

超混沌 Tang 系统的分析 及其线性反馈同步与其电路实现*

高智中

(安徽科技学院信息与网络工程学院, 安徽 蚌埠 233030)

摘要: 为产生复杂的超混沌吸引子, 基于 Tang 系统构造了一个新的四维超混沌 Tang 系统。用数值模拟方法分析了该系统的相图、分岔图和 Lyapunov 指数谱等基本动力学特性。数值结果表明新系统随着新引入的参数变化呈现周期、混沌及超混沌动力学行为, 与以往的超混沌相比, 新系统的参数 k 具有更大的变化范围, 并且系统随 k 与 p 变化表现出相同的动力学行为且成一定的比例。设计了一种线性控制器实现了该超混沌系统的同步, 结果表明了该方法的正确性和有效性。最后设计了相应的实验电路, 并在示波器中观察到电路系统的超混沌动力学行为和驱动系统与响应系统的同步结果, 这些结果与数值仿真结果基本吻合。

关键词: 新超混沌系统; 相图; 分岔图; Lyapunov 指数谱图; 线性反馈同步; 实验电路

中图分类号: O545 文献标志码: A 文章编号: 0529-6579 (2020) 01-0015-09

Analysis, linear feedback synchronization and circuit realization of a hyperchaotic Tang's system

GAO Zhizhong

(College of Information and Network Engineering, Anhui Science and Technology University,
Bengbu 233030, China)

Abstract: In order to generate complex hyperchaotic, a new four-dimensional Tang hyperchaotic system based on Tang system is built. The phase diagram, bifurcation diagram and Lyapunov exponents spectrum diagram of the system are analyzed by means of numerical simulations. Numerical simulations show that the new system's dynamics behavior can be periodic, quasi-periodic, chaotic and hyperchaotic as the parameter varies. Compared to the previous hyperchaotic, the system possess the large change range with new parameters k , and the system changes with k and p show the same dynamic behavior and a certain proportion. Linear controller is designed to realize synchronization of the hyperchaotic system. Results demonstrate that the method is correct and effective. Finally, a corresponding experimental circuit is designed. The hyperchaotic dynamical behavior of the circuit system and synchronization results of the driver system as well as response system are observed by an oscilloscope. The results are basically consistent with those of digital simulation.

Key words: novel hyperchaotic system; phase diagram; bifurcation diagram; Lyapunov exponents spectrum; linear feedback synchronization; experimental circuit

* 收稿日期: 2019-04-10

基金项目: 安徽高校自然科学研究重点项目 (KJ2017A518)

作者简介: 高智中 (1979 年生), 男; 研究方向: 混沌理论及其应用; E-mail: gaozhizhong2005@126.com

当非线性动力学系统具有两个或两个以上的正 Lyapunov 指数时, 系统处于超混沌状态, 动力学行为比一般混沌系统更复杂, 更难以预测。构造超混沌系统及其同步的研究引起了广大科研工作者的极大关注。文献 [1-3] 通过施加外部正弦激励信号而实现超混沌, 文献 [4-6] 通过对三维混沌系统引入一个控制器, 并将其耦合到系统的一个方程或多个方程中而实现超混沌。文献 [7] 设计了一种线性牵制控制器实现了一个参数范围较小的新超混沌系统的同步, 文献 [8] 基于一种新型趋近律研究了分数阶不确定 Duffing 系统的自适应滑模同步问题, 文献 [9] 研究了分数阶单摆系统的终端滑模控制混沌同步, 文献 [10] 研究了一类分数阶冠状动脉系统的混沌同步问题, 文献 [11] 研究了主-从蔡氏电路系统在线性状态误差反馈控制下存在通道时延时的滞后混沌同步问题。但是这些方法的控制器设计比较复杂, 而且同步收敛速度较慢和对参数敏感。

针对上述问题, 本文基于 Tang 系统^[12], 构造了一个新的四维超混沌 Tang 系统, 用数值模拟方法分析了该系统的相图, 分岔图和 Lyapunov 指数谱等基本动力学特性。与以往的超混沌相比, 新系统的参数 k 具有更大的变化范围, 并且系统随 k 与 p 变化表现出相同的动力性行为且成一定的比例。设计了一种线性牵制控制器实现了该超混沌系统的同步, 利用了混沌系统的状态变量的有界性, 通过误差系统内部的自组织作用, 整个误差系统渐近稳定从而实现了混沌同步, 该方法不要求系统的最大 Lyapunov 指数或建立 Lyapunov 函数, 从而大大减少了计算量, 而且这种方法容易实现、同步速度快、同步结果稳定。最后设计了相应的实验电路, 并在示波器中观察到电路系统的超混沌动力学行为和驱动系统与响应系统的同步结果, 这些结果与数值仿真结果基本吻合。

1 超混沌 Tang 系统及其超混沌吸引子

文献 [12] 提出的新的三维自治混沌系统, 其状态方程可表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + by \\ \dot{y} = cx - xz - dy \\ \dot{z} = xy - e(x + z) \end{cases}$$

