第 58 卷 第 3 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 58 No. 3
2019 年 5 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI May 2019

DOI:10.13471/j.cnki.acta.snus.2019.03.011

轮和扇三类联图的邻点被扩展和可区别全染色*

张辉[1]，陈祥恩[1]，王治文[2]
（1. 西北师范大学数学与统计学院，甘肃 兰州 730070；
2. 宁夏大学数学统计学院，宁夏 银川 750021）

摘　要：探讨了轮与轮的联图的邻点被扩展和可区别全染色，并得到了它的邻点被扩展和可区别全色数，然后通过删边的方法分别得到了扇与轮的联图，扇与扇的联图的邻点被扩展和可区别全染色及它们的邻点被扩展和可区别全色数。

关键词：联图；邻点被扩展和可区别全染色；邻点被扩展和可区别全色数

中图分类号：O157.5　**文献标志码：**A　**文章编号：**0529－6579（2019）03－0086－08

The neighbor expanded sum distinguishing total colorings of three types of join graphs of wheel and fan

ZHANG Hui[1], *CHEN Xiang'en*[1], *WANG Zhiwen*[2]
(1. College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China;
2. College of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan 750021, China)

Abstract: The neighbor expanded sum distinguishing total coloring of join of two wheels is discussed and its neighbor expanded sum distinguishing total coloring index is determined. Then the neighbor expanded sum distinguishing total colorings and neighbor expanded sum distinguishing total coloring indexes of joins of one fan and one wheel, and two fans are obtained, respectively by the method of deleting edges.

Key words: the join of graphs; the neighbor expanded sum distinguishing total coloring ; the neighbor expanded sum distinguishing total coloring index

Karoński 等首先在文［1］中介绍和研究了图的邻和可区别一般边染色，其后，Przybylo 等在文［2］中进一步提出邻和可区别一般全染色，且在文［3－6］中得出相关结论与猜想。最后，Evelyne Flandrin 等在此基础上提出邻点被扩展和可区别全染色，且得出相关结论与猜想。在下文中我们对两轮之联，扇与轮的联及两扇之联的邻点被扩展和可区别全染色进行研究与讨论。

图 G 的一个全 k-染色是指 k 种颜色对图 G 的全体顶点及边的一个分配。

设 c 是图 G 的一个全 k-染色，任意的 $x \in V(G)$，称 $w(x) = \sum_{e \ni x} c(e) + \sum_{y \in N(x)} c(y)$ 为点 x 的扩展和，其中 $N(x) = \{y \in V(G) \mid xy \in E(G)\}$。称图 G 的全 k- 染色 c 为邻点被扩展和可区别（简记为 NESD），如果 $w(x) \neq w(y)$，其中 $xy \in E(G)$。

使得图 G 存在 NESD 全 k-染色中 k 的最小值被

* **收稿日期：**2018－03－26
基金项目：国家自然科学基金（11761064，61163037，11261046）；宁夏自然科学基金（2018AAC03055）；宁夏回族自治区百人计划
作者简介：张辉（1995 年生），男；**研究方向：**图论及其应用；E-mail：zhanghuimath@163.com
通信作者：陈祥恩（1965 年生），男；**研究方向：**图论及其应用；E-mail：chenxe@nwnu.edu.cn

称为图 G 的邻点被扩展和可区别全色数（neighbor expanded sum distinguishing index），简记为 $\mathrm{egndi}_{\Sigma}(G)$。

文［7］中给出轮和扇的概念，对 $n+1$ 阶轮 W_n，设其顶点集合为 $V(W_n)=\{v_0,v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，其边集合为 $E(W_n)=\{v_0v_i\mid i=1,2,\cdots,n\}\cup\{v_iv_{i+1}\mid i=1,2,\cdots n-1\}\cup\{v_nv_1\}$。将 $n+1$ 阶轮 W_n 的边 v_nv_1 删去之后得到的就是 $n+1$ 阶的扇 F_n。

文［8］中给出不相交的图 G_1 和 G_2 的联图 $G_1\vee G_2$ 是指在 G_1+G_2 中，把 G_1 的每个顶点和 G_2 的每个顶点连接起来所得到的图。

文［9］中研究了路、圈、完全图和树等图的邻点被扩展和可区别全染色，确定了它们的邻点被扩展和可区别全色数。并提出了一个猜想。文［10－12］对图的点可区别全染色、奇优美性及完美匹配计数给出相关结论。

命题 1[9]　设 $P_m(m\geqslant 2)$ 是 m 阶的路，则

$$\mathrm{egndi}_{\Sigma}(P_m)=\begin{cases}2, & m=2,\\ 1, & m=3,\\ 2, & m\geqslant 4\end{cases}$$

命题 2[9]　设 $C_m(m\geqslant 3)$ 是 m 阶的圈，则 $\mathrm{egndi}_{\Sigma}(C_m)=2$。

命题 3[9]　设 $K_n(n\geqslant 2)$ 是 n 阶的完全图，则 $\mathrm{egndi}_{\Sigma}(K_n)=2$。

命题 4[9]　设 T 是 $n(n>2)$ 阶的树，则 $\mathrm{egndi}_{\Sigma}(T)\leqslant 2$。

猜想 1[9]　设 G 为简单图，则 $\mathrm{egndi}_{\Sigma}(G)\leqslant 2$。

1　主要结论及其证明

定理 1　设 $m\geqslant 3,n\geqslant 3$。则 $\mathrm{egndi}_{\Sigma}(W_m\vee W_n)=2$。

证明　设 $V(W_m)=\{u_0,u_1,u_2,\cdots,u_m\}$，$E(W_m)=\{u_0u_i\mid i=1,2,\cdots,m\}\cup\{u_iu_{i+1}\mid i=1,2,\cdots,m-1\}\cup\{u_mu_1\}$，$V(W_n)=\{v_0,v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E(W_n)=\{v_0v_j\mid j=1,2,\cdots,n\}\cup\{v_jv_{j+1}\mid j=1,2,\cdots n-1\}\cup\{v_nv_1\}$。$c$ 是 $W_m\vee W_n$ 的一个全 k-染色。显然 $W_m\vee W_n$ 没有 NESD 全 1-染色，下面给出 $W_m\vee W_n$ 的一个 NESD 全 2-染色。

