第 57 卷　第 4 期　中山大学学报（自然科学版）　Vol. 57　No. 4
2018 年　7 月　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　Jul.　2018

DOI：10.13471/j.cnki.acta.snus.2018.04.009

3 类图完美匹配计数公式的嵌套递推求法*

唐保祥[1]，任韩[2]
（1. 天水师范学院数学与统计学院，甘肃 天水 741001；
2. 华东师范大学数学系，上海 200062）

摘　要： 图的完美匹配计数问题已经被证实是 NP—难的，因此要得到一般图的完美对集的数目是非常困难的。该问题在量子化学、晶体物理学和计算机科学中都有重要的应用，对此问题的研究具有非常重要的理论价值和现实意义。用划分、求和、再递推的方法给出了图 $2-nD_4$，$2-nC_{6,3}$ 和 $3-nC_6$ 完美匹配数目的计算公式。所给出的方法，可以计算出许多图类的所有完美匹配的数目，开辟了得到一般的有完美匹配图的所有完美匹配数目的可能性。

关键词： 完美匹配；线性递推式；特征方程；通解

中图分类号： O157.5　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 0529-6579（2018）04-0072-04

Three types of nested recursive methods for finding counting formulas of the number of perfect matchings

TANG Baoxiang[1]，*REN Han*[2]
（1. School of Mathematics and Statistics，Tianshui Normal University，Tianshui 741001，China；
2. Department of Mathematics，East China Normal University，Shanghai 200062，China）

Abstract： Perfect matching counting problems of graph has been proven to be NP-hard，so to get the number of perfectly matched general graph is very difficult. The issue has important applications in quantum chemistry，crystal physics and computer science. Research on this issue has very important theoretical and practical significance. The counting formula of the perfect matching for graphs $2-nD_4$，$2-nC_{6,3}$ and $3-nC_6$ is given by applying differentiation，summation and re-recursion. Many graphs of the number of all perfect matchings can be calculated by this method. The given method also is able to get the possibility that the perfect graphs match with the counting of all perfect matching.

Key words： perfect matching；linear recurrence relation；characteristic equation；general solution

图的匹配计数理论是图论研究的重要内容之一，在过去的几十年中，它是快速发展的组合论中许多重要思想的源泉，其研究成果已经在多个领域得到应用，引起了一些学者的广泛研究，得到了许多特殊图类完美匹配的计数公式[1-9]。遗憾的是，Valiant[1] 1979 年证明了，1 个图（即使是偶图）的完美匹配计数是 NP-难问题。因此，要得到 1 个图的完美匹配的数目是很困难的。本文使用了嵌套递推的方法给出了 3 类新图的完美匹配数目的计算公式，所给方法，适合结构比较复杂的图类完美匹配数的求解。

1　基本概念

定义 1　若图 G 的 2 个完美匹配 M_1 和 M_2 中有

* 收稿日期：2018-01-12
基金项目：国家自然科学基金（11171114）
作者简介：唐保祥（1961 年生），男；研究方向：图论和组合数学；E-mail：tbx0618@sina.com

一条边不同，则称 M_1 和 M_2 是 G 的两个不同的完美匹配。

定义 2　连接 4 圈 $v_{i1}v_{i2}v_{i3}v_{i4}v_{i1}$ 的顶点 v_{i2} 与 v_{i4} 得到的图记为 $D_4^i(i = 1,2,\cdots,n)$；$P_i = u_{1i}u_{2i}\cdots u_{ni}(i = 1,2)$ 是两条路，连接 u_{i1} 与 v_{i1}，u_{i2} 与 $v_{i3}(i = 1,2,\cdots,n)$；分别连接 4 圈 $x_1x_2x_3x_4x_1$ 和 $y_1y_2y_3y_4y_1$ 的顶点 x_2 与 x_4，y_2 与 y_4；再分别连接顶点 x_1 与 u_{11}，x_3 与 u_{12}，y_1 与 u_{n1}，y_3 与 u_{n2}，这样所得到的图记为 $2 - nD_4$，如图 1 所示。

