

1:3 内共振条件下屈曲梁的准周期运动^{*}

肖龙江, 黄建亮
(中山大学航空航天学院, 广东 广州 510275)

摘 要: 针对前两阶对称模态存在 1:3 内共振的两端固支屈曲梁, 研究其在基础简谐激励作用下的非线性振动。利用 Galerkin 方法对屈曲梁的振动方程进行离散, 采用传统的单一时间尺度的增量谐波平衡 (IHB) 法追踪外激励振幅变化时屈曲梁的周期响应, 并用 Floquet 理论对解进行稳定性和分岔分析。研究表明, 由于存在 1:3 内共振, 随着外激励振幅的增加, 屈曲梁的反对称模态被激发, 继续增加外激励振幅, 周期解发生 Hopf 分岔, 演变为频谱图在外激励频率的整数倍附近存在等间距边频带的准周期运动。用两时间尺度的 IHB 法研究准周期运动, 所得结果与四阶 Runge-Kutta 法的数值结果吻合。

关键词: 屈曲梁; 内共振; 准周期运动; 等间距边频带; 两时间尺度增量谐波平衡法

中图分类号: O322 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2020) 01-0024-11

Quasi-periodic motion of a buckled beam with 1:3 internal resonance

XIAO Longjiang, HUANG Jianliang
(School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: This study investigates nonlinear dynamics of a fixed-fixed buckled beam with 1:3 internal resonance in the first two symmetric modes subject to uniform base harmonic excitation. The Galerkin method is employed to discretize the governing equation, the traditional incremental harmonic balance (IHB) method with single time scale is used to track periodic responses of the buckled beam, and the Floquet theory is used to analyze stability and bifurcation of the solution. It is found that the anti-symmetric modes can be excited with increasing the excitation amplitude due to 1:3 internal resonance, continuously increasing the excitation amplitude, Hopf bifurcation occurs which leads to quasi-periodic motion whose spectrum contains uniformly spaced sidebands around integer multiples of excitation frequency with increasing the excitation amplitude. The IHB method with two time-scales is used to investigate quasi-periodic motion, whose solutions are in good agreement with those from numerical integration using the fourth-order Runge-Kutta method.

Key words: buckled beam; internal resonance; quasi-periodic motion; uniformly spaced sidebands; incremental harmonic balance method with two time-scales

准周期运动是指系统的振动响应中含有多个不可约频率的运动^[1]。当外激励的频率之间不可公度或系统的多个模态之间存在内共振时将会产生准周期运动。准周期运动的存在会导致响应的振幅、频率和相位角随着时间连续变化, 使得能量在不同模态之间实时迁移, 导致结构的破坏^[2-4]。Afaneh 和 Ibrahim^[5]

* 收稿日期: 2019-02-28

基金项目: 国家自然科学基金 (11972381, 11572354); 广东省自然科学基金 (2016A030313328); 中央高校基本科研业务费专项基金 (18lgzd08)

作者简介: 肖龙江 (1994 年生), 男; 研究方向: 动力学与控制; E-mail: xiaolj3@mail2.sysu.edu.cn

通信作者: 黄建亮 (1977 年生), 男; 研究方向: 动力学与控制; E-mail: huangjl@mail.sysu.edu.cn

利用多尺度法分析了 1:1 内共振条件下两端固支屈曲梁的前两阶振动响应, 发现在该条件下屈曲梁可能存在准周期响应。Kreider 和 Nayfeh^[6]通过实验发现, 在前两阶模态存在 1:1 内共振条件下, 两端固支屈曲梁会产生频谱图中存在等间距边频带的准周期运动, Emam 和 Nayfeh^[7]采用数值计算方法验证了上述实验结果。Lau 等^[8-9]把增量谐波平衡法和多时间尺度法结合起来, 用于计算系统的准周期运动。Huang 和 Zhu^[10-11]改进了 Lau 等^[8-9]的方法, 用两时间尺度的增量谐波平衡法研究了一端固定一端简支的弯曲梁的准周期运动。在国内, 袁铭鸿等^[12]研究了耦合系统的准周期运动, 从他们得到的准周期运动的频谱图中可以观察到等间距的边频带。张丹伟等^[13]用两个时间尺度的 IHB 法研究了外激励频率不可公约时非线性系统的准周期运动。李小彭等^[14]通过数值计算分析了多自由度内共振系统的准周期运动。

本文研究了在基础简谐激励作用下, 前两阶对称模态存在 1:3 内共振的两端固支屈曲梁的非线性振动。先通过 Galerkin 方法对梁的振动方程进行离散, 然后将传统的单一时间尺度的增量谐波平衡和 Floquet 理论^[15-16]相结合, 分析外激励振幅变化时振动方程的周期响应及其稳定性的变化。当梁的周期响应发生 Hopf 分岔演变为准周期响应时, 采用两时间尺度的 IHB 法研究准周期响应, 并验证结果的准确性。

1 两端固支屈曲梁的振动方程

振动台以基础谐波形式 $Y(\tilde{t}) = Y_0 \cos \tilde{\omega} \tilde{t}$ 运动, 两端固支在振动台上的屈曲梁相对于振动台做横向振动, 如图 1 所示。以振动台为参考系, 作用在屈曲梁单位长度上的基础简谐激励为

$$-\rho \frac{\partial^2 Y(\tilde{t})}{\partial \tilde{t}^2} = \rho Y_0 \tilde{\omega}^2 \cos(\tilde{\omega} \tilde{t}) = \rho g \gamma \cos(\tilde{\omega} \tilde{t}) \quad (1)$$

其中, ρ 是梁单位长度的质量, $\tilde{t}$ 为时间, Y_0 和 $\tilde{\omega}$ 分别为振动台运动的振幅和圆频率, $\rho g \gamma$ 为外激励的振幅, g 为重力加速度, γ 为激振参数, 其值反映了外激励振幅的大小。