情形 1　m,n 均为偶数且 $m\neq n$ $c(u_0)=2$；$c(u_{2i-1})=1,1\leqslant 2i-1\leqslant m-1$；$c(u_{2i})=2,2\leqslant 2i\leqslant m$；$c(v_0)=1$；$c(v_{2j-1})=1,1\leqslant 2j-1\leqslant n-1$；$c(v_{2j})=2,2\leqslant 2j\leqslant n$；$c(u_mu_1)=c(v_nv_1)=c(u_0v_0)=2$。除上述边染颜色 2 外（如图 1 所示），其余边均染颜色 1。则每个顶点的扩展和计算如下：

$$w(u_0)=\frac{5m}{2}+\frac{5n}{2}+3;w(u_1)=\frac{5n}{2}+12;$$

$$w(u_{2i})=\frac{5n}{2}+9,2\leqslant 2i\leqslant m-2;$$

$$w(u_{2i-1})=\frac{5n}{2}+11,3\leqslant 2i-1\leqslant m-1;$$

$$w(u_m)=\frac{5n}{2}+10;$$

$$w(v_0)=\frac{5m}{2}+\frac{5n}{2}+4;$$

$$w(v_1)=\frac{5m}{2}+12;$$

$$w(v_{2j})=\frac{5m}{2}+9,\ 2\leqslant 2j\leqslant n-2;$$

$$w(v_{2j-1})=\frac{5m}{2}+11,$$

$$3\leqslant 2j-1\leqslant n-1;$$

$$w(v_n)=\frac{5m}{2}+10$$

显然 $w(u_i)\neq w(u_{i+1}),i=1,2,\cdots,m-1;w(u_m)\neq w(u_1);w(v_j)\neq w(v_{j+1}),j=1,2,\cdots,n-1;w(v_n)\neq w(v_1)$。下面考虑 $w(u_0)\neq w(u_i),1\leqslant i\leqslant m$。

假设 $w(u_0)=w(u_1)$，有 $\frac{5m}{2}+\frac{5n}{2}+3=\frac{5n}{2}+12$，即 $m=\frac{18}{5}$，与 m 为整数矛盾；假设 $w(u_0)=w(u_{2i}),2\leqslant 2i\leqslant m-2$，有 $\frac{5m}{2}+\frac{5n}{2}+3=\frac{5n}{2}+9$，即 $m=\frac{12}{5}$，与 m 为整数矛盾；假设 $w(u_0)=w(u_{2i-1}),3\leqslant 2i-1\leqslant m-1$，有 $\frac{5m}{2}+\frac{5n}{2}+3=\frac{5n}{2}+11$，即 $m=\frac{16}{5}$，与 m 为整数矛盾；假设 $w(u_0)=w(u_m)$，有 $\frac{5m}{2}+\frac{5n}{2}+3=\frac{5n}{2}+10$，即 $m=\frac{14}{5}$，与 m 为整数矛盾。因此，$w(u_0)\neq w(u_i),1\leqslant i\leqslant m$。

同理可得 $w(v_0)\neq w(v_j),1\leqslant j\leqslant n,w(u_i)\neq w(v_j),0\leqslant i\leqslant m,0\leqslant j\leqslant n$。故当 m,n 均为偶数且 $m\neq n$ 时，c 是 $W_m\vee W_n$ 的一个 NESD 全 2-染色。

情形 2　m,n 均为偶数且 $m=n$

（i）$m=n=4$ 时。

$c(u_1)=c(u_3)=c(v_0)=c(v_1)=c(v_3)=1$，$c(u_0)=c(u_2)=c(u_4)=c(v_2)=c(v_4)=2$，$c(u_0u_i)=2,1\leqslant i\leqslant 4$；$c(u_iu_{i+1})=2,1\leqslant i\leqslant 3$；

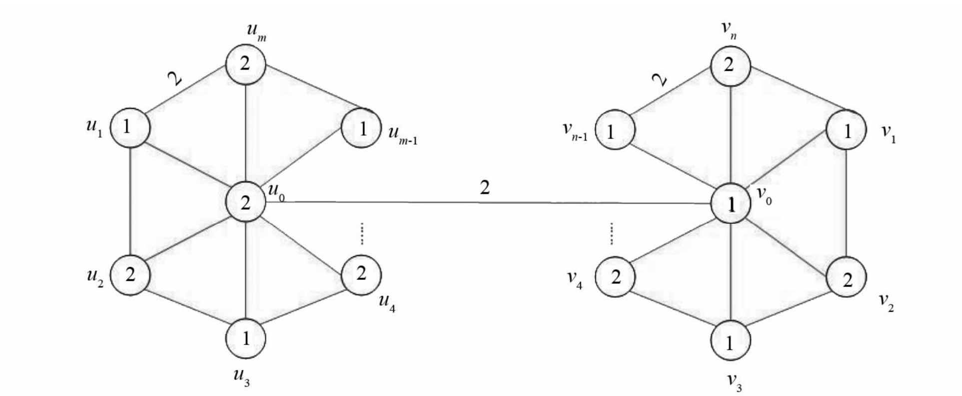

图1 情形1的NESD全2-染色

Fig. 1 NESD total 2-coloring of case 1

$c(u_4u_1)=c(v_0v_1)=c(v_0v_3)=c(v_1v_2)=c(v_2v_3)=2$。除上述边染颜色2，其余边均染颜色1。则每个顶点的扩展和计算如下：

$$w(u_0)=26;w(u_1)=24;w(u_2)=22;$$
$$w(u_3)=24;w(u_4)=22;$$
$$w(v_0)=25;w(v_1)=23;$$
$$w(v_2)=21;w(v_3)=23;w(v_4)=19$$