当 $a = 25.6, b = 66.8, c = 39.22, d = 0.2, e = 4$ 时, 系统存在典型的混沌吸引子。

经过大量尝试, 在 Tang 系统的第 1 个方程增加一个非线性状态反馈控制器 w , 并增加一个关于 w 的一阶微分方程, 可得到如下新的四维超混沌 Tang 系统:

$$\begin{cases} \dot{x} = -ax + by - pw \\ \dot{y} = cx - xz - y \\ \dot{z} = xy - d(x + z) \\ \dot{w} = k(x + y) \end{cases}$$

式中, p 和 k 为新引入的参数。当选取典型参数 $a = 20, b = 35, p = 1, c = 30, d = 5, k = 10$ 时, 用 Matlab 计算得到系统有三个不稳定的平衡点, 这为新系统产生超混沌创造了可能。利用 Wolf 方法^[13] 计算出系统的四个 Lyapunov 指数分别为 $\lambda_1 = 1.4026, \lambda_2 = 0.21, \lambda_3 = 0, \lambda_4 = -27.5105$, 可见系统在上述参数下处于超混沌运动, 对应的超混沌吸引子在各平面上的投影如图 1 所示。对于新系统有 $\nabla V = \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} +$

$\frac{\partial \dot{w}}{\partial w} = -a - 1 - d = -26 < 0$, 系统是耗散的, 说明当选取上述参数时系统的状态变化时有界的, 并以指数

形式 $\frac{dV}{dt} = e^{-26t}$ 收敛。也就是一个初始体积为 $V(0)$ 的体积元在时刻 t 时收缩为体积元 $V(0)e^{-26t}$ 。这意味着, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, 包含系统轨线的每个小体积元以指数速率 -26 收缩到零, 所有系统的轨线最终会被限制在一个体积为零的极限子集上, 其渐近运动将被固定在一个吸引子上, 这就从理论上说明了吸引子的存在性^[14]。

2 动力学行为演化

情形 1: 当固定 $a = 20, b = 35, p = 1, c = 30, d = 5$, 变量 x 随 k 在 $[0, 1500]$ 变化关于 x 的分岔图和 Lyapunov 指数谱图 (这里略去了第四根 Lyapunov 指数曲线) 如图 2 所示。从图 2 可以观察到, 系统具有丰富的动力学行为, 并且随参数 k 变化范围较大。

为了进一步说明系统中取不同参数的超混沌、混沌、周期各自轨迹的特点, 本文分别对 $k = 16, 64, 92, 230, 410, 548, 648, 1244, 1498$ 这 9 个 k 值上的相轨迹进行数值仿真, 图 3 给出了 $x-w$ 平面上的典型的相轨迹图, 由图可见系统各状态下的相轨迹在不同平面的投影具有不同的形状。表 1 给出了这 9 种参数下的 Lyapunov 指数谱和运动形式。