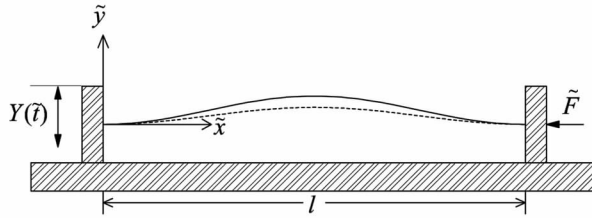


图 1 基础简谐激励作用下的两端固支屈曲梁简图

Fig. 1 Schematic of a fixed-fixed buckled subject to base harmonic excitation

在此基础谐波激励作用下, 由哈密顿原理可求得屈曲梁的振动方程为

$$\rho \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tilde{t}^2} + EI \frac{\partial^4 \tilde{y}}{\partial \tilde{x}^4} + \tilde{F} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tilde{x}^2} + \tilde{c} \frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{t}} - \frac{EA}{2l} \frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial \tilde{x}^2} \int_0^l \left(\frac{\partial \tilde{y}}{\partial \tilde{x}} \right)^2 d\tilde{x} = \rho g \gamma \cos(\tilde{\omega} \tilde{t}) \quad (2)$$

其中, $\tilde{y}(\tilde{x}, \tilde{t})$ 是梁在位置 $\tilde{x}$ 和时刻 $\tilde{t}$ 的横向位移, E 为杨氏模量, A 和 I 分别为梁截面的横截面积和惯性矩, l 为梁的长度, $\tilde{F}$ 为轴向力, $\tilde{c}$ 为阻尼系数。对于两端固支屈曲梁, 其边界条件为

$$\tilde{y}(0, t) = \tilde{y}(l, t) = 0, \quad \frac{\partial \tilde{y}(0, t)}{\partial \tilde{x}} = \frac{\partial \tilde{y}(l, t)}{\partial \tilde{x}} = 0 \quad (3)$$

对方程进行无量纲化, 令

$$y = \frac{\tilde{y}}{l}, \quad x = \frac{\tilde{x}}{l}, \quad t = \tilde{t} \sqrt{\frac{EI}{\rho l^4}}, \quad \omega = \tilde{\omega} \sqrt{\frac{\rho l^4}{EI}} \quad (4)$$

带入方程和边界条件中可得

$$\ddot{y} + y'''' + Fy'' + cy' - \varepsilon y'' \int_0^1 y'^2 dx = \gamma a \cos(\omega t) \quad (5)$$

$$y(0, t) = y(1, t) = y'(0, t) = y'(1, t) = 0 \quad (6)$$

其中, 点和撇分别表示对时间和空间求导, 且

$$F = \frac{\tilde{F}l^2}{EI}, \quad \varepsilon = \frac{Al^2}{2I}, \quad c = \frac{\tilde{c}l^2}{\sqrt{\rho EI}}, \quad a = \frac{\rho gl^3}{EI} \quad (7)$$

为了求出静态屈曲函数 $v(x)$, 舍去方程 (5) 和 (6) 中的时间相关项和外激励项可得

$$v'''' + Fv'' - \varepsilon v'' \int_0^1 v'^2 dx = 0 \quad (8)$$

$$v(0) = v(1) = v'(0) = v'(1) = 0 \quad (9)$$

对于给定的屈曲函数 $v(x)$, $\int_0^1 v'^2 dx$ 为常数, 方程可按常系数微分方程求解, 满足边界条件的静态屈曲函数可设为

$$v(x) = \frac{b}{2}(1 - \cos(2\pi x)) \quad (10)$$

其中, b 为无量纲化跨中挠度。把方程 (10) 带入方程 (8) 中可解得

$$b = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2(F - 4\pi^2)}{\varepsilon}} \quad (11)$$

令方程的解为

$$y(x, t) = u(x, t) + v(x) \quad (12)$$

带入方程 (5) 及边界条件 (6) 可得

$$\ddot{u} + u'''' + 4\pi^2 u'' + c\dot{u} - \varepsilon(u + v)'' \int_0^1 (u'^2 + 2u'v') dx = \gamma a \cos(\omega t) \quad (13)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = u'(0, t) = u'(1, t) = 0 \quad (14)$$

用文献 [17] 中的方法求解两端固支屈曲梁的固有频率和模态函数^[17-18]。舍去方程中的非线性项、阻尼项和外激励项, 可得到方程所对应的线性化自由振动方程, 令方程的解为

$$u_j = \Phi_j(x) \cos \overline{\omega}_j t \quad (15)$$

由此可得

$$\Phi_j'''' + 4\pi^2 \Phi_j'' - \overline{\omega}_j^2 \Phi_j - 2\varepsilon v'' \int_0^1 \Phi_j' v' dx = 0 \quad (16)$$

$$\Phi_j(0) = \Phi_j(1) = \Phi_j'(0) = \Phi_j'(1) = 0 \quad (17)$$

方程 (16) 的通解为

$$\begin{aligned} \Phi_j = & c_1 \sin \lambda_j x + c_2 \cos \lambda_j x + c_3 \sinh \mu_j x \\ & + c_4 \cosh \mu_j x + c_5 \cos 2\pi x \end{aligned} \quad (18)$$

其中,

$$\lambda_j^2 = \sqrt{4\pi^4 + \overline{\omega}_j^2} + 2\pi^2, \quad \mu_j^2 = \sqrt{4\pi^4 + \overline{\omega}_j^2} - 2\pi^2 \quad (19)$$

把式 (18) 带入方程 (16) 及边界条件 (17) 中, 可得到关于 $c_i (i = 1 \sim 5)$ 的 5 个方程, 为使方程有非零解, 其系数行列式必须等于 0, 由此可解得梁振动的各阶固有频率 $\overline{\omega}_j$, 将其带入关于 $c_i (i = 1 \sim 5)$ 的方程, 并令

$$\int_0^1 \Phi_j^2 dx = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (20)$$

可得各阶固有频率所对应的模态函数 Φ_j , 各阶模态函数满足条件

$$\int_0^1 \Phi_i \Phi_j dx = \delta_{ij} \quad (21)$$

其中, δ_{ij} 为狄拉克函数。用 Galerkin 方法求解方程, 为此令

$$u = \sum_{j=1}^n \Phi_j(x) q_j(t) \quad (22)$$

将式 (22) 带入方程 (13), 在方程两边左乘 $\Phi_i(x)$, 并对方程两边从 0 到 1 对 x 积分, 可得

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i + \overline{\omega}_i^2 q_i + \xi_i \overline{\omega}_i \dot{q}_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \bar{k}_{ijk}^{(2)} q_j q_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n \bar{k}_{ijkl}^{(3)} q_j q_k q_l \\ = \gamma f_i \cos(\omega t), \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (23)$$