显然当m,n均为偶数且$m=n=4$时，c是$W_4\vee W_4$的一个NESD全2-染色。

（ii）当$m=n\geqslant 6$时。

$c(u_0)=2;c(u_{2i-1})=1,1\leqslant 2i-1\leqslant m-1;c(u_{2i})=2,2\leqslant 2i\leqslant m;c(v_0)=1;c(v_{2j-1})=1,1\leqslant 2j-1\leqslant n-1;c(v_{2j})=2,2\leqslant 2j\leqslant n;c(u_{2k}u_{2k+1})=2,1\leqslant k\leqslant\frac{m}{2}-1;c(u_mu_1)=c(v_nv_1)=c(u_0v_0)=2;c(v_jv_{j+1})=2,1\leqslant j\leqslant n-1$。除上述边染颜色外，其余边均染颜色。则每个顶点的扩展和计算如下：

$$w(u_0)=5m+3;w(u_{2i})=\frac{5m}{2}+10,2\leqslant 2i\leqslant m;$$
$$w(u_{2i-1})=\frac{5m}{2}+12,1\leqslant 2i-1\leqslant m-1;$$
$$w(v_0)=5m+4;w(v_{2j})=\frac{5m}{2}+11,2\leqslant 2j\leqslant n;$$
$$w(v_{2j-1})=\frac{5m}{2}+13,1\leqslant 2j-1\leqslant n-1$$

显然当m,n均为偶数且$m=n\geqslant 6$时，c是$W_m\vee W_n$的一个NESD全2-染色。

情形3 m,n均为奇数且$m\neq n$

（i）当m与n中恰好有一个等于3时。

不妨设$m=3,c(u_0)=c(u_1)=c(u_3)=2;c(u_2)=1;c(v_0)=1;c(v_{2j-1})=1,1\leqslant 2j-1\leqslant n;c(v_{2j})=2,2\leqslant 2j\leqslant n-1;c(u_0u_i)=2,1\leqslant i\leqslant 3;c(u_1u_2)=c(u_0v_0)=c(v_0v_1)=c(v_0v_2)=c(v_0v_n)=c(v_{n-1}v_n)=2$。除上述边染颜色2外，其余边均染颜色1。则每个顶点的扩展和计算如下：

$$w(u_0)=\frac{5n-3}{2}+15;w(u_1)=\frac{5n-3}{2}+13;$$
$$w(u_2)=\frac{5n-3}{2}+14;w(u_3)=\frac{5n-3}{2}+12;$$
$$w(v_0)=\frac{5n-3}{2}+16;w(v_1)=19;$$
$$w(v_2)=18;w(v_{2j-1})=19,3\leqslant 2j-1\leqslant n-2;$$
$$w(v_{2j})=17,4\leqslant 2j\leqslant n-3;$$
$$w(v_{n-1})=18;w(v_n)=20$$

显然$w(u_i)(i=0,1,2,3)$之间互不相同，$w(v_j)\neq w(v_{j+1}),j=1,2,\cdots,n-1;w(v_n)\neq w(v_1);w(v_0)\neq w(u_i),i=0,1,2,3$。下面考虑$w(u_0)\neq w(v_j)$，$1\leqslant j\leqslant n$。

假设$w(u_0)=w(v_1)$，有$\frac{5n-3}{2}+15=19$，即$n=\frac{11}{5}$，与n为整数矛盾；假设$w(u_0)=w(v_2)$，有$\frac{5n-3}{2}+15=18$，即$n=\frac{9}{5}$，与n为整数矛盾；假设$w(u_0)=w(v_{2j-1}),3\leqslant 2j-1\leqslant n-2$，有$\frac{5n-3}{2}+15=19$，即$n=\frac{11}{5}$，与$n$为整数矛盾；假设$w(u_0)=w(v_{2j}),4\leqslant 2j\leqslant n-3$，有$\frac{5n-3}{2}+15=17$，即$n=\frac{7}{5}$，与$n$为整数矛盾；假设$w(u_0)=w(v_{n-1})$，有$\frac{5n-3}{2}+15=18$，即$n=\frac{9}{5}$，与$n$为整数矛盾；假设$w(u_0)=w(v_n)$，有$\frac{5n-3}{2}+15=$

20，即 $n = \frac{13}{5}$ 与 n 为整数矛盾。因此，$w(u_0) \neq w(v_j), 1 \leqslant j \leqslant n$。

同理可得 $w(v_0) \neq w(v_j), 1 \leqslant j \leqslant n; w(u_i) \neq w(v_j), 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n$。故当 m,n 均为奇数且 $m \neq n (m = 3)$ 时，c 是 $W_3 \vee W_n$ 的一个 NESD 全 2-染色。

（ii）当 m 与 n 均大于 3 时。

$c(u_0) = 2; c(u_{2i-1}) = 1; 1 \leqslant 2i-1 \leqslant m; c(u_{2i}) = 2; 2 \leqslant 2i \leqslant m-1; c(v_0) = 1; c(v_{2j-1}) = 1, 1 \leqslant 2j-1 \leqslant n; c(v_{2j}) = 2, 2 \leqslant 2j \leqslant n-1; c(u_0u_m) = c(v_0v_n) = 2$。除上述边染颜色外，其余边均染颜色。则每个顶点的扩展和计算如下：

$$w(u_0) = \frac{5m-3}{2} + \frac{5n-3}{2} + 5;$$

$$w(u_1) = \frac{5n-3}{2} + 11;$$

$$w(u_{2i}) = \frac{5n-3}{2} + 10, 2 \leqslant 2i \leqslant m-1;$$

$$w(u_{2i-1}) = \frac{5n-3}{2} + 12, 3 \leqslant 2i-1 \leqslant m;$$

$$w(v_0) = \frac{5m-3}{2} + \frac{5n-3}{2} + 6;$$

$$w(v_1) = \frac{5m-3}{2} + 11;$$

$$w(v_{2j}) = \frac{5m-3}{2} + 10, 2 \leqslant 2j \leqslant n-1;$$

$$w(v_{2j-1}) = \frac{5m-3}{2} + 12, 3 \leqslant 2j-1 \leqslant n$$

显然 $w(u_i) \neq w(u_{i+1}), i = 1,2,\cdots,m-1; w(u_m) \neq w(u_1); w(v_j) \neq w(v_{j+1}), j = 1,2,\cdots,n-1; w(v_n) \neq w(v_1)$。下面考虑 $w(u_0) \neq w(u_i), 1 \leqslant i \leqslant m$。

