

一类分数阶 Genesio-Tesi 系统的滑模混沌同步*

毛北行¹, 李巧利²

(1. 郑州航空工业管理学院理学院, 河南 郑州 450015;
2. 河南工业大学理学院, 河南 郑州 450001)

摘要: 研究了 Genesio-Tesi 系统的滑模混沌同步问题, 基于 Lyapunov 稳定性理论及分数阶微积分给出了主从系统取得混沌同步的充分条件, 研究表明, 在一定条件下, 选取适当的控制器 Genesio-Tesi 系统的主从系统是滑模混沌同步的。

关键词: 滑模; 混沌同步; Genesio-Tesi 系统

中图分类号: O482.4 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579(2017)02-0076-04

Sliding mode chaos synchronization of a class of fractional-order Genesio-Tesi systems

MAO Beixing¹, LI Qiaoli²

(1. College of Science, Zhengzhou Institute of Aeronautical Industry Management, Zhengzhou 450015, China;
2. College of Science, Henan University of Technology, Zhengzhou 450001, China)

Abstract: The sliding mode chaos synchronization problem of Genesio-Tesi systems using is studied based on Lyapunov stability theory and fractional-order calculus. The sufficient conditions for the master-slave systems realized chaos synchronization are concluded. The study illustrated that emotion models are sliding mode chaos synchronization under certain conditions choosing proper controller.

Key words: sliding mode; chaos synchronization; Genesio-Tesi systems

在传统的控制理论中, 通常假设被控对象和控制器模型为整数阶次, 然而这样的整数阶系统与实际系统存在一定的差距。Mandelbrot 指出在自然界和人类社会存在着大量的分数维系统^[1-7], 采用分数阶模型能更好的揭示对象的行为和本质。Oustaloup^[8]提出了将分数阶控制器用于动态系统的设想, 研究和对比分析表明分数阶控制器有更好的鲁棒性等优点。分数阶滑模控制, 能够在传统的滑模控制的基础上提高系统的控制性能和精确性, 成为现代非线性控制的重要研究方法^[9-16]。Genesio-Tesi 系统是物理学中典型的混沌系统, 该系统具有混

沌系统的很多特征, 它包含了一个简单的平方项, 在文献 [17] 中 Genesio-Tesi 混沌系统得到了详细的论述, 文献 [18] 研究了 Genesio-Tesi 系统的自适应同步问题, 文献 [19] 研究了分数阶 Genesio-Tesi 系统的混沌同步问题, 讨论了阶次相等和阶次不等两种情形。本文研究了一类具有五次方非线性项的整数阶与分数阶 Genesio-Tesi 系统的滑模混沌同步问题, 基于 Lyapunov 稳定性理论及分数阶微积分给出了主从系统取得混沌同步的充分条件, 研究表明, 一定条件下, 选取适当的控制器 Genesio-Tesi 系统的主从该系统是滑模混沌同步的。

* 收稿日期: 2016-09-28

基金项目: 国家自然科学基金青年基金(NSFC11501525); 河南省科技厅软科学项目(142400411192); 河南省高等学校青年骨干教师资助计划项目(2013GGJS-142)

作者简介: 毛北行(1976年生), 男; 研究方向: 复杂网络与混沌同步; E-mail: bxmao329@163.com

1 主要结果

以下考虑如下一类五次方非线性项的整数阶 Genesio-Tesi 混沌系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -b_1x_1 - b_2x_2 - b_3x_3 + b_4x_1^5 \end{aligned} \quad (1)$$

当 $b_1 = 6, b_2 = 2.29, b_3 = 1.2, b_4 = -1$ 时, 系统出现混沌吸引子, 以上述系统为驱动系统, 设计响应系统为:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 \\ \dot{y}_2 &= y_3 \\ \dot{y}_3 &= -b_1y_1 - b_2y_2 - b_3y_3 + b_4y_1^5 + u \end{aligned} \quad (2)$$