其中,

$$\begin{aligned} \bar{k}_{ijk}^{(2)} &= -2\pi^2 \varepsilon b \int_0^1 \cos 2\pi x \Phi_i dx \int_0^1 \Phi'_j \Phi'_k dx - 2\pi \varepsilon b \int_0^1 \Phi_i \Phi''_j dx \int_0^1 \sin 2\pi x \Phi'_k dx \\ \bar{k}_{ijkl}^{(3)} &= -\varepsilon \int_0^1 \Phi_i \Phi''_j dx \int_0^1 \Phi'_k \Phi'_l dx, \\ f_i &= \int_0^1 a \Phi_i dx, \quad \xi_i \overline{\omega}_i = c \end{aligned} \quad (24)$$

取

$$\xi_i = \xi, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (25)$$

ξ 为无量纲化模态阻尼系数, 令

$$\begin{aligned} k_{ijk}^{(2)} &= k_{ikj}^{(2)} = \frac{1}{2}(\bar{k}_{ijk}^{(2)} + \bar{k}_{ikj}^{(2)}), \\ k_{ijkl}^{(3)} &= k_{ijlk}^{(3)} = k_{ikjl}^{(3)} = k_{iljk}^{(3)} = k_{ilkj}^{(3)} = k_{ilkj}^{(3)} \\ &= \frac{1}{6}(\bar{k}_{ijkl}^{(3)} + \bar{k}_{ijlk}^{(3)} + \bar{k}_{ikjl}^{(3)} + \bar{k}_{iklj}^{(3)} + \bar{k}_{iljk}^{(3)} + \bar{k}_{ilkj}^{(3)}) \end{aligned} \quad (26)$$

可将方程 (23) 化为

$$\begin{aligned} \ddot{q}_i + \overline{\omega}_i^2 q_i + \xi \overline{\omega}_i \dot{q}_i + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n k_{ijk}^{(2)} q_j q_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n k_{ijkl}^{(3)} q_j q_k q_l \\ = \gamma f_i \cos(\omega t), \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (27)$$

2 两个时间尺度的 IHB 法

用两个新的无量纲时间变量

$$\tau_1 = \omega t, \quad \tau_2 = \omega_d t \quad (28)$$

代替变量 t , 因此 $q_i(t)$ 变为变量 τ_1 和 τ_2 的函数。

$$q_i(t) = q_i(\omega t, \omega_d t) = q_i(\tau_1, \tau_2) \quad (29)$$

由此可得到

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} &= \omega \frac{\partial}{\partial \tau_1} + \omega_d \frac{\partial}{\partial \tau_2}, \\ \frac{d^2}{dt^2} &= \omega^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} + 2\omega\omega_d \frac{\partial^2}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} + \omega_d^2 \frac{\partial^2}{\partial \tau_2^2} \end{aligned} \quad (30)$$

把式 (28)、(29)、(30) 带入式 (27) 可得

$$\begin{aligned} \omega^2 \frac{\partial^2 q_i}{\partial \tau_1^2} + 2\omega\omega_d \frac{\partial^2 q_i}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} + \omega_d^2 \frac{\partial^2 q_i}{\partial \tau_2^2} + \xi \overline{\omega}_i \omega \frac{\partial q_i}{\partial \tau_1} + \xi \overline{\omega}_i \omega_d \frac{\partial q_i}{\partial \tau_2} + \overline{\omega}_i^2 q_i \\ + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n k_{ijk}^{(2)} q_j q_k + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n k_{ijkl}^{(3)} q_j q_k q_l \\ = \gamma f_i \cos \tau_1, \quad i = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (31)$$

式 (31) 可以写为矩阵形式

$$\begin{aligned} \left(\omega^2 \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial \tau_1^2} + 2\omega\omega_d \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} + \omega_d^2 \frac{\partial^2 \mathbf{q}}{\partial \tau_2^2} \right) + \mathbf{C} \left(\omega \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau_1} + \omega_d \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial \tau_2} \right) \\ + (\mathbf{K} + \mathbf{K}^{(2)} + \mathbf{K}^{(3)}) \mathbf{q} = \gamma \mathbf{F} \cos \tau_1 \end{aligned} \quad (32)$$

其中, $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$, $\mathbf{C} = \text{diag}(\xi \overline{\omega}_1, \xi \overline{\omega}_2, \dots, \xi \overline{\omega}_n)$, $\mathbf{F} = [f_1, f_2, \dots, f_n]^T$, $\mathbf{K} = \text{diag}(\overline{\omega}_1^2, \overline{\omega}_2^2, \dots, \overline{\omega}_n^2)$ 。 $\mathbf{K}^{(2)}$ 和 $\mathbf{K}^{(3)}$ 的元素分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{ij}^{(2)} &= \sum_{k=1}^n k_{ijk}^{(2)} q_k, \\ \mathbf{K}_{ij}^{(3)} &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n k_{ijkl}^{(3)} q_k q_l \end{aligned} \quad (33)$$

两时间尺度 IHB 法的第一步是增量过程。令 q_0 、 ω_{d0} 和 γ_0 表示一个振动状态，其邻近振动状态以增量形式表示为

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &= \mathbf{q}_0 + \Delta \mathbf{q}, \\ \omega_d &= \omega_{d0} + \Delta \omega_d, \\ \gamma &= \gamma_0 + \Delta \gamma \end{aligned} \quad (34)$$