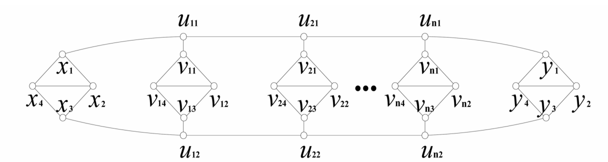

图 1　$2 - nD_4$ 图

Fig. 1　Figure of $2 - nD_4$

定义 3　n 个 6 圈为 $C_6^i: u_{i1}u_{i2}u_{i3}u_{i4}u_{i5}u_{i6}v_{i1}(i = 1,2,\cdots,n)$，分别连接圈 C_6^i 的顶点 u_{i2} 与 u_{i4}，u_{i4} 与 u_{i6}，u_{i6} 与 u_{i2}；再将圈 C_6^i 和圈 C_6^{i+1} 顶点 u_{i2} 与 $u_{i+1,6}$，u_{i3} 与 $u_{i+1,5}$ 分别连接起来 $(i = 1,2,\cdots,n-1)$，这样得到的图记为 $2 - nC_{6,3}$，如图 2 所示。

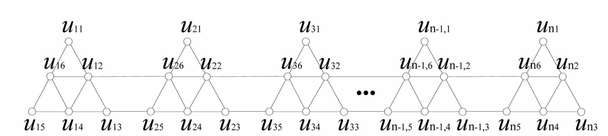

图 2　$2 - nC_{63}$ 图

Fig. 2　Figure of $2 - nC_{63}$

定义 4　n 个 6 圈为 $C_6^i: u_{i1}u_{i2}u_{i3}u_{i4}u_{i5}u_{i6}u_{i1}(i = 1,2,\cdots,n)$，分别连接圈 C_6^i 与圈 C_6^{i+1} 的顶点 u_{i2} 与 $u_{i+1,1}$，u_{i3} 与 $u_{i+1,6}$，u_{i4} 与 $u_{i+1,5}(i = 1,2,\cdots,n-1)$，这样得到的图记为 $3 - nC_6$，如图 3 所示。

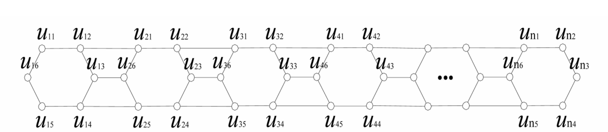

图 3　$3 - nC_6$ 图

Fig. 3　Figure of $3 - nC_6$

2　结果及其证明

定理 1　$f(n)$ 表示图 $2 - nD_4$ 的完美匹配的数目，则

$$f(n) = \frac{85 + 19\sqrt{17}}{34} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right)^n + \frac{85 - 19\sqrt{17}}{34} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right)^n$$

证明　为了求 $f(n)$，先定义一个图 G_1，并求其完美匹配的数目。删除图 $2 - nD_4$ 的顶点 x_1,x_2,x_3,x_4 得到的记为 G_1，如图 4 所示。易知图 G_1 有完美匹配。$\alpha(n)$ 表示图 G_1 的完美匹配的数目。

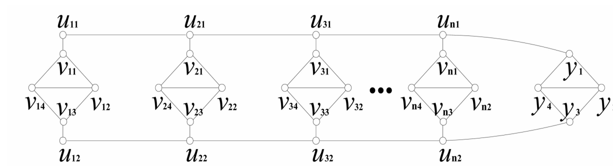

图 4　C_1 图

Fig. 4　Figure of C_1

先求 $\alpha(n)$。设图 G_1 的完美匹配集合为 M，图 G_1 含边 $u_{11}v_{11}$，$u_{11}u_{21}$ 的完美匹配集合分别为 M_1，M_2，则 $M_1 \cap M_2 = \varnothing$，所以 $M = M_1 \cup M_2$，故 $\alpha(n) = |M| = |M_1| + |M_2|$。

求 $|M_1|$　$\forall M \in M_1$，$u_{11}v_{11}, v_{12}v_{14}, v_{13}u_{12} \in M$，由 $\alpha(n)$ 的定义知，$|M_1| = \alpha(n-1)$。

求 $|M_2|$　情形 1　$M_{21} \subseteq M_2$，$\forall M \in M_{21}$，$u_{11}u_{21}$，$v_{11}v_{14}, v_{12}v_{13}, u_{12}u_{22}, v_{21}v_{24}, v_{22}v_{23} \in M$，故由 $\alpha(n)$ 的定义知，$|M_{21}| = \alpha(n-2)$。