定义系统误差 $e_i(t) = y_i(t) - x_i(t), i = 1, 2, 3$, (2) 式减去 (1) 式得到误差系统:

$$\begin{aligned} \dot{e}_1 &= e_2 \\ \dot{e}_2 &= e_3 \\ \dot{e}_3 &= -b_1e_1 - b_2e_2 - b_3e_3 + b_4(y_1^5 - x_1^5) + u \end{aligned} \quad (3)$$

定理 1 若设计滑模函数

$$\begin{aligned} s(t) &= b_2e_1(t) + b_3e_2(t) + \varepsilon e_3(t), \varepsilon > 0, \\ u(t) &= b_1e_1 + b_4(x_1^5 - y_1^5) - \eta \operatorname{sgn}(s(t)), \eta > 0, \end{aligned}$$

则上述系统 (1) 与 (2) 滑模混沌同步。

证明 $s(t) = b_2e_1(t) + b_3e_2(t) + \varepsilon e_3(t)$, 当发生滑模运动时, 需满足如下条件

$$s(t) = b_2e_1(t) + b_3e_2(t) + \varepsilon e_3(t) = 0 \quad (4)$$

上述方程等价于 $\varepsilon \ddot{e}_1 + b_3 \dot{e}_1 + b_2 e_1 = 0$, 对应的特征方程为:

$\varepsilon \lambda^2 + b_3 \lambda + b_2 = 0$, 无论 b_3^2 是否大于 $4\varepsilon b_2$, 特征根均有负实部, 从而 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_1\| = 0$, 由于

$$\dot{s}(t) = b_2 \dot{e}_1(t) + b_3 \dot{e}_2(t) + \varepsilon \dot{e}_3(t) = 0 \quad (5)$$

上述微分方程等价于

$\varepsilon \ddot{e}_2 + b_3 \dot{e}_2 + b_2 e_2 = 0$, 对应的特征方程为 $\varepsilon \lambda^2 + b_3 \lambda + b_2 = 0$, 无论 b_3^2 是否大于 $4\varepsilon b_2$, 特征根均有负实部, 所以 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|e_2\| = 0$, 由 $s(t) = b_2e_1(t) + b_3e_2(t) + \varepsilon e_3(t) = 0$, 由于 $e_1 \rightarrow 0, e_2 \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \|e_3\| = 0$ 。

当不在滑模面上运动时, 构造 Lyapunov 函数:

$$V(t) = \frac{1}{2}s^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \dot{V} &= s\dot{s} = s[b_2\dot{e}_1(t) + b_3\dot{e}_2(t) + \varepsilon\dot{e}_3(t)] = \\ &= s[-be_1 + b_4(y_1^5 - x_1^5) + u] \end{aligned}$$

由于符号函数的性质: $s(t) \cdot \operatorname{sgn}(s(t)) = |s(t)|$, 所以

$$\dot{V} = -\eta |s(t)| < 0$$

定义 1^[20] Caputo 分数阶导数定义为:

$${}_c D_{t_0, t}^\alpha = D_{t_0, t}^{-(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} x(t) =$$

$$\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_{t_0}^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} x^{(n)}(\tau) d\tau,$$

$$n-1 < \alpha < n \in \mathbb{Z}^+$$

以下考虑分数阶 Genesio-Tesi 混沌系统

$$\begin{aligned} D_t^q x_1 &= x_2 \\ D_t^q x_2 &= x_3 \\ D_t^q x_3 &= -b_1x_1 - b_2x_2 - b_3x_3 + b_4x_1^5 \end{aligned} \quad (6)$$

$b_1 = 2, b_2 = 3.5, b_3 = 0.3, b_4 = -1, q = 0.95$ 时系统呈现混沌态, 以上述系统作为驱动系统, 设计响应系统为:

$$\begin{aligned} D_t^q y_1 &= y_2 \\ D_t^q y_2 &= y_3 \\ D_t^q y_3 &= -b_1y_1 - b_2y_2 - b_3y_3 + b_4y_1^5 + u \end{aligned} \quad (7)$$