其中， $\mathbf{q}_0 = [q_{10}, q_{20}, \dots, q_{n0}]^T$ ， $\Delta \mathbf{q} = [\Delta q_1, \Delta q_2, \dots, \Delta q_n]^T$ 。把式 (34) 带入式 (32)，并且略去高于一阶的小量，可得

$$\begin{aligned} &\left(\omega^2 \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{q}}{\partial \tau_1^2} + 2\omega \omega_{d0} \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{q}}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} + \omega_{d0}^2 \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{q}}{\partial \tau_2^2} \right) + \mathbf{C} \left(\omega \frac{\partial \Delta \mathbf{q}}{\partial \tau_1} + \omega_{d0} \frac{\partial \Delta \mathbf{q}}{\partial \tau_2} \right) + (\mathbf{K} + 2\tilde{\mathbf{K}}^{(2)} + 3\tilde{\mathbf{K}}^{(3)}) \Delta \mathbf{q} \\ &= \mathbf{R} - \left(2\omega \frac{\partial^2 \mathbf{q}_0}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} + 2\omega_{d0} \frac{\partial^2 \mathbf{q}_0}{\partial \tau_1^2} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial \tau_2} \right) \Delta \omega_d + \Delta \gamma \mathbf{F} \cos \tau_1 \end{aligned} \quad (35)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{ij}^{(2)} &= \sum_{k=1}^n k_{ijk}^{(2)} q_{k0}, \\ \tilde{\mathbf{K}}_{ij}^{(3)} &= \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n k_{ijkl}^{(3)} q_{k0} q_{l0} \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \gamma_0 \mathbf{F} \cos \tau_1 - \left[\omega^2 \frac{\partial^2 \mathbf{q}_0}{\partial \tau_1^2} + 2\omega \omega_{d0} \frac{\partial^2 \mathbf{q}_0}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} \right. \\ &\quad \left. + \omega_{d0}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{q}_0}{\partial \tau_2^2} + \mathbf{C} \left(\omega \frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial \tau_1} + \omega_{d0} \frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial \tau_2} \right) + (\mathbf{K} + \tilde{\mathbf{K}}^{(2)} + \tilde{\mathbf{K}}^{(3)}) \mathbf{q}_0 \right] \end{aligned} \quad (37)$$

$\mathbf{R}$ 是误差向量。当 $\mathbf{q}_0$ 、 ω_{d0} 和 γ_0 是方程 (32) 的准确解时， $\mathbf{R} = 0$ 。

两时间尺度的 IHB 法的第二步是谐波平衡过程。因为准周期运动的频谱图在载波频率（频率的整数倍）的周围存在着等间距的边频带，所以可以用 Galerkin 方法把 q_{i0} 展开为多重 Fourier 级数。

$$\begin{aligned} q_{i0} &= \sum_{i_2=0}^{n_f} a_{0i_2}^i \cos(i_2 \tau_2) + \sum_{i_2=1}^{n_f} a_{0i_2}^i \sin(i_2 \tau_2) \\ &\quad + \sum_{i_1=1}^{n_c} \sum_{i_2=-n_f}^{n_f} [a_{i_1 i_2}^i \cos(i_1 \tau_1 + i_2 \tau_2)] \\ &\quad + \sum_{i_1=1}^{n_s} \sum_{i_2=-n_f}^{n_f} [b_{i_1 i_2}^i \sin(i_1 \tau_1 + i_2 \tau_2)] \\ &= \mathbf{C}_s \cdot \mathbf{A}_i \end{aligned} \quad (38)$$

其中， n_c 和 n_s 分别为载波频率的余弦项项数和正弦项项数， n_f 是一个载波频率左侧或右侧所携带的边频带频率的数目，同时

$$\mathbf{C}_s = [\mathbf{C}_0 \ \mathbf{C}_1 \ \mathbf{C}_2 \ \dots \ \mathbf{C}_{n_c} \ \mathbf{S}_0 \ \mathbf{S}_1 \ \dots \ \mathbf{S}_{n_s}] \quad (39)$$

$$\mathbf{A}_i = [\mathbf{A}_0^i \ \mathbf{A}_1^i \ \mathbf{A}_2^i \ \dots \ \mathbf{A}_{n_c}^i \ \mathbf{B}_0^i \ \mathbf{B}_1^i \ \mathbf{B}_2^i \ \dots \ \mathbf{B}_{n_s}^i] \quad (40)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_0 &= [1 \cos \tau_2 \ \dots \ \cos n_f \tau_2]_{n_f+1}, \\ \mathbf{S}_0 &= [\sin \tau_2 \ \sin 2\tau_2 \ \dots \ \sin n_f \tau_2]_{n_f}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\mathbf{C}_{i_1} = [\cos(i_1 \tau_1 - n_f \tau_2) \ \dots \ \cos i_1 \tau_1 \ \dots \ \cos(i_1 \tau_1 + n_f \tau_2)]_{2n_f+1}, i_1 = 1, 2, \dots, n_c \quad (42)$$

$$\mathbf{S}_{i_1} = [\sin(i_1 \tau_1 - n_f \tau_2) \ \dots \ \sin i_1 \tau_1 \ \dots \ \sin(i_1 \tau_1 + n_f \tau_2)]_{2n_f+1}, i_1 = 1, 2, \dots, n_s \quad (43)$$

$$\mathbf{A}^0 = [a_{00}^i \ a_{01}^i \ \dots \ a_{0n_f}^i]_{n_f+1}, \quad (44)$$

$$\mathbf{B}^0 = [b_{01}^i \ b_{02}^i \ \dots \ b_{0n_f}^i]_{n_f},$$

$$\mathbf{A}_{i_1}^i = [a_{i_1-n_f}^i \cdots a_{i_1}^i 0 \cdots a_{i_1 n_f}^i]_{2n_f+1}, i_1 = 1, 2, \cdots, n_c \quad (45)$$

$$\mathbf{B}_{i_1}^i = [b_{i_1-n_f}^i \cdots b_{i_1}^i 0 \cdots b_{i_1 n_f}^i]_{2n_f+1}, i_1 = 1, 2, \cdots, n_s \quad (46)$$

把增量 Δq_i 也展开为多重 Fourier 级数

$$\Delta q_i = \mathbf{C}_s \cdot \Delta \mathbf{A}_i \quad (47)$$

其中,

$$\Delta \mathbf{A}_i = [\Delta \mathbf{A}_0^i \Delta \mathbf{A}_1^i \Delta \mathbf{A}_2^i \cdots \Delta \mathbf{A}_{nc}^i \Delta \mathbf{B}_0^i \Delta \mathbf{B}_1^i \Delta \mathbf{B}_2^i \cdots \Delta \mathbf{B}_{ns}^i]$$