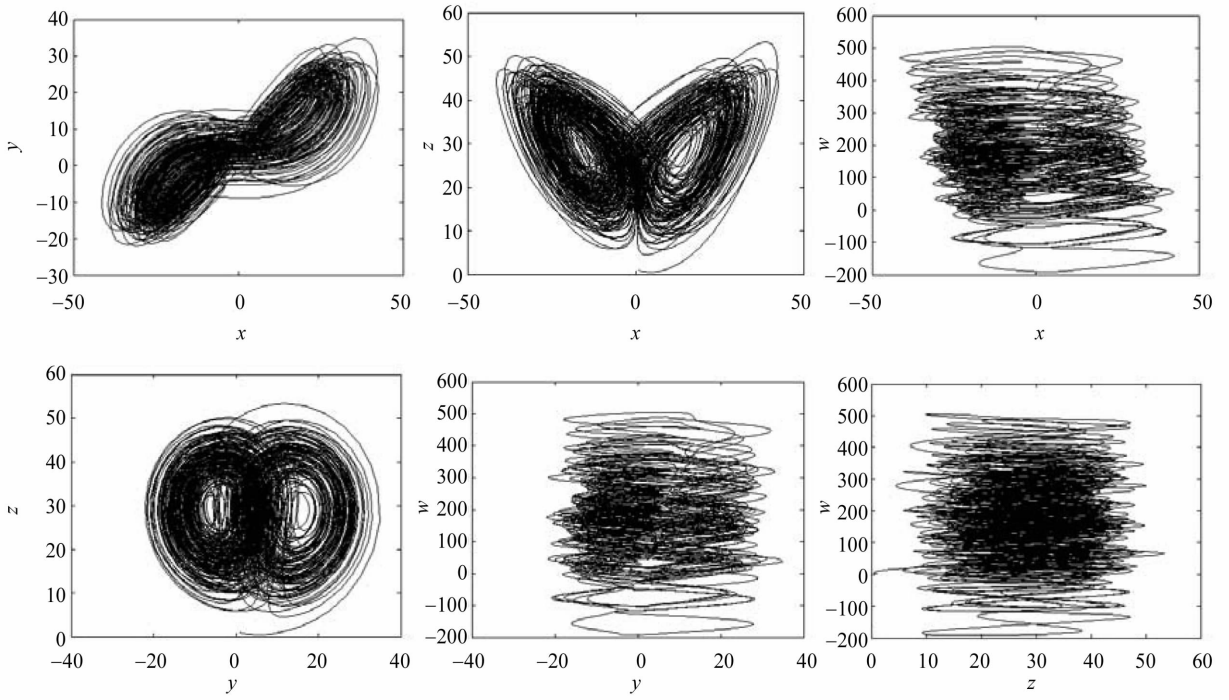


图 1 系统的超混沌吸引子
Fig. 1 Hyperchaotic attractors of system

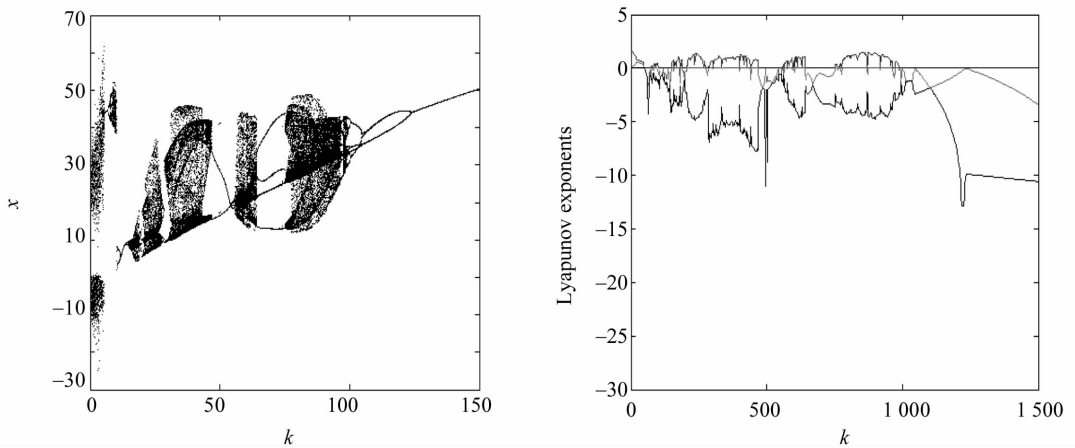
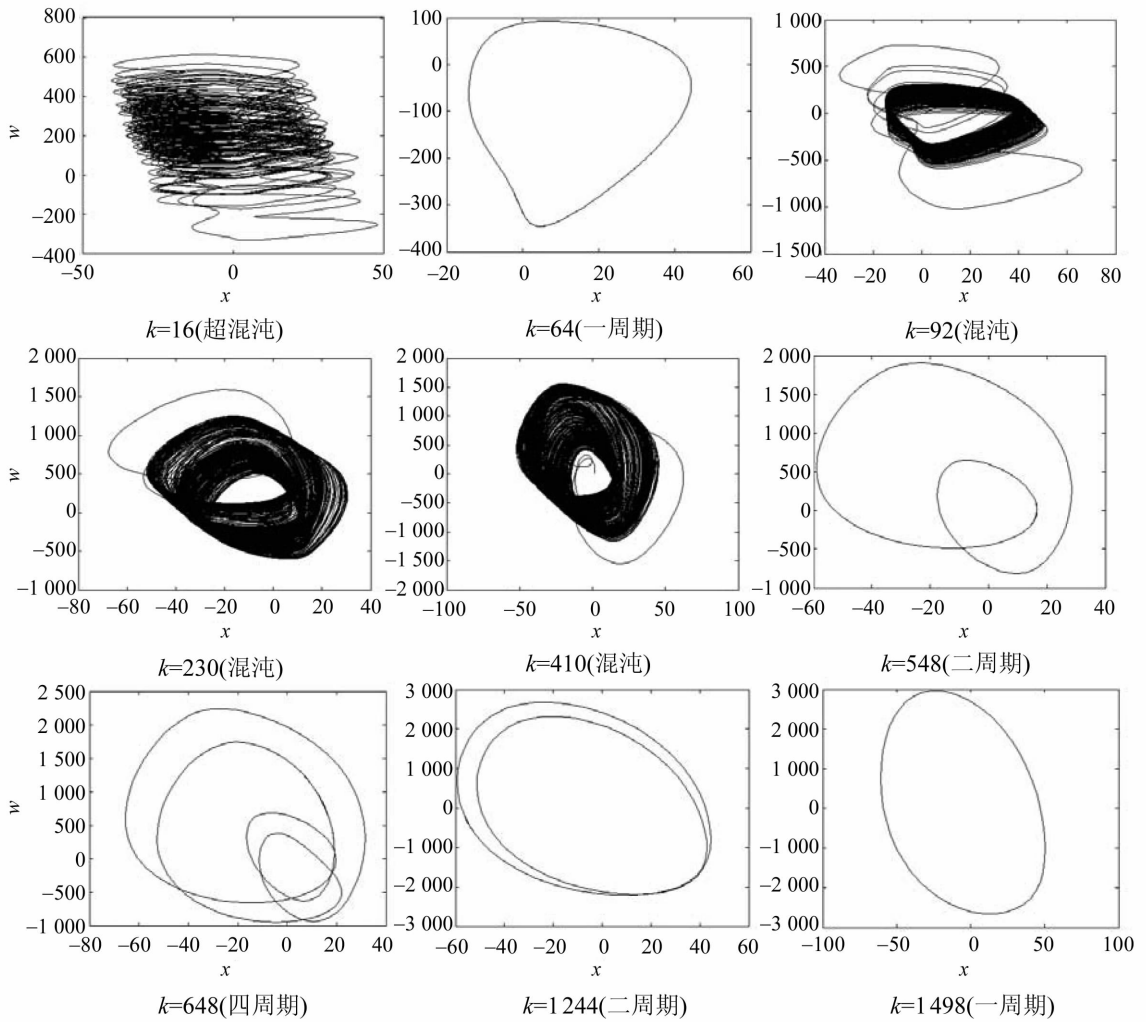


