第 56 卷　第 6 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 56　No. 6
2017 年　11 月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　Nov.　2017

DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2017.06.011

关于凸期望的极小元的一些结果*

纪荣林[1]，周津名[2]
（1. 安徽大学数学科学学院，安徽 合肥 230601；
2. 合肥师范学院数学与统计学院，安徽 合肥 230601）

摘　要：在非线性数学期望的公理化框架下，从凸期望和凹期望之间的 Sandwich 定理的视角出发，研究了带控制条件的凸期望集合的极小元问题，建立了一类带单边或双边控制条件的凸期望集合的极小元的论断与 Sandwich 定理之间的等价关系。

关键词：非线性数学期望；凸期望；Sandwich 定理；极小元

中图分类号：O211.67　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**0529－6579（2017）06－0072－04

Some results on the minimal members of convex expectations

JI Ronglin[1], *ZHOU Jinming*[2]
（1. School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230601, China;
2. School of Mathematics and Statistics, Hefei Normal University, Hefei 230601, China）

Abstract: Under the framework of nonlinear expectations, the minimal members of convex expectations with some dominating conditions are studied in the view of the Sandwich theorem for a convex expectation and a concave expectation. The conclusions of the minimal members of convex expectations with single or two dominating conditions are proved to be equivalent to the Sandwich theorem.

Key words: nonlinear expectation; convex expectation; Sandwich theorem; minimal member

期望效用理论是现代数理经济学的基础，但是诺贝尔经济学奖获得者 Allais 所提出的著名的 Allais 悖论使得期望效用理论受到了很大的挑战。相关研究表明基于线性数学期望的线性性是导致 Allais 悖论的主要原因，由此学者们致力于研究非线性数学期望。1997 年，山东大学彭实戈院士通过著名的倒向随机微分方程的解引入了一类典型的域流相容的非线性数学期望——g－期望[1]。g－期望理论是研究递归效用及金融风险度量的有力工具，如 Chen 等[2]利用 g－期望研究了递归效用；Rosazza Gianin[3]首次研究了 g－期望与风险度量之间的关系；Jiang[4]建立了 g－期望理论与金融风险度量之间的一一对应关系。2002 年，Coquet 等[5]在研究 g－期望的性质时首次提出了非线性数学期望的公理化假设条件。众所周知，非线性数学期望与金融风险度量之间有着密切的联系，Bion[6]、Delbaen 等[7]在研究风险度量的相关性质时，都附加了惩罚函数的零值假设条件，即某线性数学期望 E_Q 受控于风险度量。2009 年，Jia[8]在非线性数学期望的公理化框架下，探索了线性数学期望与非线性期望之间的控制关系，证明了次线性期望集合的极小元是线性数学期望，且关于次线性期望和超线性期望之间的 Sandwich 定理成立；2011 年，Huang 等[9]试图证明凸期望集合的极小元是线性数学期望且关于凸期望和凹期望之间的 Sandwich 定理成立；2015 年，Ji 等[10]则研究了带限制条件的凸期

* **收稿日期：**2017－02－08
基金项目：江苏省自然科学基金青年基金（BK20150167）；安徽大学博士科研启动（J01003202）
作者简介：纪荣林（1984 年生），男；**研究方向：**非线性数学期望；E-mail：jironglin@ahu.edu.cn
通信作者：周津名（1982 年生），女；**研究方向：**非线性数学期望；E-mail：zjminguv@163.com

望集合的极小元的存在性及其等价刻画。进一步地，在 g – 期望的框架下，受 He 等[11] 的工作启发，文献［12］获得了凸 g – 期望的极小元问题及其等价刻画。