情形 2　$M_{22} \subseteq M_2$，$\forall M \in M_{22}$，$u_{11}u_{21}, v_{11}v_{14}$，$v_{12}v_{13}, u_{12}u_{22}, v_{21}v_{22}, v_{24}v_{23} \in M$，故由 $\alpha(n)$ 的定义知，$|M_{22}| = \alpha(n-2)$。

情形 3　$M_{23} \subseteq M_2$，$\forall M \in M_{23}$，$u_{11}u_{21}, v_{11}v_{12}$，$v_{14}v_{13}, u_{12}u_{22}, v_{21}v_{24}, v_{22}v_{23} \in M$，故由 $\alpha(n)$ 的定义知，$|M_{23}| = \alpha(n-2)$。

情形 4　$M_{24} \subseteq M_2$，$\forall M \in M_{24}$，$u_{11}u_{21}, v_{11}v_{12}$，$v_{14}v_{13}, u_{12}u_{22}, v_{21}v_{22}, v_{24}v_{23} \in M$，故由 $\alpha(n)$ 的定义知，$|M_{24}| = \alpha(n-2)$。

综上所述，

$$\alpha(n) = \alpha(n-1) + 4\alpha(n-2) \tag{1}$$

再求 $f(n)$。易知图 $2 - nD_4$ 有完美匹配。设图 $2 - nDC_4$ 的完美匹配集合为 M，图 $2 - nD_4$ 含边 x_4x_1，x_4x_2，x_4x_3 的完美匹配集合分别为 M_1，M_2，M_3，则 $M_i \cap M_j = \varnothing(1 \leqslant i < j \leqslant 3)$，所以 $M = M_1 \cup M_2 \cup M_3$，故 $f(n) = |M| = |M_1| + |M_2| + |M_3|$。

求 $|M_1|$　$\forall M \in M_1$，$x_4x_1, x_2x_3 \in M$，由 $\alpha(n)$ 的

定义知，$|M_1| = \alpha(n)$。

求 $|M_2|$ 情形 1 $M_{21} \subseteq M_2$，$\forall M \in M_{21}$，x_4x_2，x_1u_{11}，x_3u_{12}，$v_{11}v_{14}$，$v_{12}v_{13} \in M$，由 $\alpha(n)$ 的定义知，$|M_{21}| = \alpha(n-1)$。

情形 2 $M_{22} \subseteq M_2$，$\forall M \in M_{22}$，x_4x_2，x_1u_{11}，x_3u_{12}，$v_{11}v_{12}$，$v_{14}v_{13} \in M$，由 $\alpha(n)$ 的定义知，$|M_{22}| = \alpha(n-1)$。

因为 $M_2 = M_{21} \cup M_{22}$，$M_{21} \cap M_{22} = \varnothing$，所以 $|M_2| = |M_{21}| + |M_{22}| = 2\alpha(n-1)$。

求 $|M_3|$ $\forall M \in M_3$，x_4x_3，$x_1x_2 \in M$，由 $\alpha(n)$ 的定义知，$|M_3| = \alpha(n)$

综上所述，

$$f(n) = 2\alpha(n) + 2\alpha(n-1) \tag{2}$$

把式（1）代入式（2），得

$$\begin{aligned} f(n) &= 4\alpha(n-1) + 8\alpha(n-2) = \\ &4\alpha(n-1) + 4\alpha(n-2) + 4\alpha(n-2) = \\ &2f(n-1) + 4\alpha(n-2) \end{aligned} \tag{3}$$

再由式（2），得

$$2f(n-1) = 4\alpha(n-1) + 4\alpha(n-2) \tag{4}$$

式（3）－（4），得

$$f(n) = 4f(n-1) - 4\alpha(n-1) \tag{5}$$

由式（5）得

$$f(n-1) = 4f(n-2) - 4\alpha(n-2) \tag{6}$$

式（3）＋（6），得

$$f(n) = f(n-1) + 4f(n-2) \tag{7}$$

容易计算 $\alpha(1) = 4$；由 $\alpha(n)$ 的定义可知 $\alpha(0) = 2$；由式（1）得 $\alpha(2) = 12$；由式（2）得 $f(1) = 12$，$f(2) = 32$。解线性递推式（7），得

$$f(n) = \frac{85 + 19\sqrt{17}}{34} \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{17}}{2}\right)^n + \frac{85 - 19\sqrt{17}}{34} \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{17}}{2}\right)^n$$