假设 $w(u_0) = w(u_1)$，有 $\frac{5m-3}{2} + \frac{5n-3}{2} + 5 = \frac{5n-3}{2} + 11$，即 $m = 3$，与 $m > 3$ 矛盾；假设 $w(u_0) = w(u_{2i}), 2 \leqslant 2i \leqslant m-1$，有 $\frac{5m-3}{2} + \frac{5n-3}{2} + 5 = \frac{5n-3}{2} + 10$，即 $m = \frac{13}{5}$，与 m 为整数矛盾；假设 $w(u_0) = w(u_{2i-1}), 3 \leqslant 2i-1 \leqslant m$，有 $\frac{5m-3}{2} + \frac{5n-3}{2} + 5 = \frac{5n-3}{2} + 12$，即 $m = \frac{17}{5}$，与 m 为整数矛盾。因此，$w(u_0) \neq w(u_i), 1 \leqslant i \leqslant m$。

同理可得 $w(v_0) \neq w(v_j), 1 \leqslant j \leqslant n; w(u_i) \neq w(v_j), 0 \leqslant i \leqslant m, 0 \leqslant j \leqslant n$。故当 m,n 均为奇数且 $m \neq n (m > 3, n > 3)$ 时，c 是 $W_m \vee W_n$ 的一个 NESD 全 2-染色。

情形 4　m,n 均为奇数且 $m = n$

（i）当 $m = n = 3$ 时。

$c(u_2) = c(v_0) = c(v_1) = c(v_3) = 1, c(u_0) = c(u_1) = c(u_3) = c(v_2) = 2; c(u_1v_1) = c(u_1v_0) = c(u_1v_3) = c(u_0v_0) = c(u_2v_1) = c(u_2v_0) = c(u_2v_3) = c(v_1v_2) = c(v_1v_3) = 2; c(v_0v_j) = 2, 1 \leqslant j \leqslant 3$。除上述边染颜色 2 外，其余边均染颜色 1。则每个顶点的扩展和计算如下：

$$w(u_0) = 18; w(u_1) = 20;$$

$$w(u_2) = 21; w(u_3) = 17;$$

$$w(v_0) = 24; w(v_1) = 23;$$

$$w(v_2) = 19; w(v_3) = 22$$

显然当 m,n 均为奇数且 $m = n = 3$ 时，c 是 $W_3 \vee W_3$ 的一个 NESD 全 2-染色。

（ii）当 $m = n \geqslant 5$ 时。

$c(u_0) = 2; c(u_{2i-1}) = 1; 1 \leqslant 2i-1 \leqslant m; c(u_{2i}) = 2; 2 \leqslant 2i \leqslant m-1; c(v_0) = 1; c(v_{2j-1}) = 1, 1 \leqslant 2j-1 \leqslant n; c(v_{2j}) = 2, 2 \leqslant 2j \leqslant n-1; c(u_{2k-1}u_{2k-1}) = 2, 3 \leqslant 2k-1 \leqslant m; c(u_0u_m) = c(v_0v_1) = c(v_0v_n) = c(v_nv_1) = 2; c(v_jv_{j+1}) = 2, 1 \leqslant j \leqslant n-1$。除上述边染颜色 2 外，其余边均染颜色 1。则每个顶点的扩展和计算如下：

$$w(u_0) = 5m + 2; w(u_1) = \frac{5m-3}{2} + 11;$$

$$w(u_{2i}) = \frac{5m-3}{2} + 10, 2 \leqslant 2i \leqslant m-1;$$

$$w(u_{2i-1}) = \frac{5m-3}{2} + 13, 3 \leqslant 2i-1 \leqslant m;$$

$$w(v_0) = 5m + 4; w(v_1) = \frac{5m-3}{2} + 14;$$

$$w(v_{2j}) = \frac{5m-3}{2} + 12, 2 \leqslant 2j \leqslant n-1;$$

$$w(v_{2j-1}) = \frac{5m-3}{2} + 15, 3 \leqslant 2j-1 \leqslant n$$

显然 $w(u_i) \neq w(u_{i+1}), i = 1,2,\cdots,m-1; w(u_m) \neq w(u_1); w(v_j) \neq w(v_{j+1}), j = 1,2,\cdots,n-1; w(v_n) \neq w(v_1); w(u_0) \neq w(v_0); w(u_i) \neq w(v_j), 0 \leqslant i \leqslant m, 0 \leqslant j \leqslant n$。下面考虑 $w(u_0) \neq w(u_i), 1 \leqslant i \leqslant m$。

假设 $w(u_0) = w(u_1)$，有 $5m + 2 = \frac{5m-3}{2} + 11$，即 $m = 3$，与 $m \geqslant 5$ 矛盾；假设 $w(u_0) = w(u_{2i}), 2 \leqslant 2i \leqslant m-1$，有 $5m + 2 = \frac{5m-3}{2} + 10$，即 $m = \frac{13}{5}$，与 m 为整数矛盾；假设 $w(u_0) = w(u_{2i-1}), 3 \leqslant 2i-1 \leqslant m$，有 $5m + 2 = \frac{5m-3}{2} + 13$，

即 $m=\dfrac{18}{5}$，与 m 为整数矛盾。因此，$w(u_0)\neq w(u_i),1\leqslant i\leqslant m$。

同理可得 $w(v_0)\neq w(v_j),1\leqslant j\leqslant n$。故当 m，n 均为奇数且 $m=n\geqslant 5$ 时，c 是 $W_m\vee W_n$ 的一个 NESD 全 2-染色。