定义系统误差 $e_i(t) = y_i(t) - x_i(t), i = 1, 2, 3$, 以上两式相减得到误差系统为:

$$\begin{aligned} D_t^q e_1 &= e_2 \\ D_t^q e_2 &= e_3 \\ D_t^q e_3 &= -b_1e_1 - b_2e_2 - b_3e_3 + b_4(y_1^5 - x_1^5) + u \end{aligned} \quad (8)$$

定理 2 当 $0.5 < q < 1$ 时, 若设计滑模面 $s(t) = D_t^{q-1}(b_2e_1(t) + b_3e_2(t) + \varepsilon e_3(t)), \varepsilon > 0$, 控制器 $u(t) = b_1e_1 + b_4(x_1^5 - y_1^5) - \eta \operatorname{sgn}(s(t)), \eta > 0$, 则上述系统 (6) 与 (7) 是滑模混沌同步的。

证明

$$s(t) = D_t^{q-1}(b_2e_1(t) + b_3e_2(t) + \varepsilon e_3(t))$$

当系统发生滑模运动时, 需满足如下条件:

$$s(t) = D_t^{q-1}(b_2e_1(t) + b_3e_2(t) + \varepsilon e_3(t)) = 0 \quad (9)$$

$$\Rightarrow D_t^{1-q} D_t^{q-1}(b_2e_1(t) + b_3e_2(t) + \varepsilon e_3(t)) = 0$$

$$\Rightarrow b_2e_1 + b_3D_t^q e_1 + \varepsilon D_t^{2q} e_1 = 0$$

当 $\varepsilon > 0$ 时, 对上式使用拉普拉斯变换得

$$\varepsilon s^{2q} E_1(s) - s^{2q-1} \varepsilon e_1(0) - \varepsilon s^{2q-2} \dot{e}_1(0) +$$

$$s^q b_3 E_1(s) - b_3 s^{q-1} e_1(0) + b_2 E_1(s) = 0$$

其中 $E_1(s) = L(e_1(t))$, L 表示拉普拉斯算子, 根据拉普拉斯终值定理

$$\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e_1(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s E_1(s) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{(\varepsilon s^{2q} + b_3 s^q) e_1(0)}{\varepsilon s^{2q} + b_3 s^q + b_2} - \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\varepsilon s^{2q-1} e_2(0)}{\varepsilon s^{2q} + b_3 s^q + b_2} = 0$$

$$\dot{s} = \varepsilon e_2 + D_t^q e_2 + D_t^q D_t^q e_2 = 0 \quad (10)$$

当 $\varepsilon > 0$ 时, 对上式利用拉普拉斯变换及终值定理, 同理可得 $\lim_{t \rightarrow \infty} e_2 = 0$ 。

由 $\dot{s} = b_2 e_2 + b_3 D_t^q e_2 + \varepsilon D_t^q D_t^q e_2 = 0$, 即有: $b_2 e_2 + b_3 e_3 + \varepsilon D_t^q e_3 = 0$, 由于 $e_2 \rightarrow 0$, 所以上式得到 $D_t^q e_3 = -\frac{b_3}{\varepsilon} e_3$, 所以上式渐稳, $\Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e_3 = 0$ 。

构造 Lyapunov 函数: $V(t) = \frac{1}{2} s^2$

$$\Rightarrow \dot{V} = s \dot{s} = s[-b_1 + b_4(\gamma_1^5 - x_1^5) + u]$$

由于符号函数的性质:

$$s(t) \cdot \operatorname{sgn}(s(t)) = |s(t)|, \text{ 所以:}$$

$$\dot{V} = -\eta |s(t)| < 0$$

2 数值仿真

整数阶 Genesio-Tesi 混沌系统, 当 $b_1 = 6, b_2 = 2.29, b_3 = 1.2, b_4 = -1$ 时, 系统出现混沌吸引子, 设计滑模函数 $s(t) = b_2 e_1(t) + b_3 e_2(t) + \varepsilon e_3(t)$, 控制器 $u(t) = b_1 e_1 + b_4(x_1^5 - \gamma_1^5) - \eta \operatorname{sgn}(s(t))$, $\varepsilon = 2.5, \eta = 3$, 误差系统初始值设置为: $(e_1(0), e_2(0), e_3(0)) = (-4, -8, 10)$, 其中其误差响应曲线如图 1 所示, 从图 1 中可以看出 $T > 0.246$ s 以后, 误差曲线趋近于 0。