由此，一个自然的问题是：在非线性数学期望的框架下，凸期望集合的极小元的相关论断与凸期望和凹期望之间的 Sandwich 定理有着什么样的内在联系？

受 Huang 等[9] 及 Ji 等[10] 工作启发，本文致力于在非线性数学期望的公理化框架下研究凸期望集合的极小元的相关论断和 Sandwich 定理之间的内在联系，证明了一类带单边或双边控制条件的凸期望集合的极小元的论断与凸期望和凹期望之间的 Sandwich 定理之间的等价关系，完善了 Huang 等[9] 及 Ji 等[10] 的相关结论。

1　预备知识

设 (Ω,F,P) 是一个概率空间。下面我们通过公理化假设的方法引入线性数学期望和非线性数学期望的定义（参阅文献［5］）。

定义 1　称实值泛函 $E[\cdot]:L^1(\Omega,F,P)\to\mathbf{R}$ 为线性数学期望，若其满足：

(i) 保常数性：$E[c]=c,\forall c\in\mathbf{R}$；

(ii) 单调性：$E[X]\geqslant E[Y]$，若 $X\geqslant Y,P-a.s.$；

严格单调性：$E[X]\geqslant E[Y]$，若 $X\geqslant Y,P-a.s.$，且 $P(X>Y)>0$；

(iii) 线性性：$E[\alpha X+\beta Y]=\alpha E[X]+\beta E[Y]$，$\forall\alpha,\beta\in\mathbf{R}$。

定义 2　称实值泛函 $\varepsilon[\cdot]:L^1(\Omega,F,P)\to\mathbf{R}$ 为非线性数学期望，若其满足：

(i) 保常数性：$\varepsilon[c]=c$，$\forall c\in\mathbf{R}$；

(ii) 单调性：$\varepsilon[X]\geqslant\varepsilon[Y]$，若 $X\geqslant Y$，$P-a.s.$；

严格单调性：$\varepsilon[X]\geqslant\varepsilon[Y]$，若 $X\geqslant Y$，$P-a.s.$，且 $P(X>Y)>0$。

定义 3　称非线性数学期望 ε 为次线性期望（超线性期望），若其满足：

(i) 次可加性（超可加性）：$\varepsilon[X+Y]\leqslant(\geqslant)\varepsilon[X]+\varepsilon[Y]$；

(ii) 正齐次性：$\varepsilon[\lambda X]=\lambda\varepsilon[X]$，$\forall\lambda\in\mathbf{R}$。

定义 4　称非线性期望 ε 为凸期望（凹期望），若其满足：

凸性（凹性）：$\varepsilon[\alpha X+(1-\alpha)Y]\leqslant(\geqslant)\alpha\varepsilon[X]+(1-\alpha)\varepsilon[Y]$，$\forall\alpha\in[0,1]$。

定义 5　设 $(S,\prec)$ 为一偏序集，称 e_0 为 S 的一个极小元，若 e_0 满足：

(i) $e_0\in S$；

(ii) 对任意的 $e\in S$，如果 $e\prec e_0$，则有 $e=e_0$。

为方便读者起见，线性数学期望的全体构成的集合记为 S^l；次线性期望的全体构成的集合记为 S^{sl}；凸期望的全体构成的集合记为 S^{cv}。显然，$S^l\subset S^{sl}\subset S^{cv}$。为书写方便，对非线性数学期望 ε_1 和 ε_2，我们用 $\varepsilon_1\geqslant\varepsilon_2$ 表示 $\varepsilon_1[X]\geqslant\varepsilon_2[X]$，$\forall X\in L^1(\Omega,F,P)$；用 $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ 表示 $\varepsilon_1[X]=\varepsilon_2[X]$，$\forall X\in L^1(\Omega,F,P)$。

下述引理 1、引理 2 分别来自文［8］定理 2.7 和定理 3.1，其中引理 2 被称为次线性期望与超线性期望之间的 Sandwich 定理。

引理 1　非线性数学期望 ε_0 为集合 S^{sl} 的一个极小元当且仅当 $\varepsilon_0\in S^l$。

引理 2　设 ε_1 为次线性期望，ε_2 为超线性期望。若 $\varepsilon_1\geqslant\varepsilon_2$，则存在线性数学期望 E 使得 $\varepsilon_1\geqslant E\geqslant\varepsilon_2$。