情形 5 m 是奇数，n 是偶数且 $m>n$ $c(u_0)=2,c(u_{2i-1})=1,1\leqslant 2i-1\leqslant m;c(u_{2i})=2,2\leqslant 2i\leqslant m-1;c(v_0)=1,c(v_{2j-1})=1,1\leqslant 2j-1\leqslant n-1;c(v_{2j})=2,2\leqslant 2j\leqslant n;c(u_{m-1}u_m)=c(v_nv_1)=2;c(v_{2k}v_{2k+1})=2,2\leqslant 2k\leqslant n-2$。除上述边染颜色 2 外，其余边均染颜色 1。则每个顶点的扩展和计算如下：

$$w(u_0)=\frac{5m-3}{2}+\frac{5n}{2}+3;w(u_1)=\frac{5n}{2}+10;$$

$$w(u_{2i})=\frac{5n}{2}+9,2\leqslant 2i\leqslant m-3;$$

$$w(u_{2i-1})=\frac{5n}{2}+11,3\leqslant 2i-1\leqslant m-2;w(u_{m-1})=\frac{5n}{2}+10;$$

$$w(u_m)=\frac{5n}{2}+11;$$

$$w(v_0)=\frac{5m-3}{2}+\frac{5n}{2}+4;$$

$$w(v_{2j-1})=\frac{5m-3}{2}+13,\quad 1\leqslant 2j-1\leqslant n-1;$$

$$w(v_{2j})=\frac{5m-3}{2}+11,2\leqslant 2j\leqslant n$$

显然 $w(u_i)\neq w(u_{i+1}),i=1,2,\cdots,m-1;w(u_m)\neq w(u_1);w(v_j)\neq w(v_{j+1}),j=1,2,\cdots,n-1;w(v_n)\neq w(v_1);w(u_0)\neq w(v_0)$。下面考虑 $w(u_0)\neq w(u_i),1\leqslant i\leqslant m$。

假设 $w(u_0)=w(u_1)$，有 $\dfrac{5m-3}{2}+\dfrac{5n}{2}+3=\dfrac{5n}{2}+10$，即 $m=\dfrac{17}{5}$，与 m 为整数矛盾；假设 $w(u_0)=w(u_{2i}),2\leqslant 2i\leqslant m-3$，有 $\dfrac{5m-3}{2}+\dfrac{5n}{2}+3=\dfrac{5n}{2}+9$，即 $m=3$ 与 $m>n\geqslant 3$ 矛盾；假设 $w(u_0)=w(u_{2i-1}),3\leqslant 2i-1\leqslant m-2$，有 $\dfrac{5m-3}{2}+\dfrac{5n}{2}+3=\dfrac{5n}{2}+11$，即 $m=\dfrac{19}{5}$，与 m 为整数矛盾；假设 $w(u_0)=w(u_{m-1})$，有 $\dfrac{5m-3}{2}+\dfrac{5n}{2}+3=\dfrac{5n}{2}+10$，即 $m=\dfrac{17}{5}$，与 m 为整数矛盾；假设 $w(u_0)=w(u_m)$，有 $\dfrac{5m-3}{2}+\dfrac{5n}{2}+3=\dfrac{5n}{2}+11$，即 $m=\dfrac{19}{5}$，与 m 为整数矛盾。因此 $w(u_0)\neq w(u_i),1\leqslant i\leqslant m$。

同理可得 $w(v_0)\neq w(v_j),1\leqslant j\leqslant n;w(u_i)\neq w(v_j),1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n$。故当 m 是奇数，n 是偶数且 $m>n$ 时，c 是 $W_m\vee W_n$ 的一个 NESD 全 2-染色。

情形 6 m 是奇数，n 是偶数且 $m<n$

（i）当 $m=3$ 时。

$c(u_0)=c(u_1)=c(u_3)=2;c(u_2)=1;c(v_0)=1;c(v_{2j-1})=1,1\leqslant 2j-1\leqslant n-1;c(v_{2j})=2,2\leqslant 2i\leqslant n;c(u_0u_2)=c(u_0v_0)=c(u_1v_0)=c(u_2v_0)=2$。除上述边染颜色 2 外，其余边均染颜色 1。则每个顶点的扩展和计算如下：

$$w(u_0)=\frac{5n}{2}+12;w(u_1)=\frac{5n}{2}+11;$$

$$w(u_2)=\frac{5n}{2}+13;w(u_3)=\frac{5n}{2}+10;$$

$$w(v_0)=\frac{5n}{2}+14;$$

$$w(v_{2j-1})=19,\ 1\leqslant 2j-1\leqslant n-1;$$

$$w(v_{2j})=17,\ 2\leqslant 2j\leqslant n$$

显然 $w(u_i)(i=0,1,2,3)$ 之间互不相同，$w(v_j)\neq w(v_{j+1}),j=1,2,\cdots,n-1;w(v_n)\neq w(v_1);w(v_0)\neq w(u_i),i=0,1,2,3$。下面考虑 $w(u_0)\neq w(v_j),1\leqslant j\leqslant n$。

假设 $w(u_0)=w(v_{2j-1}),1\leqslant 2j-1\leqslant n-1$，有 $\dfrac{5n}{2}+12=19$，即 $n=\dfrac{14}{5}$，与 n 为整数矛盾；假设 $w(u_0)=w(v_{2j}),2\leqslant 2j\leqslant n$，有 $\dfrac{5n}{2}+12=17$，即 $n=2$，与 $n\geqslant 3$ 矛盾。因此，$w(u_0)\neq w(v_j),1\leqslant j\leqslant n$。

同理可得 $w(v_0)\neq w(v_j),1\leqslant j\leqslant n;w(u_i)\neq w(v_j),1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n$。故当 m 是奇数，n 是偶数且 $m<n(m=3)$ 时，c 是 $W_m\vee W_n$ 的一个 NESD 全 2-染色。