图 2 系统随 k 变化的分岔图和 Lyapunov 指数谱图
Fig. 2 Bifurcation diagram and Lyapunov exponent spectrum diagram of the system varies with k

图 3 系统各状态下的典型相轨迹在 $x-w$ 平面上的投影Fig. 3 Projections of typical phase paths in the $x-w$ planar graph under different system state表 1 不同参数 k 下的 Lyapunov 指数谱和运动形式Table 1 Lyapunov exponent spectrum and dynamic modality under different k values

k	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4	运动形式
16	1.118 9	0.387 0	0.006 4	-27.406	超混沌
64	0	-1.602 3	-4.290 9	-20.045	一周期
92	0.370 4	0	-1.241 4	-25.054	混沌
230	1.286 0	0	-4.721 5	-22.537	混沌
410	1.152 2	0	-6.094 4	-21.049	混沌
548	0	-0.574 2	-0.590 3	-24.833	二周期
648	0	-0.533 0	-2.315 3	-23.152	四周期
1 244	0	-0.095 7	-9.913 0	-15.999	二周期
1 498	0	-3.389 6	-10.578 0	-12.038	一周期

情形 2: 当固定 $a = 20, b = 35, c = 30, d = 5, k = 10$, 变量 x 随 p 在 $[0, 150]$ 变化关于 x 的分岔图和 Lyapunov 指数谱图 (这里略去了第四根 Lyapunov 指数曲线) 如图 4 所示。由图 4 见随参数 p 变化和随参数 k 变化具有相同的动力学行为, 只是变化范围大大的缩小。

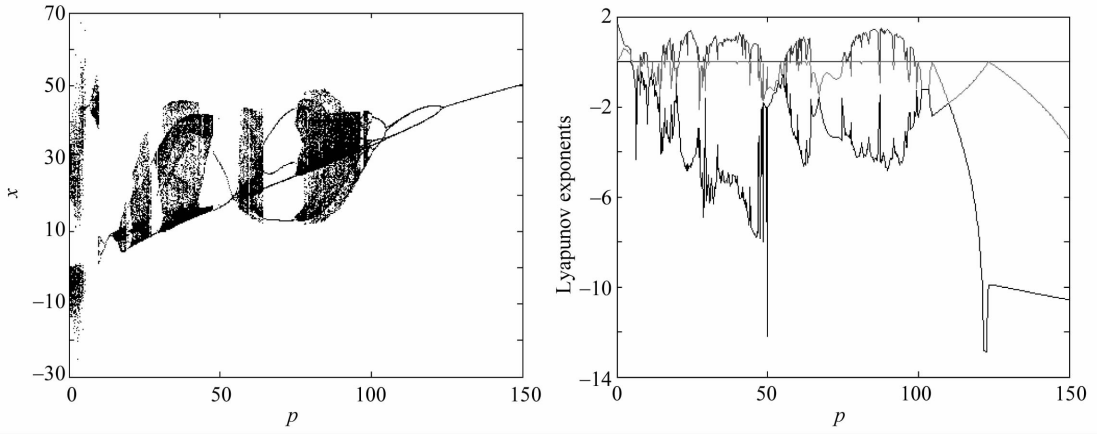


图 4 系统随 p 变化的分岔图和 Lyapunov 指数谱图

Fig. 4 Bifurcation diagram and Lyapunov exponent spectrum diagram of the system varies with p

3 新超混沌系统的线性反馈同步

设驱动系统为

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -20x_1 + 35x_2 - x_4 \\ \dot{x}_2 = 30x_1 - x_1x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - 5(x_1 + x_3) \\ \dot{x}_4 = 10(x_1 + x_2) \end{cases}$$

令驱动变量为 x_2 ，构造响应系统为

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -20y_1 + 35x_2 - y_4 \\ \dot{y}_2 = 30y_1 - y_1y_3 - y_2 \\ \dot{y}_3 = y_1x_2 - 5(y_1 + y_3) \\ \dot{y}_4 = 10(y_1 + x_2) + u \end{cases}$$