2　主要结果

定理 1　设 ε_1 和 ε_2 为非线性数学期望，则下述论断均成立且相互等价：

(i) 设 ε_1 为凸期望，ε_2 为凹期望。若 $\varepsilon_1\geqslant\varepsilon_2$，则存在线性数学期望 E 使得 $\varepsilon_1\geqslant E\geqslant\varepsilon_2$；

(ii) 设 ε_2 为凹期望。则集合 $S^{cv}(\varepsilon_2):=\{\varepsilon:\varepsilon\geqslant\varepsilon_2,\varepsilon\in S^{cv}\}$ 至少存在一个极小元，且 ε 为 $S^{cv}(\varepsilon_2)$ 的极小元当且仅当 $\varepsilon\in S^l\cap S^{cv}(\varepsilon_2)$；

(iii) 设 ε_1 为凸期望，ε_2 为凹期望且 $\varepsilon_1\geqslant\varepsilon_2$。则集合 $S^{cv}(\varepsilon_1,\varepsilon_2):=\{\varepsilon:\varepsilon_1\geqslant\varepsilon\geqslant\varepsilon_2,\varepsilon\in S^{cv}\}$ 至少存在一个极小元，且 ε 为 $S^{cv}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 的极小元当且仅当 $\varepsilon\in S^l\cap S^{cv}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$。

证明　首先，证明（i）成立。对任意的凸期望 ε_1，定义

$$\varepsilon_1^*[X]:=\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\varepsilon_1\left[\frac{X}{\lambda}\right],\ \forall X\in L^1(\Omega,F,P)\tag{1}$$

则 ε_1^* 是次线性期望。事实上，令 $\lambda_1\geqslant\lambda_2>0$，$k:=\dfrac{\lambda_1}{\lambda_2}\geqslant 1$，对每一个 $X\in L^1(\Omega,F,P)$，由 ε_1 的保常数性和凸性知

$$\lambda_1\varepsilon_1\left[\frac{X}{\lambda_1}\right]=k\lambda_2\varepsilon_1\left[\frac{X}{\lambda_2}\frac{1}{k}\right]\leqslant\lambda_2\varepsilon_1\left[\frac{X}{\lambda_2}\right]$$

即对每一个 $X\in L^1(\Omega,F,P)$，$\lambda\varepsilon_1\left[\dfrac{X}{\lambda}\right]$ 是关于 λ 在

$(0, +\infty)$ 上递减的。令 $\lambda = 1$, 得

$$\varepsilon_1^* \leqslant \varepsilon_1 \tag{2}$$

类似地，对每一个 $X \in L^1(\Omega,F,P)$，由 $-\lambda\varepsilon_1 \cdot \left[-\frac{X}{\lambda}\right]$ 是关于 λ 在 $(0, +\infty)$ 递增的及 ε_1 的凸性，可得

$$\lambda\varepsilon_1\left[\frac{X}{\lambda}\right] \geqslant -\lambda\varepsilon_1\left[-\frac{X}{\lambda}\right],$$

$$\varepsilon_1^*[X] = \lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\varepsilon_1\left[\frac{X}{\lambda}\right] \geqslant$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty} -\lambda\varepsilon_1\left[-\frac{X}{\lambda}\right] \geqslant -\varepsilon_1[-X] \tag{3}$$

结合式（2）–（3）知，对任意的 $X \in L^1(\Omega,F,P)$, $\varepsilon_1^*[X]$ 是实值的。

由 ε_1^* 的定义，立得

$$\varepsilon_1^*[c] = c, \forall c \in \mathbf{R} \tag{4}$$

$$\varepsilon_1^*[X] \geqslant \varepsilon_1^*[Y], \quad 若 X \geqslant Y, P - a.s. \tag{5}$$