定理 2 $g(n)$ 表示图 $2 - nC_{6,3}$ 的完美匹配的数目，则

$$g(n) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \cdot (1 + \sqrt{2})^n + \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \cdot (1 - \sqrt{2})^n$$

证明 显然图 $2 - nC_{6,3}$ 有完美匹配。设图 $2 - nC_{6,3}$ 的完美匹配集合为 M，图 $2 - nC_{6,3}$ 含边 $u_{11}u_{12}$，$u_{11}u_{16}$ 的完美匹配集合分别为 M_1，M_2，则 $M_1 \cap M_2 = \varnothing$，$M = M_1 \cup M_2$，故 $g(n) = |M| = |M_1| + |M_2|$。

求 $|M_1|$ $\forall M \in M_1$，$u_{11}u_{12}$，$u_{13}u_{14}$，$u_{15}u_{16} \in M$，由 $g(n)$ 的定义知，$|M_1| = g(n-1)$。

求 $|M_2|$ 情形 1 $M_{21} \subseteq M_2$，$\forall M \in M_{22}$，$u_{11}u_{16}$，$u_{15}u_{14}$，$u_{12}u_{13} \in M$，故由 $g(n)$ 的定义知，$|M_{21}| = g(n-1)$。

情形 2 $M_{22} \subseteq M_2$，$\forall M \in M_{22}$，$u_{11}u_{16}$，$u_{15}u_{14}$，$u_{12}u_{26}$，$u_{13}u_{25}$，$u_{21}u_{22}$，$u_{24}u_{23} \in M$，故由 $g(n)$ 的定义知，$|M_{22}| = g(n-2)$。

因为 $M_2 = M_{21} \cup M_{22}$，$M_{21} \cap M_{22} = \varnothing$，所以 $|M_2| = |M_{21}| + |M_{22}| = g(n-1) + g(n-2)$

因此，

$$g(n) = 2g(n-1) + g(n-2) \tag{8}$$

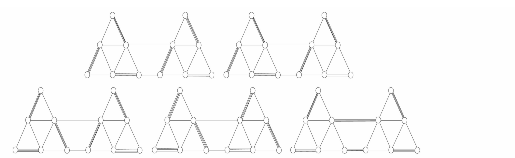

图 5 $2 - 2C_{63}$ 图

Fig. 5 Figure of $2 - 2C_{63}$

易知 $g(1) = 2$，由图 5 知 $g(2) = 5$。

解线性递推式（8），得

$$g(n) = \frac{2 + \sqrt{2}}{4} \cdot (1 + \sqrt{2})^n + \frac{2 - \sqrt{2}}{4} \cdot (1 - \sqrt{2})^n$$

定理 3 $h(n)$ 表示图 $3 - nC_6$ 的完美匹配的数目，则

$$h(n) = 2 \cdot 3^{n-1}$$

证明 为了求 $h(n)$，先定义 2 个图 G_2 和 G_3，并求其完美匹配的数目。将路 u_1u_2 的端点 u_1，u_2 分别与顶点 u_{11}，u_{16} 连接得到的记为 G_2，如图 6 所示；将路 u_1u_2 的端点 u_1，u_2 分别与顶点 u_{16}，u_{15} 连接得到的记为 G_3，如图 7 所示。

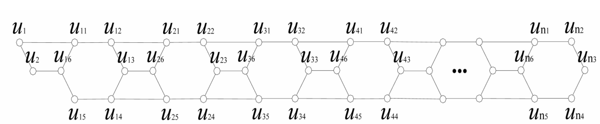

图 6 G_2 图

Fig. 6 Figure of G_2

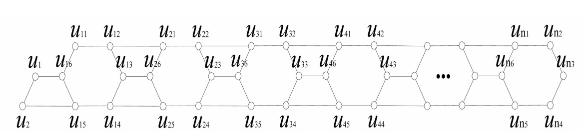

图 7 G_3 图

Fig. 7 Figure of G_3

易知图 G_2 和 G_3 都有完美匹配，且 $G_2 \cong G_3$，故图 G_2 和 G_3 的完美匹配数相等。$\beta(n)$ 表示图 G_2 的完美匹配的数目。设图 G_2 的完美匹配集合为 M，图 G_2 的含边 u_1u_{11}，u_1u_2 的完美匹配集合分别为 M_1，M_2，则 $M_1 \cap M_2 = \varnothing$，故 $M = M_1 \cup M_2$，$\beta(n) = |M| = |M_1| + |M_2|$。