（ii）当 $m\geqslant 5$ 时。

$c(u_0)=2,c(u_{2i-1})=1,1\leqslant 2i-1\leqslant m;c(u_{2i})=2,2\leqslant 2i\leqslant m-1;c(v_0)=1;c(v_{2j-1})=1,1\leqslant 2j-1\leqslant n-1;c(v_{2j})=2,2\leqslant 2j\leqslant n;c(u_mu_1)=2;c(u_iu_{i+1})=2,1\leqslant i\leqslant m-2$。除上述边染颜色 2 外，其余边均染颜色 1。则每个顶点的扩展和计算如下：

$$w(u_0)=\frac{5m-3}{2}+\frac{5n}{2}+3;w(u_1)=\frac{5n}{2}+12;$$

$$w(u_{2i})=\frac{5n}{2}+11,2\leqslant 2i\leqslant m-3;$$

$$w(u_{2i-1})=\frac{5n}{2}+13,3\leqslant 2i-1\leqslant m-2;$$

$$w(u_{m-1})=\frac{5n}{2}+10;w(u_m)=\frac{5n}{2}+11;$$

$$w(v_0)=\frac{5m-3}{2}+\frac{5n}{2}+4;$$

$$w(v_{2j-1})=\frac{5m-3}{2}+12,1\leqslant 2j-1\leqslant n-1;$$

$$w(v_{2j})=\frac{5m-3}{2}+10,2\leqslant 2j\leqslant n$$

显然 $w(u_i)\neq w(u_{i+1}),i=1,2,\cdots,m-1;w(u_m)\neq w(u_1);w(v_j)\neq w(v_{j+1}),j=1,2,\cdots,n-1;w(v_n)\neq w(v_1);w(u_0)\neq w(v_0)$。下面考虑 $w(u_0)\neq w(u_i),1\leqslant i\leqslant m$。

假设 $w(u_0)=w(u_1)$，有 $\frac{5m-3}{2}+\frac{5n}{2}+3=\frac{5n}{2}+12$，即 $m=\frac{21}{5}$，与 m 为整数矛盾；假设 $w(u_0)=w(u_{2i}),2\leqslant 2i\leqslant m-3$，有 $\frac{5m-3}{2}+\frac{5n}{2}+3=\frac{5n}{2}+11$，即 $m=\frac{19}{5}$ 与 m 为整数矛盾；假设 $w(u_0)=w(u_{2i-1}),3\leqslant 2i-1\leqslant m-2$，有 $\frac{5m-3}{2}+\frac{5n}{2}+3=\frac{5n}{2}+13$，即 $m=\frac{23}{5}$，与 m 为整数矛盾；假设 $w(u_0)=w(u_{m-1})$，有 $\frac{5m-3}{2}+\frac{5n}{2}+3=\frac{5n}{2}+10$，即 $m=\frac{17}{5}$，与 m 为整数矛盾；假设 $w(u_0)=w(u_m)$，有 $\frac{5m-3}{2}+\frac{5n}{2}+3=\frac{5n}{2}+11$，即 $m=\frac{19}{5}$，与 m 为整数矛盾。因此 $w(u_0)\neq w(u_i),1\leqslant i\leqslant m$。

同理可得 $w(v_0)\neq w(v_j),1\leqslant j\leqslant n;w(u_i)\neq w(v_j),1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n$。故当 m 是奇数，n 是偶数且 $m<n(m\geqslant 5)$ 时，c 是 $W_m\vee W_n$ 的一个 NESD 全 2-染色。

注 1　当 m 是偶数，n 是奇数且 $m>n$ 时，由轮与轮联图的对称性可得，它与情形 6 相同。同理，当 m 是偶数，n 是奇数且 $m<n$ 时，它与情形 5 相同。所以在这里我们不再进行讨论。

综上可证 $\text{egndi}_{\Sigma}(W_m\vee W_n)=2$。

定理 2 设 $m\geqslant 3,n\geqslant 3$。则 $\text{egndi}_{\Sigma}(F_m\vee W_n)=2$。

证明　设

$$V(F_m)=\{u_0,u_1,u_2,\cdots,u_m\},$$
$$E(F_m)=\{u_0u_i\mid i=1,2,\cdots,m\}\cup\{u_iu_{i+1}\mid i=1,2,\cdots,m-1\},V(W_n)=\{v_0,v_1,v_2,\cdots,v_n\},$$
$$E(W_n)=\{v_0v_j\mid j=1,2,\cdots,n\}\cup\{v_jv_{j+1}\mid j=1,2,\cdots,n-1\}\cup\{v_nv_1\}$$

c 是 $F_m\vee W_n$ 的一个全 k-染色。显然 $F_m\vee W_n$ 没有 NESD 全 1-染色，下面给出 $F_m\vee W_n$ 的一个 NESD 全 2-染色。

情形 1　m,n 均为偶数且 $m\neq n$，在定理 1 的情形 1 中删去边 u_mu_1 后，就可得 $F_m\vee W_n$ 在 m,n 均为偶数且 $m\neq n$ 时的一个 NESD 全 2-染色。

情形 2　m,n 均为偶数且 $m=n$，在定理 1 的情形 2 的（1）中删去边 v_3v_4 后，就可得 $F_4\vee W_4$ 的一个 NESD 全 2-染色。在定理 1 的情形 2 的（2）中删去边 u_mu_1 后，就可得 $F_m\vee W_n$ 在 m,n 均为偶数且 $m=n\geqslant 6$ 时的一个 NESD 全 2-染色。

情形 3　m,n 均为奇数且 $m\neq n$，在定理 1 的情形 3 的（1）中删去边 u_1u_2 后，就可得 $F_3\vee W_n$ 在 m,n 均为奇数且 $m\neq n(m=3)$ 时的一个 NESD 全 2-染色。在定理 1 的情形 3 的（2）中删去边 u_1u_2 后，就可得 $F_m\vee W_n$ 在 m,n 均为奇数且 $m\neq n(m>3,n>3)$ 时的一个 NESD 全 2-染色。