由此可得

$$\mathbf{q}_0 = \mathbf{S} \mathbf{A}, \quad \Delta \mathbf{q} = \mathbf{S} \Delta \mathbf{A} \quad (48)$$

其中, $\mathbf{S} = \text{diag}(\mathbf{C}_s, \mathbf{C}_s, \cdots, \mathbf{C}_s)$, $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1 \mathbf{A}_2 \cdots \mathbf{A}_n]^T$, $\Delta \mathbf{A} = [\Delta \mathbf{A}_1 \Delta \mathbf{A}_2 \cdots \Delta \mathbf{A}_n]^T$ 。

对式 (35) 运用 Galerkin 平均过程可得

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\Delta \mathbf{q})^T \left[\left(\omega^2 \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{q}}{\partial \tau_1^2} + 2\omega \omega_{d0} \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{q}}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} + \omega_{d0}^2 \frac{\partial^2 \Delta \mathbf{q}}{\partial \tau_2^2} \right) \right. \\ & \quad \left. + \mathbf{C} \left(\omega \frac{\partial \Delta \mathbf{q}}{\partial \tau_1} + \omega_{d0} \frac{\partial \Delta \mathbf{q}}{\partial \tau_2} \right) + (\mathbf{K} + 2\tilde{\mathbf{K}}^{(2)} + 3\tilde{\mathbf{K}}^{(3)}) \Delta \mathbf{q} \right] d\tau_1 d\tau_2 \\ & = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \delta(\Delta \mathbf{q})^T \left[\mathbf{R} - \left(2\omega \frac{\partial^2 \mathbf{q}_0}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} + 2\omega_{d0} \frac{\partial^2 \mathbf{q}_0}{\partial \tau_1^2} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{q}_0}{\partial \tau_2} \right) \Delta \omega_d + \Delta \gamma \mathbf{F} \cos \tau_1 \right] d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (49)$$

把式 (48) 带入式 (49) 可以产生关于变量 $\Delta \mathbf{A}$ 、 $\Delta \omega_d$ 和 $\Delta \gamma$ 的线性方程

$$\mathbf{K}_A \Delta \mathbf{A} = \bar{\mathbf{R}} - \bar{\mathbf{R}}_d \Delta \omega_d + \bar{\mathbf{F}} \Delta \gamma \quad (50)$$

其中

$$\mathbf{K}_A = \bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{K}} + 2\bar{\mathbf{K}}^{(2)} + 3\bar{\mathbf{K}}^{(3)} \quad (51)$$

$$\bar{\mathbf{R}} = \gamma_0 \bar{\mathbf{F}} - [\bar{\mathbf{M}} + \bar{\mathbf{C}} + \bar{\mathbf{K}} + \bar{\mathbf{K}}^{(2)} + \bar{\mathbf{K}}^{(3)}] \mathbf{A} \quad (52)$$

$$\bar{\mathbf{R}}_d = 2\mathbf{R}_d \mathbf{A} \quad (53)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \left(\omega^2 \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial \tau_1^2} + 2\omega \omega_{d0} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} + \omega_{d0}^2 \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial \tau_2^2} \right) d\tau_1 d\tau_2, \\ \bar{\mathbf{C}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \mathbf{C} \left(\omega \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tau_1} + \omega_{d0} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tau_2} \right) d\tau_1 d\tau_2, \\ \bar{\mathbf{K}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \mathbf{K} \mathbf{S} d\tau_1 d\tau_2, \\ \bar{\mathbf{K}}^{(2)} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{K}}^{(2)} \mathbf{S} d\tau_1 d\tau_2, \\ \bar{\mathbf{K}}^{(3)} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \tilde{\mathbf{K}}^{(3)} \mathbf{S} d\tau_1 d\tau_2, \\ \bar{\mathbf{F}} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \mathbf{F} \cos \tau_1 d\tau_1 d\tau_2, \\ \mathbf{R}_d &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{S}^T \left[\left(\omega \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial \tau_1 \partial \tau_2} + \omega_{d0} \frac{\partial^2 \mathbf{S}}{\partial \tau_2^2} \right) + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \tau_2} \right] d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (54)$$

方程 (50) 的未知数数量比方程数量多 2, 在计算时应先指定两个增量作为控制变量。由于 $\Delta \omega_d$ 无法预先得知, 因此应该在向量 $\Delta \mathbf{A}$ 中指定两个增量作为控制变量 (为了得到准周期解, 两个增量不能都是载波频率对应的谐波系数), 指定控制变量后, 先令两个增量为 0, 由式 (50) 可求解得到 $\Delta \omega_d$ 、 $\Delta \gamma$ 以及 $\Delta \mathbf{A}$ 中除了控制变量之外的其他量。把各增量加到原来的解上得到新解, 判断新解是否能使误差向量 $\mathbf{R}$ 的模小于给定精度 (在本文中, 精度为 1.0×10^{-10}); 如果不能, 把新解带入式 (50), 重复上述过程, 不断循环直至找到符合精度要求的解。之后, 给控制变量加上给定的增量, 使循环得以更新, 重复上一循环, 计算出新情况下的解。

3 计算结果与分析

本文以文献[6] 中 Kreider 和 Nayfeh 实验所用的梁为计算模型。其梁长 27.922 cm, 宽 1.270 cm, 厚

0.508 mm, 杨氏模量为 206.843 GPa, 密度为 7 805.733 kg/m³, 取式中模态阻尼系数 ξ 为 0.04。两端固支屈曲梁的反对称模态固有频率不会因屈曲程度不同而变化, 对称模态的固有频率则会随着屈曲程度的增加而增加^[6, 17]。当式中跨中挠度 $b = 0.002\ 62$ 时, 梁的前四阶固有频率 $\bar{\omega}_j (j = 1 \sim 4)$ 分别为 37.233、44.363、111.249、182.118。此时, $3\bar{\omega}_1 \approx \bar{\omega}_3$, 第一模态和第三模态之间存在 1:3 内共振。在此条件下, 固定基础简谐激励的频率 $\omega = 37$, 接近梁的第一阶固有频率。研究屈曲梁的动力响应随激振参数 γ 的变化。