分数阶 Genesio-Tesi 混沌系统。

当 $b_1 = 2, b_2 = 3.5, b_3 = 0.3, b_4 = -1, q = 0.95$ 时系统呈现混沌态, 设计滑模函数 $s(t) = D_t^{q-1}(b_2 e_1(t) + b_3 e_2(t) + \varepsilon e_3(t))$, 控制器 $u(t) = b_1 e_1 + b_4(x_1^5 - \gamma_1^5) - \eta \operatorname{sgn}(s(t))$, $\varepsilon = 3, \eta = 4$, 误差系统初始值设置为: $(e_1(0), e_2(0), e_3(0)) = (-5, -4, -3)$, 其中其误差响应曲线如图 2 所示, 从图中可以看出 $T > 0.242$ s 以后, 误差曲线趋近于 0。

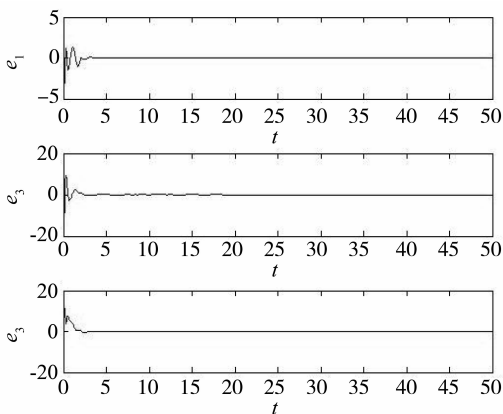


图 1 整数阶系统的误差

Fig. 1 Errors of integer systems

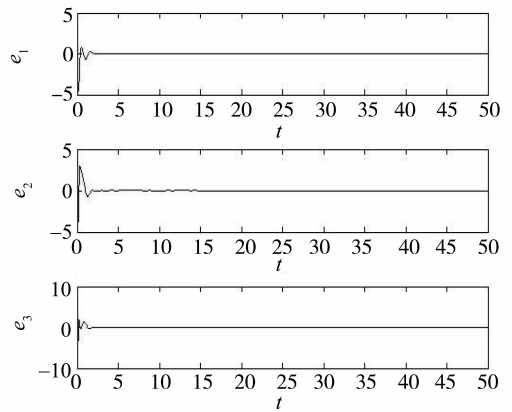


图 2 分数阶系统的误差

Fig. 2 Errors of fractional-order systems

3 结论

基于 Lyapunov 稳定性理论及分数阶微积分, 研究了一类具有五次方非线性项的整数阶以及分数阶 Genesio-Tesi 系统的滑模混沌同步问题, 给出了主从系统取得滑模混沌同步的充分性条件, 数值仿真表明该方法是可行性的。

参考文献:

- [1] 丁金凤, 张毅. 基于按指数律拓展的分数阶积分的 El-Nabulsi-Pfaff 变分问题的 Noether 对称性[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2014, 54(6): 150-154.
DING J F, ZHANG Y. Noether symmetries for El-Nabulsi-Pfaff variational problem for extended exponential fractional integral[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2014, 53(6): 150-154.
- [2] 金世欣, 张毅. 基于 Caputo 分数阶导数的含时滞的非保守系统动力学的 Noether 对称性[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2015, 54(5): 24-31.
JIN S X, ZHANG Y. Noether symmetries for non-conservative Lagrange systems with time delay based on Caputo fractional derivative [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2015, 54(5): 49-55.
- [3] ZHANG Y. Fractional differential equations of motion in terms of combined riemann-liouville derivatives [J]. Chinese Physics B, 2012, 8(21): 302-306.
- [4] 张毅. 相空间中类分数阶 Noether 对称性与守恒量[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2013, 52(4): 20-25.
ZHANG Y. Noether symmetry and conserved quantity for a fractional action like variational problem in phase space [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2013, 52(4): 45-50.