情形 4　m,n 均为奇数且 $m=n$，在定理 1 的情形 4 的（1）中删去边 u_1u_3 后，就可得 $F_3\vee W_3$ 的一个 NESD 全 2-染色。在定理 1 的情形 4 的（2）中删去边 u_mu_1 后，就可得 $F_m\vee W_n$ 在 m,n 均为奇数且 $m=n\geqslant 5$ 时的一个 NESD 全 2-染色。

情形 5　m 是奇数，n 是偶数且 $m>n$，在定理 1 的情形 5 中删去边 u_1u_2 后，就可得 $F_m\vee W_n$ 在 m 是奇数，n 是偶数且 $m>n$ 时的一个 NESD 全 2-染色。

情形 6　m 是奇数，n 是偶数且 $m<n$，在定理 1 的情形 6 的（1）中删去边 u_2u_3 后，就可得 $F_3\vee W_n$ 在 m 是奇数，n 是偶数且 $m<n(m=3)$ 时的一个 NESD 全 2-染色。在定理 1 的情形 6 的（2）中删去边 u_mu_1 后，就可得 $F_m\vee W_n$ 在 m 是奇数，n 是偶数且 $m<n(m\geqslant 5)$ 时的一个 NESD 全 2-染色。

情形 7　m 是偶数，n 是奇数且 $m>n$，在定理 1 的情形 6 的（1）中删去边 v_nv_1 后，就可得 $F_m\vee W_3$ 在 m 是偶数，n 是奇数且 $m>n(n=3)$ 时一个 NESD 全 2-染色。在定理 1 的情形 6 的（2）中删去边 v_nv_1 后，就可得 $F_m\vee W_n$ 在 m 是偶数，n 是奇数且 $m>n\geqslant 5$ 时的一个 NESD 全 2-染色。

情形 8　m 是偶数，n 是奇数且 $m<n$，在定理

1 的情形 5 中删去边 $v_n v_1$ 后，就可得 $F_m \vee W_n$ 在 m 是偶数，n 是奇数且 $m < n$ 时的一个 NESD 全 2-染色。

综上可证 $\mathrm{egndi}_\Sigma(F_m \vee W_n) = 2$ 。

定理 3 设 $m \geqslant 3, n \geqslant 3$ ，则 $\mathrm{egndi}_\Sigma(F_m \vee F_n) = 2$ 。

证明 设 $V(F_m) = \{u_0, u_1, u_2, \cdots, u_m\}, E(F_m) = \{u_0 u_i \mid i = 1,2,\cdots,m\} \cup \{u_i u_{i+1}, \mid i = 1,2,\cdots, m-1\}, V(F_n) = \{v_0, v_1, v_2, \cdots, v_n\}, E(F_n) = \{v_0 v_j \mid j = 1,2,\cdots,n\} \cup \{v_j v_{j+1} \mid j = 1,2,\cdots,n-1\}$。$c$ 是 $F_m \vee F_n$ 的一个全 k-染色。显然 $F_m \vee F_n$ 没有 NESD 全 1-染色，下面给出 $F_m \vee F_n$ 的一个 NESD 全 2-染色。

情形 1 m, n 均为偶数且 $m \neq n$，在定理 1 的情形 1 中删去边 $u_m u_1$ 与边 $v_n v_1$ 后，就可得 $F_m \vee F_n$ 在 m, n 均为偶数且 $m \neq n$ 时的一个 NESD 全 2-染色。

情形 2 m, n 均为偶数且 $m = n$

（i）当 $m = n = 4$ 时：$c(u_1) = c(u_3) = c(v_0) = c(v_1) = c(v_3) = 1, c(u_0) = c(u_2) = c(u_4) = c(v_2) = c(v_4) = 2, c(u_0 u_i) = 2, 1 \leqslant i \leqslant 4; c(u_i u_{i+1}) = 2, 1 \leqslant i \leqslant 3; c(u_4 v_4) = 2$ 。除上述边染颜色 2 外，其余边均染颜色 1。则每个顶点的扩展和计算如下：

$$w(u_0) = 26; w(u_1) = 20; w(u_2) = 22;$$
$$w(u_3) = 24; w(u_4) = 20;$$
$$w(v_0) = 23; w(v_1) = 18;$$
$$w(v_2) = 19;$$
$$w(v_3) = 21; w(v_4) = 18$$

显然当 m, n 均为偶数且 $m = n = 4$ 时，c 是 $F_4 \vee F_4$ 的一个 NESD 全 2-染色。

（ii）当 $m = n \geqslant 6$ 时：$c(u_0) = 2, c(u_{2i-1}) = 1, 1 \leqslant 2i-1 \leqslant m-1; c(u_{2i}) = 2, 2 \leqslant 2i \leqslant m; c(v_0) = 1; c(v_{2j-1}) = 1, 1 \leqslant 2j-1 \leqslant n-1; c(v_{2j}) = 2, 2 \leqslant 2j \leqslant n; c(u_{2k} u_{2k+1}) = 2, 1 \leqslant k \leqslant \frac{m}{2} - 1; c(v_j v_{j+1}) = 2, 1 \leqslant j \leqslant n-1; c(u_t v_t) = 2, 1 \leqslant t \leqslant m-1$ 。除上述边染颜色 2 外，其余边均染颜色 1。则每个顶点的扩展和计算如下：

$$w(u_0) = 5m + 2; w(u_1) = \frac{5m}{2} + 9;$$
$$w(u_{2i}) = \frac{5m}{2} + 11, 2 \leqslant 2i \leqslant m-2;$$
$$w(u_{2i-1}) = \frac{5m}{2} + 13, 3 \leqslant 2i-1 \leqslant m-1;$$
$$w(u_m) = \frac{5m}{2} + 7;$$
$$w(v_0) = 5m + 3;$$
$$w(v_1) = w(u_{m-1}) = \frac{5n}{2} + 10;$$
$$w(u_m) = \frac{5m}{2} + 10;$$
$$w(v_{2j}) = \frac{5m}{2} + 12, 2 \leqslant 2j \leqslant n-2;$$
$$w(v_{2j-1}) = \frac{5m}{2} + 14, 3 \leqslant 2j-1 \leqslant n-1;$$
$$w(v_n) = \frac{5m}{2} + 8$$