对任意的 $\alpha \in [0,1]$, $X, Y \in L^1(\Omega,F,P)$，由 ε_1 的凸性及 ε_1^* 的实值性，可知

$$\varepsilon_1^*[\alpha X + (1-\alpha)Y] =$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\varepsilon_1\left[\alpha\frac{X}{\lambda} + (1-\alpha)\frac{Y}{\lambda}\right] \leqslant$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\left(\alpha\varepsilon_1\left[\frac{X}{\lambda}\right] + (1-\alpha)\varepsilon_1\left[\frac{X}{\lambda}\right]\right) =$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\alpha\lambda\varepsilon_1\left[\frac{X}{\lambda}\right] + \lim_{\lambda\to+\infty}(1-\alpha)\lambda\varepsilon_1\left[\frac{Y}{\lambda}\right] =$$

$$\alpha\varepsilon_1^*[X] + (1-\alpha)\varepsilon_1^*[Y] \tag{6}$$

接下来，证明 ε_1^* 满足正齐次性，即

$$\varepsilon_1^*[\beta X] = \beta\varepsilon_1^*[X], \forall \beta \geqslant 0, X \in L^1(\Omega,F,P) \tag{7}$$

事实上，当 $\beta = 0$ 时，由 ε_1^* 的实值性及式（4），立得式（7）成立。令 $\beta > 0$，则对每一个 $X \in L^1(\Omega,F,P)$

$$\varepsilon_1^*[\beta X] = \lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\varepsilon_1\left[\beta\frac{X}{\lambda}\right] =$$

$$\lim_{\lambda\to+\infty}\beta\lambda\varepsilon_1\left[\frac{X}{\lambda}\right] = \beta\varepsilon_1^*[X]$$

对任意的 $X, Y \in L^1(\Omega,F,P)$，由式（6）–（7）知，

$$\varepsilon_1^*[X+Y] \leqslant \varepsilon_1^*[X] + \varepsilon_1^*[Y] \tag{8}$$

结合 ε_1^* 的实值性、式（4）–（5）及式（7）–（8），欲证 ε_1^* 是次线性期望，只需验证 ε_1^* 满足严格单调性条件。事实上，令 $X \geqslant Y$, $P-a.s.$，且 $P(X > Y) > 0$。由 ε_1 的严格单调性、式（2）及式（7），得

$$\varepsilon_1^*[Y] - \varepsilon_1^*[X] \leqslant \varepsilon_1^*[Y-X] \leqslant$$

$$\varepsilon_1[Y-X] < \varepsilon_1[0] = 0$$

故 ε_1^* 是次线性期望。

下证（i）成立，即凸期望与凹期望之间的 Sandwich 定理成立。令

$$\varepsilon_2^*[X] := \lim_{\lambda\to+\infty}\lambda\varepsilon_2\left[\frac{X}{\lambda}\right], \ \forall X \in L^1(\Omega,F,P)$$

类似于上述步骤，易验证 ε_2^* 为超线性期望且 $\varepsilon_2^* \geqslant \varepsilon_2$。结合 $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2$，可得 $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_1^* \geqslant \varepsilon_2^* \geqslant \varepsilon_2$。注意到 ε_1^* 为次线性期望、ε_2^* 为超线性期望且 $\varepsilon_1^* \geqslant \varepsilon_2^*$，应用引理 2 知，存在线性数学期望 E 使得 $\varepsilon_1^* \geqslant E \geqslant \varepsilon_2^*$，由 $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_1^* \geqslant \varepsilon_2^* \geqslant \varepsilon_2$，立得

$$\varepsilon_1 \geqslant E \geqslant \varepsilon_2$$

其次，证明（i）$\Rightarrow$（ii）成立。令

$$\overline{\varepsilon}_2[X] := -\varepsilon_2[-X], \forall X \in L^1(\Omega,F,P)$$