其中 u 为待设计的线性反馈控制器。

令误差变量为 $e_i = y_i - x_i, i = 1, 2, 3, 4$ 。则两系统的误差系统可化为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -20e_1 - e_4 \\ \dot{e}_2 = 30e_1 - e_2 - y_1e_3 - x_3e_1 \\ \dot{e}_3 = -5(e_1 + e_3) + x_2e_1 \\ \dot{e}_4 = 10e_1 + u \end{cases}$$

选取线性控制器 $u = -10e_1 - 10e_4$ ，则误差系统可进一步化为

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = -20e_1 - e_4 \\ \dot{e}_2 = 30e_1 - e_2 - y_1e_3 - x_3e_1 \\ \dot{e}_3 = -5(e_1 + e_3) + x_2e_1 \\ \dot{e}_4 = -10e_4 \end{cases}$$

显然 e_4 的解将随着时间以指数速率趋向于零，即当 $t \rightarrow \infty$ 时， $e_4 \rightarrow 0$ 。同理， e_1 也能渐近稳定于零点， e_2, e_3 也能渐近稳定于零点，所以整个误差系统就会被牵制到零点，从而驱动系统和响应系统同步。设驱动系统的初始值仍为 $(10, 10, 10, 10)$ ，响应系统的初始值为 $(1, 1, 1, 1)$ ，在线性控制器作用下同步误差曲线模拟结果如图 5 所示，由图 5 可以看出，经过一个暂态过程后误差变量 e_1, e_2, e_3, e_4 全部快速趋向于零。

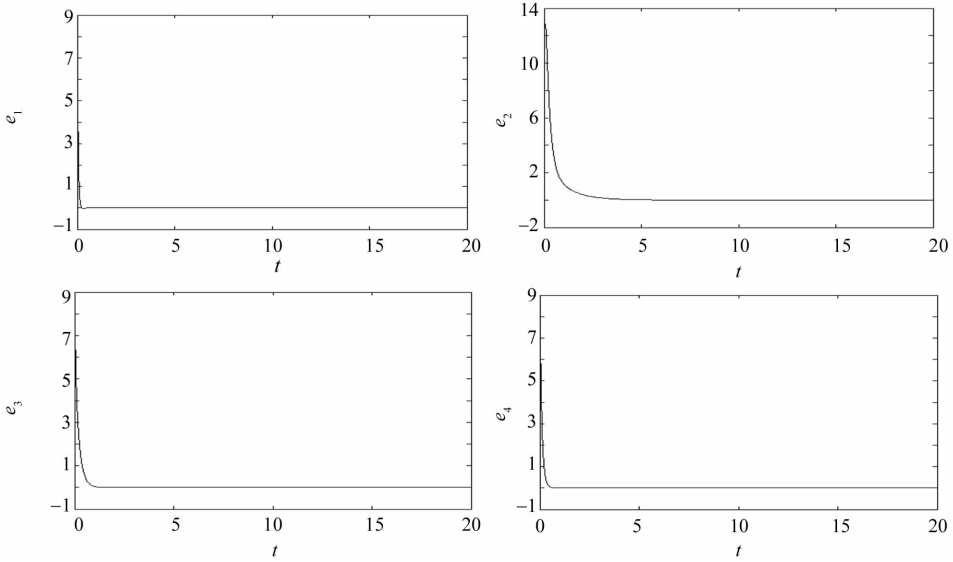


图 5 两系统的同步误差曲线

Fig. 5 Synchronization error curve of two systems

4 电路实现

为了验证驱动系统和响应系统的特性, 笔者设计了硬件电路来实现驱动系统和响应系统。因为电路中各电容元件的耐压值是有限的, 故将驱动系统中各变量变为原来的 $1/40$, 驱动系统表达式变为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -20x_1 + 35x_2 - x_4 \\ \dot{x}_2 = 30x_1 - 40x_1x_3 - x_2 \\ \dot{x}_3 = 40x_1x_2 - 5(x_1 + x_3) \\ \dot{x}_4 = 10(x_1 + x_2) \end{cases}$$

驱动系统电路实现如图 6 (a) 所示, 其中参数值为: $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 100 \text{ nF}$, $R_1 = 10 \text{ M}\Omega$, $R_2 = 350 \text{ M}\Omega$, $R_3 = 3.5 \text{ M}\Omega$, $R_4 = 100 \text{ M}\Omega$, $R_5 = 500 \text{ M}\Omega$, $R_6 = 10 \text{ M}\Omega$, $R_7 = 7.5 \text{ M}\Omega$, $R_8 = 3 \text{ M}\Omega$, $R_9 = 100 \text{ M}\Omega$, $R_{10} = 10 \text{ M}\Omega$, $R_{11} = 20 \text{ M}\Omega$, $R_{12} = 2.5 \text{ M}\Omega$, $R_{13} = 1 \text{ M}\Omega$, $R_{14} = 100 \text{ M}\Omega$, $R_{15} = 2 \text{ M}\Omega$, $R_{16} = 10 \text{ M}\Omega$, $R_{17} = 10 \text{ M}\Omega$, $R_{18} = 1 \text{ M}\Omega$, $R_{19} = 100 \text{ M}\Omega$, $R_{20} = R_{21} = 1 \text{ M}\Omega$, $R_{22} = R_{23} = 1 \text{ M}\Omega$ 。