为了准确反映屈曲梁非线性振动的特性, 需要选取足够多的模态数量对振动方程进行 Galerkin 离散。Emam 和 Nayfeh^[7, 19] 的计算表明, 对于两端固支屈曲梁, 选取前四阶模态进行计算是必要的。本文选取前四阶模态进行计算。

取 $n_c = n_s = 5$, $n_f = 0$, $\Delta\omega_d = 0$ 带入式 (50) 可得传统的单一时间尺度的 IHB 法, 以 $\Delta\gamma$ 为增量可计算出周期响应。把周期解的形式由式 (38) 变为

$$q_i = a_{00}^i + A_{10}^i \cos(\tau_1 + \Omega_{10}^i) + A_{20}^i \cos(2\tau_1 + \Omega_{20}^i) + \cdots + A_{50}^i \cos(5\tau_1 + \Omega_{50}^i), \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (55)$$

其中

$$A_{i0}^i = \sqrt{a_{i1}^i 0 + b_{i10}^i}, \quad \Omega_{i0}^i = \tan^{-1}(b_{i10}^i / a_{i10}^i) \quad (56)$$

由于

$$\int_0^1 \Phi_{2j} dx = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, n \quad (57)$$

基础谐波激励只加载在梁的对称模态而未加载在反对称模态上。因此在外激励振幅较小时, 系统的反对称模态并未被激发。直至 γ 增加到 0.22 时, 由于第一和第三模态之间存在 1:3 内共振, 能量向反对称模态转移, 反对称模态被激发, 被激发的反对称模态和对称模态所含的频率成分相同。继续增加 r 值, 追踪反对称模态被激发之后的周期响应, 并用 Floquet 理论分析周期解的稳定性。可以发现在 $r \in [0.27, 0.67]$ 时, 周期解不稳定, Floquet 乘子中有一对复共轭特征值与单位圆相交。因此, 在这一段内周期解发生 Hopf 分岔, 演变为准周期解, 如图 2 所示。

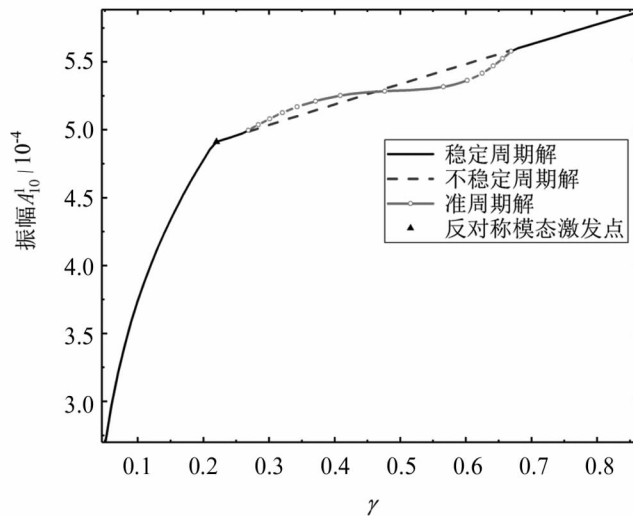


图 2 $\omega = 37$, $b = 0.002\ 62$ 时的振幅响应曲线

Fig. 2 Amplitude response curves while $\omega = 37$, $b = 0.002\ 62$

为了追踪系统的准周期解, 取 $n_c = n_s = 5$, $n_f = 2$ 带入式 (50), 选取 Δa_{10}^1 与 Δb_{11}^2 作为控制变量, 计算得到的准周期解的形式由式 (38) 变为

$$q_i = a_{00}^i + \sum_{i_2=1}^2 A_{0i_2}^i \cos(i_2 \tau_2 + \Omega_{0i_2}^i) + \sum_{i_1=1}^5 \sum_{i_2=-2}^2 [A_{i_1 i_2}^i \cos(i_1 \tau_1 + i_2 \tau_2 + \Omega_{i_1 i_2}^i)], \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (58)$$

其中

$$A_{i_1 i_2}^i = \sqrt{a_{i_1 i_2}^i + b_{i_1 i_2}^i},$$
$$\Omega_{i_1 i_2}^i = \tan^{-1}(b_{i_1 i_2}^i/a_{i_1 i_2}^i)$$

(59)

由此, 可计算得到准周期响应曲线, 如图 2 所示。准周期运动频谱图的边频带间隔 ω_d 的值也随之计算出来。在本例中, 随着 γ 的增加, 边频带间隔 ω_d 逐渐增加, 如图 3 所示。

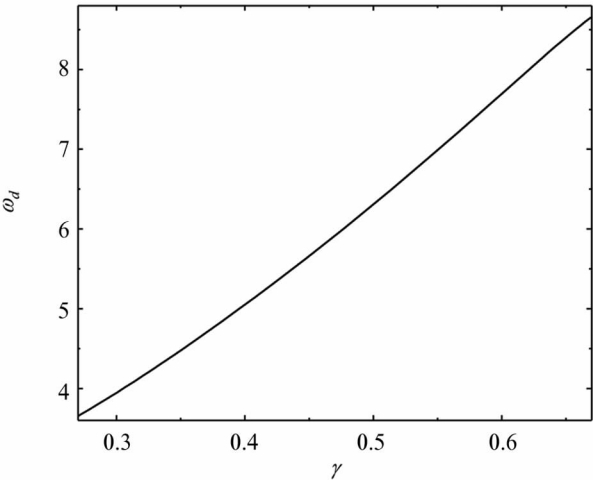


图 3 屈曲梁的准周期响应中 ω_d 随 γ 的变化

Fig. 3 Variation of ω_d with γ in the quasi-periodic responses of buckled beam

以 $\gamma = 0.27$ 时的准周期解为例进行进一步的探究, 其第一模态的频谱图如图 4 所示。从图中可以看出, 在载波频率 (频率 ω 的整数倍) 周围, 存在着等间距的边频带, 相邻两个边频带的间隔为 $\omega_d \approx 3.65$ 。 ω 与 ω_d 的比值是一个无理数, 正是这两个频率不可公约导致系统的响应变为准周期运动, 使它的时间历程图表现出明显的“拍现象”, 如图 5 所示。从图 5 还可以看出用 IHB 法得到的时间历程图与用四阶 Runge-Kutta (RK) 法的数值结果完全重合。为了进一步验证两时间尺度的 IHB 法的准确性, 图 6 和图 7 分别比较了用两时间尺度的 IHB 法和四阶 Runge-Kutta 法得到的准周期运动的相图和庞加莱截面图, 结果也是完全一致的。从图 7 可以看出, 准周期运动的庞加莱截面图是一条封闭曲线。