显然当 m, n 均为偶数且 $m = n \geqslant 6$ 时，c 是 $F_m \vee F_n$ 的一个 NESD 全 2-染色。

情形 3 m, n 均为奇数且 $m \neq n$，在定理 1 的情形 3 的（1）中删去边 $u_1 u_2$ 与边 $v_{n-1} v_n$ 后，就可得 $F_3 \vee F_n$ 在 m, n 均为奇数且 $m \neq n (m = 3)$ 时的一个 NESD 全 2-染色。在定理 1 的情形 3 的（2）中删去边 $u_1 u_2$ 与边 $v_1 v_2$ 后，就可得 $F_m \vee F_n$ 在 m, n 均为奇数且 $m \neq n (m > 3, n > 3)$ 时的一个 NESD 全 2-染色。

情形 4 m, n 均为奇数且 $m = n$，在定理 1 的情形 4 的（1）中删去边 $u_1 u_3$ 与边 $v_1 v_2$ 后，就可得 $F_3 \vee F_3$ 的一个 NESD 全 2-染色。在定理 1 的情形 4 的（2）中删去边 $u_1 u_2$ 与边 $v_2 v_3$ 后，就可得 $F_m \vee F_n$ 在 m, n 均为奇数且 $m = n \geqslant 5$ 时的一个 NESD 全 2-染色。

情形 5 m 是奇数，n 是偶数且 $m > n$，在定理 1 的情形 5 中删去边 $u_1 u_2$ 与边 $v_1 v_2$ 后，就可得 $F_m \vee F_n$ 在 m 是奇数，n 是偶数 $m > n$ 时的一个 NESD 全 2-染色。

情形 6 m 是奇数，n 是偶数且 $m < n$，在定理 1 的情形 6 的（1）中删去边 $u_2 u_3$ 与边 $v_1 v_2$ 后，就可得 $F_3 \vee F_n$ 在 m 是奇数，n 是偶数且 $m < n (m = 3)$ 时的一个 NESD 全 2-染色。在定理 1 的情形 6 的（2）中删去边 $u_m u_n$ 与边 $v_n v_1$ 后，就可得 $F_m \vee F_n$ 在 m 是奇数，n 是偶数且 $m < n (m \geqslant 5)$ 时的一个 NESD 全 2-染色。

注 2 当 m 是偶数，n 是奇数且 $m > n$ 时，由扇与扇联图的对称性可得，它与情形 6 相同。同理，当 m 是偶数，n 是奇数且 $m < n$ 时，它与情形 5 相同。所以在这里我们不再进行讨论。

综上可证 $\mathrm{egndi}_\Sigma(F_m \vee F_n) = 2$ 。

2 结 语

在本文中先探讨了两轮之联的邻点被扩展和可

区别全染色，并得到了它的邻点被扩展和可区别全色数。另外，通过删边的方法得到了扇与轮的联与两扇之联的邻点被扩展和可区别全染色，并确定了它们的邻点被扩展和可区别全色数。那么这种方法是不是可以运用到其它图的联图上，进而得到某些联图的邻点被扩展和可区别全染色及其邻点被扩展和可区别全色数，或者利用加边的方法解决某些联图的邻点被扩展和可区别全染色及其邻点被扩展和可区别全色数，这就是今后需要继续研究的课题。

参考文献:

[1] KAROŃSKI M, LUCZAK T, THOMASON A, et al. Edge weights and vertex colours [J]. J Combin Theory Ser B, 2004, 91: 151 – 157.

[2] PRZYBYLO J, WOŹNIAK M. On a 1,2 conjecture [J]. Discrete Math Theor Computer Sci, 2010, 12(1): 101 – 108.

[3] KALKOWSKI M, KAROŃSKI M, PFENDER F, et al. Vertex-coloring edge-weightings: Towards the 1-2-3-conjecture [J]. J Combin Theory ser B, 2010, 100(3): 347 – 349.

[4] PILŚNIAK M, WOŹNIAK M. On the total-neighbor-distinguishing index by sums [J]. Graphs and Combinatorics, 2015, 31(3): 771 – 782.

[5] LI H L, LIU B Q, WANG G H, et al. Neighbor sum distinguishing total colorings of K_4-minor free graphs [J]. Frontiers of Mathematics in China, 2013, 8(6): 1351 – 1366.

[6] DONG A J, WANG G H. Neighbor sum distinguishing total colorings of graphs with bounded maximum average degree [J]. Acta Mathematica Sinica, 2014, 30(4): 703 – 709.

[7] 陈祥恩. 图的可区别染色引论[M]. 北京: 中国科学技术出版社, 2015: 109 – 112.

[8] BONDY J A, MURTY U S R, Graph theory with applications [M]. London: Springer, 2008.

[9] EVELYNE F, LI H, ANTONI M, et al. A note on neighbor expanded sum distinguishing index [J]. Discussiones Mathematicae Graph Theory, 2017, 37: 29 – 37.

[10] 何玉萍, 王治文, 陈祥恩, 等. mC_6 的点可区别全染色[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2018, 57(1): 69 – 75.
HE Y P, WANG Z W, CHEN X E, et al. Vertex-distinguishing total coloring of mC_6 [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2018, 57(1): 69 – 75.

[11] 孙慧, 姚兵. 探索圈龙图的奇优美性[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2017, 56(4): 9 – 15.
SUN H, YAO B. Exploring the odd gracefulness of cyclic dragon graphs [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2017, 56(4): 9 – 15.

[12] 唐保祥, 任韩. 2 类图完美匹配数目的解析式[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2016, 55(4): 15 – 17.
TANG B X, REN H. The analytic formula of the number of perfect matchings of two types of graphs [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2016, 55(4): 15 – 17.

(责任编辑　冯兆永)