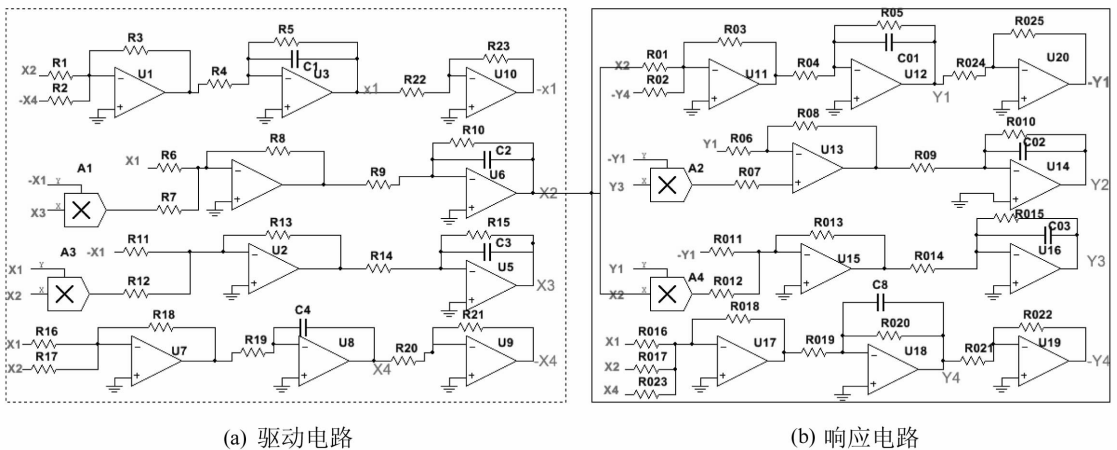


图 6 超混沌系统的驱动电路 (a) 和响应电路 (b)

Fig. 6 Driver circuit (a) and response circuit (b) in the hyperchaotic system

利用示波器测量驱动系统的超混沌吸引子如图 7 所示, 与本文的图 1 对比可见, 硬件电路的输出结果与数值仿真结果是一致的。

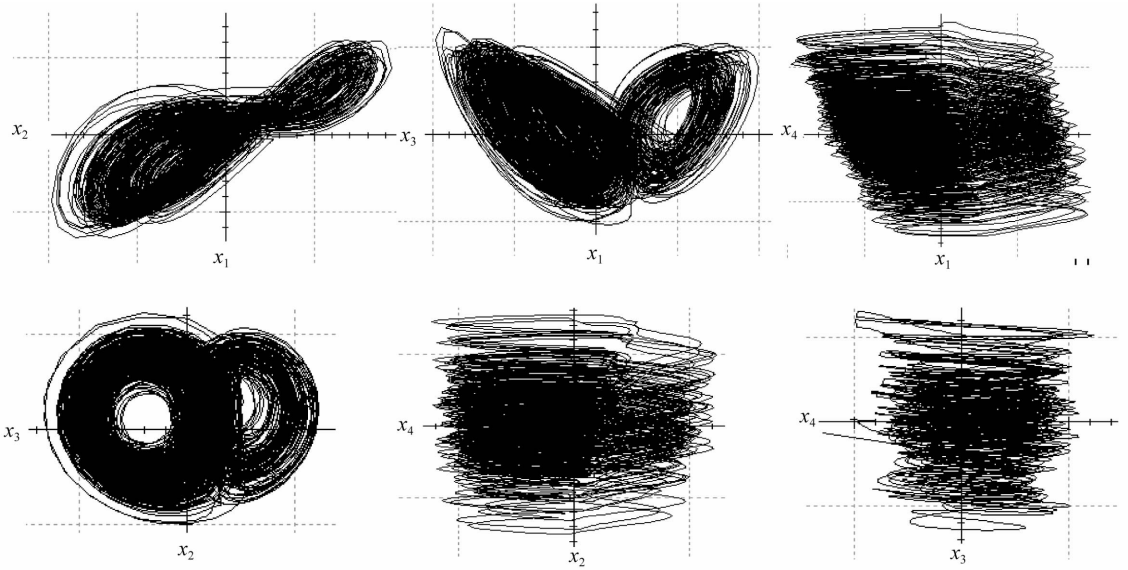


图 7 示波器测得的驱动系统的超混沌吸引子

Fig. 7 Hyperchaotic attractor of the driver system detected by oscilloscope

前文构建了与驱动系统线性反馈同步的响应系统中 $u = -10e_1 - 10e_4$, 且 $e_i = y_i - x_i, i = 1, 2, 3, 4$, 故 $u = 10x_1 - 10y_1 + 10x_4 - 10y_4$, 将 u 的表达式带入响应系统可得:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -20y_1 + 35x_2 - y_4 \\ \dot{y}_2 = 30y_1 - y_1y_3 - y_2 \\ \dot{y}_3 = y_1x_2 - 5(y_1 + y_3) \\ \dot{y}_4 = 10(y_1 + x_2) + 10x_1 - 10y_1 + 10x_4 - 10y_4 \end{cases}$$