易验证 $\overline{\varepsilon}_2$ 是凸期望，按式（1）所定义的 $\overline{\varepsilon}_2^*$ 为次线性期望且 $\overline{\varepsilon}_2 \geqslant \overline{\varepsilon}_2^*$。应用引理 1 知存在线性数学期望 E_0 使得 $\overline{\varepsilon}_2^* \geqslant E_0$，从而 $\overline{\varepsilon}_2 \geqslant E_0$，即

$$-\varepsilon_2[-X] \geqslant E_0[X] =$$

$$-E_0[-X], \forall X \in L^1(\Omega,F,P)$$

故

$$E_0[X] \geqslant \varepsilon_2[X], \forall X \in L^1(\Omega,F,P)$$

注意到 $E_0 \in S^{cv}$，从而 $E_0 \in S^{cv}(\varepsilon_2)$。易验证 E_0 为集合 $S^{cv}(\varepsilon_2)$ 的一个极小元。事实上，若存在非线性数学期望 $\varepsilon_0 \in S^{cv}(\varepsilon_2)$ 使得 $\varepsilon_0 \leqslant E_0$，则由 ε_0 的保常数性和凸性知，对任意的 $X \in L^1(\Omega,F,P)$ 有

$$0 = 2\varepsilon_0[X-X] =$$

$$2\varepsilon_0\left[\frac{1}{2}X + \frac{1}{2}(-X)\right] \leqslant \varepsilon_0[X] + \varepsilon_0[-X]$$

结合 $\varepsilon_0 \leqslant E_0$ 及 E_0 的线性性得

$$\varepsilon_0[-X] \leqslant E_0[-X] = -E_0[X] \leqslant$$

$$-\varepsilon_0[X] \leqslant \varepsilon_0[-X], \forall X \in L^1(\Omega,F,P)$$

即 $\varepsilon_0 = E_0$。故 E_0 为集合 $S^{cv}(\varepsilon_2)$ 的一个极小元。

下证集合 $S^{cv}(\varepsilon_2)$ 的极小元必为线性数学期望。设 ε 为集合 $S^{cv}(\varepsilon_2)$ 的一个极小元，则由 $S^{cv}(\varepsilon_2)$ 的定义知 ε 为凸期望且 $\varepsilon \geqslant \varepsilon_2$。由（i）知，存在线性数学期望 E_0 使得

$$\varepsilon \geqslant E_0 \geqslant \varepsilon_2$$

注意到 $E_0 \in S^{cv}$ 且 $E_0 \geqslant \varepsilon_2$，从而 $E_0 \in S^{cv}(\varepsilon_2)$。又 ε 为集合 $S^{cv}(\varepsilon_2)$ 的极小元，结合 $\varepsilon \geqslant E_0$ 及 $E_0 \in S^{cv}(\varepsilon_2)$，立得 $\varepsilon = E_0$，即

$$\varepsilon \in S^l \cap S^{cv}(\varepsilon_2)$$

接下来，证明（ii）$\Rightarrow$（iii）成立。由 ε_1 为凸期望、ε_2 为凹期望及 $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2$ 知，

$$\varepsilon_1 \in S^{cv}(\varepsilon_2)$$

由（ii）知集合 $S^{cv}(\varepsilon_2)$ 的极小元存在且为线性数学期望,从而存在线性数学期望 $E_0 \in S^{cv}(\varepsilon_2)$ 使得 $\varepsilon_1 \geqslant E_0$。结合集合 $S^{cv}(\varepsilon_2)$ 的定义知

$$\varepsilon_1 \geqslant E_0 \geqslant \varepsilon_2$$

故 $E_0 \in S^{cv}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$。易证 E_0 为集合 $S^{cv}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 的一个极小元。事实上,若存在非线性数学期望 $\varepsilon_0 \in S^{cv}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 使得 $\varepsilon_0 \leqslant E_0$,则由 ε_0 的保常数性、凸性及 E_0 的线性性知

$$\varepsilon_0[X] \leqslant E_0[X] = -E_0[-X] \leqslant -\varepsilon_0[-X] \leqslant \varepsilon_0[X], \quad \forall X \in L^1(\Omega,F,P)$$