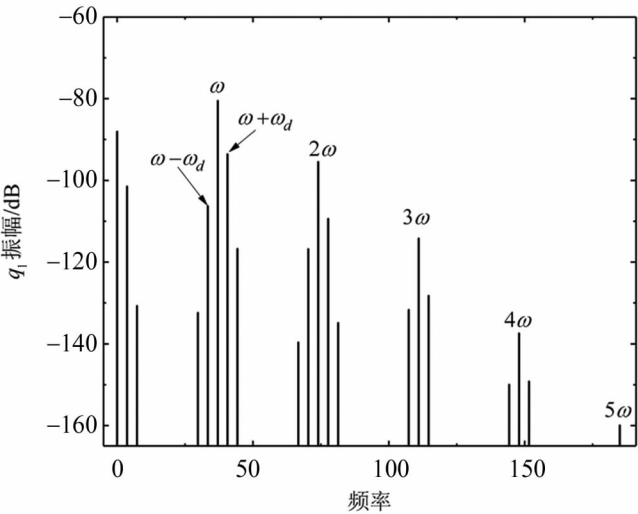


图 4 $\omega = 37, b = 0.002\ 62, \gamma = 0.27$ 时 q_1 的频谱图

Fig. 4 Spectrum of q_1 while $\omega = 37, b = 0.002\ 62, \gamma = 0.27$

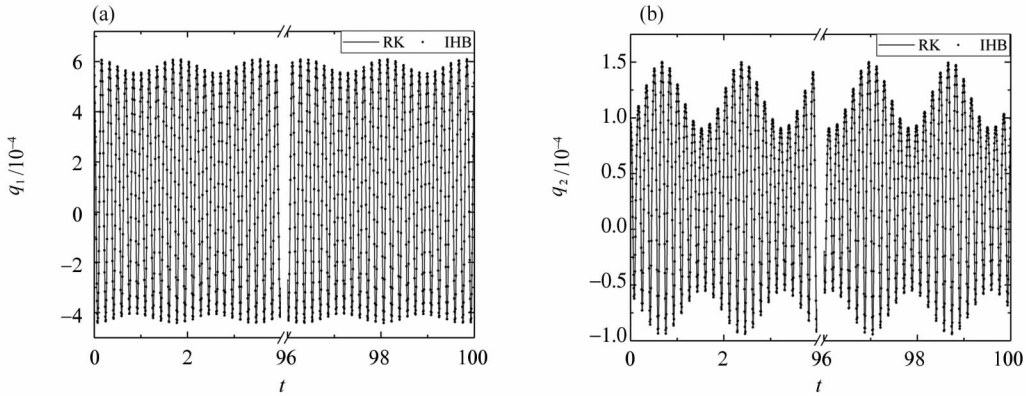


图 5 $\omega = 37, b = 0.002\ 62, \gamma = 0.27$ 时准周期响应的时间历程图
Fig. 5 Time histories of the quasi-periodic response while $\omega = 37, b = 0.002\ 62, \gamma = 0.27$

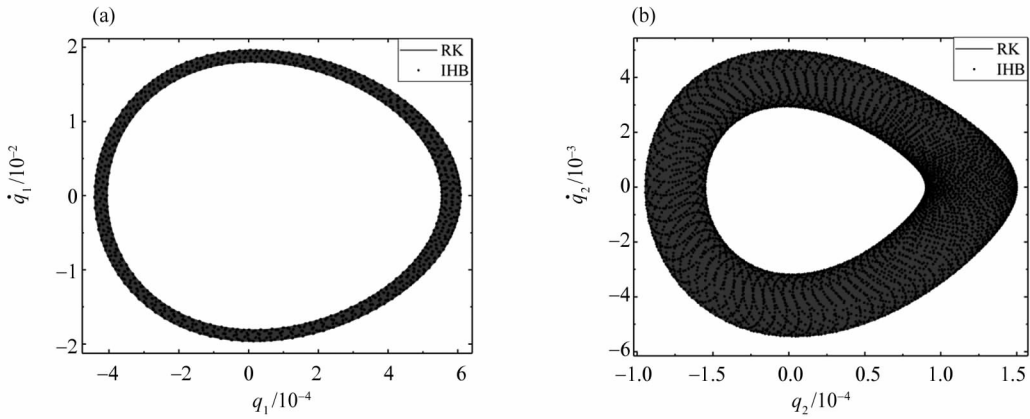


图 6 $\omega = 37, b = 0.002\ 62, \gamma = 0.27$ 时准周期响应的相图
Fig. 6 Phase plane portraits of the quasi-periodic response while $\omega = 37, b = 0.002\ 62, \gamma = 0.27$