将响应系统中各变量变为原来的 $1/40$, 响应系统表达式变为:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -20y_1 + 35x_2 - y_4 \\ \dot{y}_2 = 30y_1 - 40y_1y_3 - y_2 \\ \dot{y}_3 = y_1x_2 - 5(y_1 + y_3) \\ \dot{y}_4 = 10x_2 + 10x_1 + 10x_4 - 10y_4 \end{cases}$$

响应系统电路实现如图 6 (b) 所示, 为了与驱动系统的参数便于对比, 响应系统的参数下标前加了 0, 各参数分别为: $C_{01} = C_{02} = C_{03} = C_{04} = 100 \text{ nF}, R_{01} = 10 \text{ M}\Omega, R_{02} = 350 \text{ M}\Omega, R_{03} = 3.5 \text{ M}\Omega, R_{04} = 100 \text{ M}\Omega, R_{05} = 500 \text{ M}\Omega, R_{06} = 10 \text{ M}\Omega, R_{07} = 7.5 \text{ M}\Omega, R_{08} = 3 \text{ M}\Omega, R_{09} = 100 \text{ M}\Omega, R_{010} = 10\text{M}\Omega, R_{011} = 20 \text{ M}\Omega, R_{012} = 100 \text{ M}\Omega, R_{013} = 1 \text{ M}\Omega, R_{014} = 100 \text{ M}\Omega, R_{015} = 2\text{M}\Omega, R_{016} = 10 \text{ M}\Omega, R_{017} = 10 \text{ M}\Omega, R_{018} = 1 \text{ M}\Omega, R_{019} = 100 \text{ M}\Omega, R_{020} = 10 \text{ M}\Omega, R_{021} = 1 \text{ M}\Omega$ 。

驱动系统和响应系统的同步性测试如图 8 所示, 图 8 (a) 所示为 x_1 和 y_1 的时序图, 对比 x_1 和 y_1 时序波形图可见, 随着时间的变化, 波形是相同的; 图 8 (b) 所示为 x_1 和 y_1 的状态同步图, 可见 x_1 和 y_1 达到了良好的同步, 同理, 对 $x_2 - y_2, x_3 - y_3, x_4 - y_4$ 进行相同测试, 结果与 x_1 和 y_1 的同步性是一样的。可见, 驱动系统和响应系统具有良好的同步性。

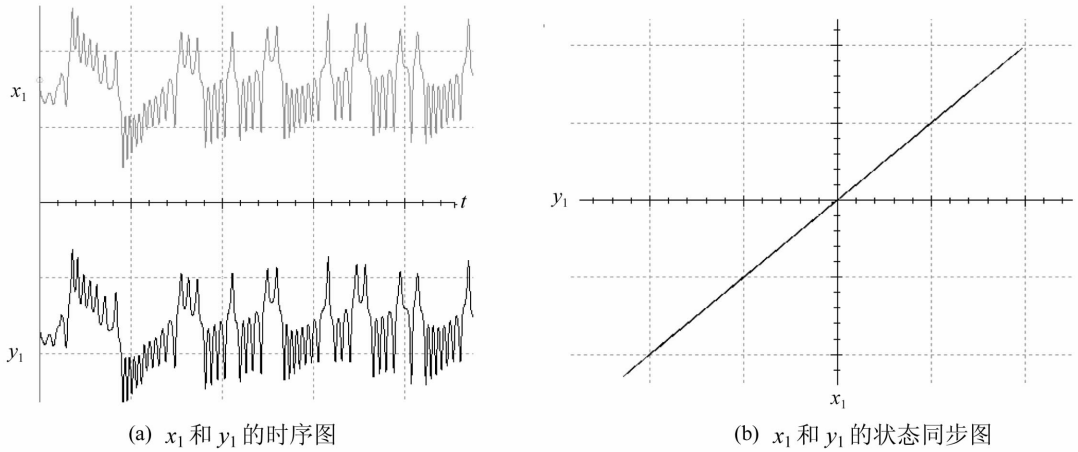


图 8 超混沌系统的驱动电路和响应电路的 x_1 和 y_1 的时序图和状态同步图

Fig. 8 Time-serial diagram and state synchronization diagram of x_1 and y_1 in the driver system and response system of the hyperchaotic system