即 $\varepsilon_0 = E_0$。故 E_0 为集合 $S^{cv}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 的一个极小元。

下证集合 $S^{cv}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 的极小元必为线性数学期望。设 ε 为集合 $S^{cv}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 的一个极小元，易知 ε 为凸期望且 $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon \geqslant \varepsilon_2$，故 $\varepsilon \in S^{cv}(\varepsilon_2)$。由（ii）知集合 $S^{cv}(\varepsilon_2)$ 的极小元存在且为线性数学期望，从而存在线性数学期望 $E_0 \in S^{cv}(\varepsilon_2)$ 使得 $\varepsilon \geqslant E_0$。注意到 $E_0 \in S^{cv}(\varepsilon_2)$,从而 $E_0 \geqslant \varepsilon_2$，进而

$$\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon \geqslant E_0 \geqslant \varepsilon_2$$

故 $E_0 \in S^{cv}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$。由 ε 为集合 $S^{cv}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 的极小元、$\varepsilon \geqslant E_0$ 且 $E_0 \in S^{cv}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$,立得 $\varepsilon = E_0$，即

$$\varepsilon \in S^l \cap S^{cv}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$$

最后，证明（iii）$\Rightarrow$（i）成立。设 ε_1 为凸期望、ε_2 为凹期望且 $\varepsilon_1 \geqslant \varepsilon_2$。由（iii）知，集合 $S^{cv}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 的极小元存在且为线性数学期望。设 E 为 $S^{cv}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 的一个极小元,则由极小元的定义及集合 $S^{cv}(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$ 的定义立得 $\varepsilon_1 \geqslant E \geqslant \varepsilon_2$。证毕。

参考文献：

［1］ PENG S G. BSDE and related g-expectation［J］. Backward Stochastic Differential Equations, 1997: 141 – 159.

［2］ CHEN Z J, EPSTEIN L. Ambiguity, risk and asset returns in continuous time［J］. Econometrica, 2002, 70(4): 1403 – 1443.

［3］ GIANIN E R. Risk measures via g-expectations［J］. Insurance Mathematics and Economics, 2006, 39(1): 19 – 34.

［4］ JIANG L. Convexity, translation invariance and subadditivity for g-expectations and related risk measures［J］. Annals of Applied Probability, 2008, 18(1): 245 – 258.

［5］ COQUET F, HU Y, MÉMIN J, et al. Filtration consistent nonlinear expectations and related g-expectation［J］. Probability Theory and Related Fields, 2002, 123(1): 1 – 27.

［6］ BION-NADAL J. Time consistent dynamic risk processes［J］. Stochastic Processes and their Applications, 2009, 119(2): 633 – 654.

［7］ DELBAEN F, PENG S G, GIANIN E R. Representation of the penalty term of dynamic concave utilities［J］. Finance and Stochastics, 2010, 14(3): 449 – 472.

［8］ JIA G Y. The minimal sublinear expectations and their related properties［J］. Science in China Series A: Mathematics, 2009, 52(4): 785 – 793.

［9］ HUANG J, JIA G Y. On the minimal members of convex expectations［J］. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 376(1): 42 – 50.

［10］ JI R L, JIANG L, TIAN D J. On the minimal members of convex expectations with constraints［J］. Journal of Inequalities and Applications, 2015, 2015(1): 1 – 8.

［11］ HE K, HU M S, CHEN Z J. The relationship between risk measures and Choquet expectations in the framework of g-expectations［J］. Statistics and Probability Letters, 2009, 79(4): 508 – 512.

［12］ 纪荣林,江龙,石学军. 凸 g – 期望的若干性质［J］. 中山大学学报(自然科学版),2015, 54(5): 11 – 14.
JI R L, JIANG L, SHI X J. Some properties of convex g-expectations［J］. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2015, 54(5): 11 – 14.