- [5] MANDELBROT B B, van NESS J W. Fractional brownian motions; fractional noises and applications[J]. SIAM Review, 1968, 10(4): 422 - 437.
- [6] MANDELBROT B B. The fractal geometry of nature [M]. New York: W H Freeman & Co Ltd, 1974.
- [7] BAGLEY R L, TORVIK P J. On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials[J]. J Appl Mech, 1984, 51(4): 294 - 298.
- [8] OUSTALOUP A. La Dérivation non entiere: Théorie, synthèse et applications[M]. Paris; Hermes, 1995.
- [9] SHAHIRI M, GHADRI R, RANJBAR N, et al. Chaotic fractional-order coulletsystem; synchronization and control approach [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 2010, 15: 665 - 674.
- [10] HAMAMMCI K M. Calculation of all stabilizing fractional-order PD controllers for integrating time delay systems [J]. Comput Math Appl, 2010, 15: 1267 - 1278.
- [11] MATOUK A. Chaos feedback and synchronization of fractional-order modified autonomous Van der pol-Duffling circuit [J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 2011, 16: 975 - 986.
- [12] MOMAHHAD P A. Robust finite-time stabilization of fractional-order chaotic susyems based on fractional Lyapunov stability theory [J]. Journal of Computation and Nonlinear Dynamics, 2012, 7: 1011 - 1015.
- [13] MILAD, MH D. Synchroni-zation of fractional order hyper-chaotic systems based on a new adaptive sliding mode control [J]. Int J Dynam Control, 2015, 10(7): 435 - 446.
- [14] DELAVARI H, GHADERI R, RANJBAR A, et al. Fuzzy fractional order sliding mode controller for nonlinear systems[J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2010, 15(4): 963 - 978.
- [15] 毛北行, 李巧利. 一类分数阶 Duffling-Van der pol 系统的混沌同步 [J]. 吉林大学学报(自然科学版), 2016, 54(2): 369 - 373.
- MAO B X, LI Q L. Chaos synchronization of a class of fractional-order Duffling-Van der pol systems [J]. Journal of Jilin University (Natural Science Edition), 2016, 54(2): 369 - 373.
- [16] 王悍泉, 刘凌, 吴华伟. 改进型滑模观测器的永磁同步电机无传感器控制策略 [J]. 西安交通大学学报, 2016, 50(6): 104 - 109.
- WANG H N, LIU L, WU H W. A sensorless permanent magnet synchronous motor control strategy for improved sliding mode observers with stator parameters identification [J]. Journal of Xi an Jiaotong University, 2016, 50(6): 104 - 109.
- [17] LU J G. Chaotic dynamics and cynchronization of fractional-order Genesio-Tesi systems. [J]. Chinese Physics, 2005, 14(8): 1517 - 1521.
- [18] 田现东, 卢殿臣. Genesio-Tesi 系统的自适应同步控制 [J]. 昆明理工大学学报(理工版), 2007, 32(6): 119 - 124.
- TIAN X D, LU D C. Self-adaptive synchronization control of Genesio-Tesi system [J]. Journal of Kunming University of Science and Technology (Science and Technology) 2007, 32(6): 119 - 124.
- [19] 刘晓君, 洪灵. 分数阶 Genesio-Tesi 系统的混沌及自适应同步 [J]. 动力学与控制学报, 2016, 14(4): 318 - 323.
- LIU X J, HONG L. Chaos and adaptive synchronization in fractional-order Genesio-Tesi systems [J]. Journal of Dynamics and Control, 2016, 14(4): 318 - 323.
- [20] POD L B. Fractional differential equation [M]. San Diego, CA, USA: Academic Press, 1999: 715 - 719.