5 结 论

本文在 Tang 混沌系统基础上构造了一个新的四维超混沌系统, 重点研究了新引入的两个参数 k 和 p 取不同值时超混沌系统的运动情况, 通过分岔图、Lyapunov 指数谱及相图的数值仿真, 刻画了超混沌系统的运动规律, 结果发现新的四维超混沌系统具有丰富的动力学行为。成功构造了一种线性控制器实现了该超混沌系统的同步, 最后设计了相应的实验电路, 并在示波器中观察到电路系统的超混沌动力学行为和驱动系统与响应系统的同步结果, 这些结果与数值仿真结果基本吻合。

参考文献:

- [1] SUN K H, SPROTT J C. Periodically forced chaotic system with signum nonlinearity [J]. International Journal of Bifurcation and Chaos, 2010, 20(5): 1499 – 1507.
- [2] BAO B C, XU Q, XU J P. Multi-scroll hyperchaotic system based on Colpitts model and its circuit implementation [J]. Journal of Electronics, 2010, 27(4): 538 – 543.
- [3] 仓诗建, 陈增强, 袁著祉. 一个新四维非自治超混沌系统的分析与电路实现[J]. 物理学报, 2008, 57(3): 1493 – 1501.
CANG S J, CHEN Z Q, YUAN Z Z. Analysis and circuit implementation of a new four-dimensional non-autonomous hyperchaotic system [J]. Acta Physics Sinica, 2008, 57(3): 1493 – 1501.
- [4] JIA H Y, CHEN Z Q, YUAN Z Z. A novel one equilibrium hyper-chaotic system generated upon Lü attractor [J]. Chinese Physics B, 2010, 19(2): 1 – 10.
- [5] 王杰智, 李航, 王蕊, 等. 一个新四维光滑四翼超混沌系统及电路实现[J]. 山东大学学报(理学版), 2015, 50(11): 104 – 112.
WANG J Z, LI H, WANG R, et al. A new four-dimensional smooth four-wing hyperchaotic system and its circuit implementation [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2015, 50(11): 104 – 112.
- [6] YANG Q G, ZHANG K M, CHEN G R. Hyperchaotic attractors from a linearly controlled Lorenz system [J]. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 2009, 10(3): 1601 – 1617.
- [7] 高智中. 一个新超混沌系统及其线性反馈同步[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2012, 51(6): 30 – 34.
GAO Z Z. A novel hyperchaotic system and its linear feedback synchronization [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2012, 51(6): 30 – 34.
- [8] 毛北行. 基于一种新型趋近律的分数阶 Duffling 不确定系统的自适应滑模同步[J]. 中山大学学报(自然科学版),

2017, 56(4): 64–67.

MAO B X. Self-adaptive sliding mode synchronization of fractional-order uncertainty Duffing systems based on a new reaching law [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2017, 56(4): 64–67.

[9] 程春蕊, 朱军辉, 毛北行. 分数阶单摆系统的终端滑模控制混沌同步[J]. *工程数学学报*, 2019, 36(1): 99–105.

CHENG C R, ZHU J H, MAO B X. Chaos synchronization of fractional-order simple pendulum systems based on terminal sliding mode control [J]. *Chinese Journal of Engineering Mathematics*, 2019, 36(1): 99–105.

[10] 孟晓玲, 王建军. 一类分数阶冠状动脉系统的混沌同步控制[J]. *山东大学学报(工学版)*, 2018, 48(4): 55–60.

MENG X L, WANG J J. Chaos synchronization of a class of fractional-order coronary artery systems [J]. *Journal of Shandong University (Engineering Science)*, 2018, 48(4): 55–60.

[11] 卢雪菁, 吴晓锋. 关于主-从混沌蔡氏电路系统滞后同步的若干新判据[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2018, 57(3): 76–84.

LU X J, WU X F. The novel criteria for lag synchronization of the master-slave chaotic Chua's circuits [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2018, 57(3): 76–84.

[12] 唐良瑞, 李静, 樊冰, 等. 新三维混沌系统及其电路仿真[J]. *物理学报*, 2009, 58(2): 785–793.

TANG L R, LI J, FAN B, et al. A new three-dimensional chaotic system and its circuit simulation [J]. *Acta Physics Sinica*, 2009, 58(2): 785–793.

[13] WOLF A, SWIFT J B, SWINNEY H L, et al. Determining Lyapunov exponents from a time series [J]. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 1985, 16(3): 285–317.

[14] 陈关荣, 吕金虎. Lorenz 系统族的动力学分析、控制与同步[M]. 北京: 科学出版社, 2003.

(责任编辑 冯兆永)

· 简讯 ·

本刊开设“名家风范”栏目

为配合中山大学“双一流”建设, 充分发挥学报的“学术窗口”作用, 本刊决定于 2020 年第 1 期起开设“名家风范”栏目。栏目拟围绕中山大学学科建设布局, 向广大读者、作者宣传和介绍本校著名学者(包括在中山大学工作或学习过的学者), 活跃办刊学术气氛。栏目力求在简明扼要报道学者们的学习工作经历外, 充分展示学者们的主要学术研究成果, 着重报道学者们最新的学术研究消息与进展, 展现学术研究的最前沿。

中山大学学报(自然科学版)