\mathbf{N}$，有

$$\left\|2^{2n}(D_f)\left(\frac{x}{2^n},\frac{y}{2^n}\right)\right\|\leqslant 2^{2n}\varphi\left(\frac{x}{2^n},\frac{y}{2^n}\right)\leqslant L^n\varphi(x,y)$$

于是，$\|D_Q(x,y)\|=0,\forall x,y\in X$。因此 $Q:X\times X\to Y$ 是唯一的二次映射。

$s=1$ 的证明类似。证明完毕。

以下的两个引理讨论 f 为奇映射时，在相似的条件下会有完全不同的结论。

引理 2 设 $s\in\{1,-1\},L<1$，且对于任意的 $x,y\in X$，映射 $\varphi:X\times X\to[0,\infty]$ 满足 $\varphi(x,y)\leqslant 2^sL\varphi(2^{-s}x,2^{-s}y)$。设 f 是一个奇映射且满足 $f(0)=0$ 和 $\|D_f(x,y)\|\leqslant\varphi(x,y),\forall x,y\in X$，则存在唯一的可加映射 $A:X\to Y$ 使得

$$A(x):=\lim_{n\to\infty}2^{-sn}f(2^{sn}x)$$

且有

$$\|f(2x)-8f(x)-A(x)\|\leqslant\frac{1}{2|1-L^s|}\left[\frac{1}{2}\varphi(0,x)+\varphi(2x,x)\right],\forall x\in X$$

引理 3 设 $s\in\{1,-1\},L<1$，且对于任意的 $x,y\in X$，映射 $\varphi:X\times X\to[0,\infty]$ 满足 $\varphi(x,y)\leqslant 2^{3s}L\varphi(2^{-s}x,2^{-s}y)$。设 f 是一个奇映射且满足 $f(0)=0$ 和 $\|D_f(x,y)\|\leqslant\varphi(x,y),\forall x,y\in X$，则存在唯一的立方映射 $C:X\times X\times X\to Y$ 使得

$$C(x):=\lim_{n\to\infty}2^{-2sn}f(2^{sn}x)$$

且有

$$\|f(2x)-2f(x)-C(x)\|\leqslant\frac{1}{2^3|1-L^s|}\left[\frac{1}{2}\varphi(0,\frac{x}{2})+\varphi(x,\frac{x}{2})\right]$$

综合引理 1－3，可以得到本文的推论和主要定理。

定理 2 设 $s\in\{1,-1\},L<1$，且对于任意的 $x,y\in X$，映射 $\varphi:X\times X\to[0,\infty]$ 满足 $\varphi(x,y)\leqslant 2^{3s}L\varphi(2^{-s}x,2^{-s}y)$。设 f 是一个奇映射且满足 $f(0)=0$ 和 $\|D_f(x,y)\|\leqslant\varphi(x,y),\forall x,y\in X$，则存在唯一的可加映射 $A:X\to Y$ 和立方映射 $C:X\times X\times X\to Y$，使得 $A(x):=\lim\limits_{n\to\infty}2^{-sn}f(2^{sn}x)$ 和 $C(x):=\lim\limits_{n\to\infty}2^{-3sn}f(2^{sn}x)$ 且有

$$\|f(x)-A(x)-C(x)\|\leqslant\frac{5}{48|1-L^s|}\left[\frac{1}{2}\varphi(0,x)+\varphi(2x,x)\right]$$

定理 3 设 $s\in\{1,-1\},L<1$，且对于任意的 $x,y\in X$，映射 $\varphi:X\times X\to[0,\infty]$ 满足 $\varphi(x,y)\leqslant 2^{js}L\varphi(2^{-s}x,2^{-s}y),j=1,2,3$。设 f 是一个映射且满足 $f(0)=0$ 和 $\|D_f(x,y)\|\leqslant\varphi(x,y),\forall x,y\in X$，则存在唯一的可加映射 $A:X\to Y$，二次映射 $Q:X\times X\to Y$ 和立方映射 $C:X\times X\times X\to Y$ 使得

$$A(x):=\lim_{n\to\infty}2^{-sn}f(2^{sn}x),$$

$$Q(x):=\lim_{n\to\infty}2^{-2sn}f(2^{sn}x)$$

和

$$C(x):=\lim_{n\to\infty}2^{-3sn}f(2^{sn}x)$$

且有

$$\|f(x)-A(x)-Q(x)-C(x)\|\leqslant$$
$$\frac{1}{2^2|1-L^s|}\left[\frac{1}{2}\varphi(0,x)+\varphi(x,x)\right]+$$
$$\frac{5}{48|1-L^s|}\left[\frac{1}{2}\varphi(0,x)+\varphi(2x,x)\right]$$

参考文献:

[1] RASSIAS T M. On the stability of the linear mapping in Banach spaces [J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 1978, 72(2): 297 -300.

[2] BADORA R. On approximate ring homomorphisms [J]. J Math Anal Appl, 2002, 276(2): 589 -597.

[3] JUN K W, KIM H M. The generalized Hyers-Ulam-Rassias stability of a cubic functional equation [J]. J Math Anal Appl, 2002, 274(2): 867 -878.

[4] ABBAS N. Hyers-Ulam-Rassias stability of a cubic functional equation [J]. Bull Korean Math Soc, 2007, 44(4): 825 -840.

[5] RASSIAS J M, KIM H M. Generalized Hyers-Ulam Stability for additive functional equations in quasi-β-normed spaces [J]. J Math Anal Appl, 2009, 356(1): 302 -309.

[6] ESKANDANI G Z, GAVRUTA P. Hyers-Ulam-Rassias stability of Pexiderized Cauchy functional equation in 2 -Banach spaces [J]. J Nonlinear Sci Appl, 2012, 5(6): 459 -465.

[7] PERKINS A M, SAHOO P K. A functional equation with involution related to the cosine function [J]. Aequat Math, 2016, 90(1): 123 -131.

[8] HUANG J, LI Y. Hyers-Ulam stability of linear functional differential equations [J]. J Math Anal Appl, 2015, 426(2): 1192 -1200.

[9] 陈建军,王晓峰. 单位球 Dirichlet 空间上的紧 Toeplitz 算子[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2016, 55(6): 74 -78.
CHEN J J, WANG X F. Compact Toeplitz operators on the Dirichlet space over unit ball [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2016, 55(6): 74 -78.

[10] 马西霞. 五维空间 Navier-Stokes 方程的正则性[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2017, 56(1): 96 -101.
MA X X. The regularity of Navier-Stokes equations in five-dimensional space [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2017, 56(1): 96 -101.