求 $|M_1|$ $\forall M \in M_1$，$u_1u_{11}, u_2u_{16}, u_{15}u_{14} \in M$，由 $\beta(n)$ 的定义知，$|M_1| = \beta(n-1)$。

求 $|M_2|$ $\forall M \in M_2$，$u_1u_2 \in M$，由 $h(n)$ 的定义知，$|M_2| = h(n)$。故

$$\beta(n) = h(n) + \beta(n-1) \tag{9}$$

再求 $h(n)$。易知图 $3-nC_6$ 有完美匹配。设图 $3-nC_6$ 的完美匹配集合为 M，图 $3-nC_6$ 含边 $u_{16}u_{11}$，$u_{16}u_{15}$ 的完美匹配集合分别为 M_1，M_2，则 $M_1 \cap M_2 = \varnothing$，所以 $M = M_1 \cup M_2$，故 $h(n) = |M| = |M_1| + |M_2|$。

求 $|M_1|$ $\forall M \in M_1, u_{16}u_{11}, u_{15}u_{14} \in M$，由 $\beta(n)$ 的定义知，$|M_1| = \beta(n-1)$。

求 $|M_2|$ $\forall M \in M_2, u_{16}u_{15}, u_{11}u_{12} \in M$，由 $\beta(n)$ 的定义知，$|M_2| = \beta(n-1)$。

所以，

$$h(n) = 2\beta(n-1) \tag{10}$$

把式（9）代入式（10），得

$$h(n) = 2h(n-1) + 2\beta(n-2) \tag{11}$$

由式（10），得

$$h(n-1) = 2\beta(n-2) \tag{12}$$

再由式（11）和式（12），得

$$h(n) = 3h(n-1) = 3^{n-1}h(1)$$

易知 $h(1) = 2$，所以 $h(n) = 2 \cdot 3^{n-1}$。

参考文献：

[1] VALIANT L G. The complexity of computing the permanent [J]. Theoretical Computer Science, 1979, 8(2): 189－201.

[2] LOVÁSZ L, PLUMMER M. Matching theory [M]. New York: North－Holland Press, 1986.

[3] YAN W G, ZHANG F J. Enumeration of perfect matchings of a type of Cartesian products of graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2006,154(1):145－157.

[4] 林泓，林晓霞. 若干四角系统完美匹配数的计算[J]. 福州大学学报(自然科学版), 2005, 33(6): 704－710,735.
LIN H, LIN X X. Enumeration of perfect matchings in some type polyminoes [J]. Journal of Fuzhou University (Natural Sciences Edition), 2005, 33(6):704－710, 735.

[5] 蓝雯飞,邢志宝,黄俊,等. DNA 自组装计算模型求解二部图完美匹配问题[J]. 计算机研究与发展, 2016, 53(11): 2583－2593.
LAN W F, XING Z B, HUANG J, et al. The DNA self－assembly computing model for solving perfect matching problem of bipartite graph [J]. Journal of Computer Research and Development , 2016, 53(11): 2583－2593.

[6] 唐保祥,任韩. 3 类特殊图完美对集数的计算[J]. 南开大学学报(自然科学版), 2014, 47(5): 11－16.
TANG B X, REN H. The enumeration of perfect matchings in three types of special graphs [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Nankaiensis, 2014, 47(5): 11－16.

[7] 唐保祥,任韩. 两类图完美匹配的计数公式[J]. 吉林大学学报(理学版), 2016, 54(4): 790－792 .
TANG B X, REN H. Counting formulas of perfect matchings of the two types of graphs [J]. Journal of Jilin University (Science Edition), 2016, 54(4): 790－792.

[8] 唐保祥,任韩. 2 类图完美匹配数目的解析式[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2016, 55(4): 15－17.
TANG B X, REN H. The analytic formula of the number of perfect matchings of two types of graphs [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2016, 55(4):15－17.

[9] 唐保祥,任韩. 2 类特殊图中的完美匹配数[J]. 浙江大学学报(理学版), 2017, 44(3): 266－269.
TANG B X, REN H. The number of perfect matchings in two types of particular graphs [J]. Journal of Zhejiang University (Science Edition), 2017, 44(3): 266－269.