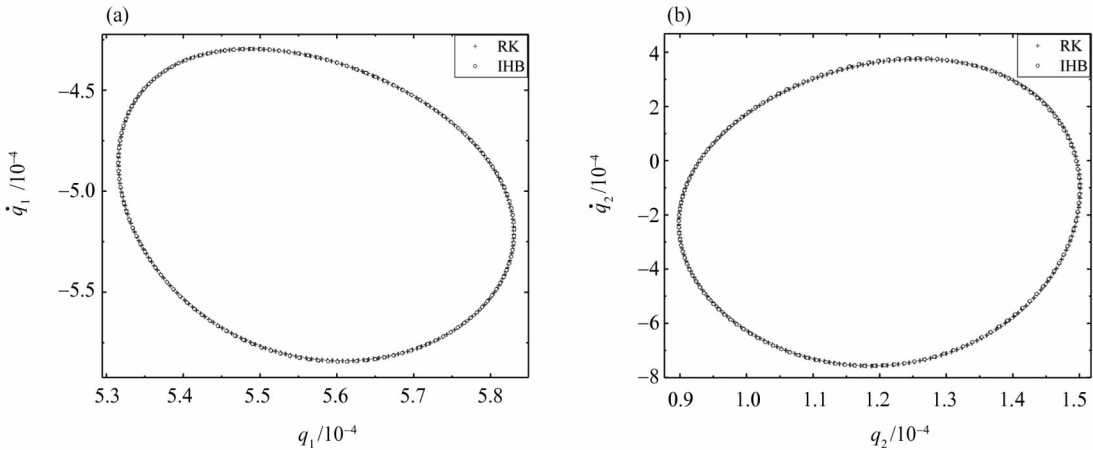


图 7 $\omega = 37, b = 0.002\ 62, \gamma = 0.27$ 时准周期响应的庞加莱截面图
Fig. 7 Poincaré sections of the quasi-periodic response while $\omega = 37, b = 0.002\ 62, \gamma = 0.27$

4 结 论

本文用多时间尺度法与 IHB 法相结合, 得到了适用于求解系统的准周期运动的两时间尺度的 IHB 法。对于前两阶对称模态存在 1:3 内共振的两端固支屈曲梁, 当作用在其上的基础简谐激励的振幅处于一定范围内时, 系统的周期响应会发生 Hopf 分岔, 演变为准周期响应。文中用两时间尺度的 IHB 得到了屈曲梁的准周期响应曲线图, 同时比较了两时间尺度的 IHB 法和四阶 Runge-Kutta 法所得到的结果。对比结果表明, 两时间尺度的 IHB 法有较高的精度, 适用于解决频谱图中存在的等间距边频带的准周期运动。

参考文献:

- [1] NEZAM S M R M, MCGEEHAN J E, WILLNER A E. Degree-of-polarization-based PMD monitoring for subcarrier-multiplexed signals via equalized carrier/sideband filtering[J]. *Journal of Lightwave Technology*, 2004, 22(4): 1078 – 1085.
- [2] 孟璐, 刘影, 黄彪, 等. 绕弹性水翼非定常空化流激振动特性研究[J]. *工程力学*, 2017, 34(8): 232 – 240.
MENG L, LIU Y, HUANG B, et al. Investigation of flow-induced vibration characteristics of flexible hydrofoil in unsteady cavitation[J]. *Engineering Mechanics*, 2017, 34(8): 232 – 240.
- [3] 时素果, 王国玉, 袁海涛, 等. 绕三维水翼非定常空化流动结构的数值与实验研究[J]. *工程力学*, 2012, 29(8): 346 – 353.
SHI S G, WANG G Y, YAN H T, et al. The investigation of unsteady cavitation flow structure around a three-dimensional hydrofoil by numerical and experimental methods[J]. *Engineering Mechanics*, 2012, 29(8): 346 – 353.
- [4] 田冰, 王裕宜. 基于功率谱分析的蒋家沟泥石流侵蚀输沙量准周期的探讨[J]. *水土保持研究*, 2012, 19(4): 244 – 246.
TIAN B, WANG Y Y. Power spectral analysis on periodicity of sediment transport in debris flow in Jiangjiagou watershed[J]. *Research of Soil and Water Conservation*, 2012, 19(4): 244 – 246.
- [5] AFANEH A A, IBRAHIM R A. Nonlinear response of an initially buckled beam with 1:1 internal resonance to sinusoidal excitation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 1993, 4(6): 547 – 571.
- [6] KREIDER W, NAYFEH A H. Experimental investigation of single-mode responses in a fixed-fixed buckled beam[J]. *Nonlinear Dynamics*, 1998, 15(2): 155 – 177.
- [7] EMAM S A, NAYFEH A H. On the nonlinear dynamics of a buckled beam subjected to a primary-resonance excitation[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2004, 35(1): 1 – 17.
- [8] LAU S L, CHEUNG Y K. Incremental Hamilton's principle with multiple time scales for nonlinear aperiodic vibrations of shells[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1986, 53(2): 465 – 466.
- [9] LAU S L, CHEUNG Y K, WU S Y. Incremental harmonic balance method with multiple time scales for aperiodic vibration of nonlinear systems[J]. *Journal of Applied Mechanics*, 1983, 50(4A): 871 – 876.
- [10] HUANG J L, ZHU W D. An incremental harmonic balance method with two timescales for quasiperiodic motion of nonlinear systems whose spectrum contains uniformly spaced sideband frequencies[J]. *Nonlinear Dynamics*, 2017, 90(2): 1015 – 1033.
- [11] HUANG J L, ZHU W D. A new incremental harmonic balance method with two time scales for quasi-periodic motions of an axially moving beam with internal resonance under single-tone external excitation[J]. *Journal of Vibration and Acoustics*, 2017, 139(2): 0210102.
- [12] 袁铭鸿, 童水光, 从飞云, 等. 复杂转子-轴承-汽封耦合系统的非线性振动分析[J]. *振动与冲击*, 2016, 35(9): 66 – 73.
YUAN M H, TONG S G, CONG F Y, et al. Vibration analysis of a nonlinear rotor-bearing-seal system [J]. *Journal of Vibration and Shock*, 2016, 35(9): 66 – 73.
- [13] 张丹伟, 刘济科, 黄建亮. 非线性系统准周期振动的多时间尺度 IHB 法[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2018, 57(6): 63 – 70.
ZHANG D W, LIU J K, HUANG J L. The IHB method with multiple time scales for quasi-periodic motions of nonlinear systems

[J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni,2018,57(6):63 – 70.

[14] 李小彭,安镛锤,李加胜. 多自由度内共振系统的非线性动力学行为分析[J]. 中国工程机械学报,2016,14(3):187 – 192.

LI X P,AN L C,LI J S. Analysis on nonlinear dynamical behaviors via multi-DOF internal resonance system [J]. Chinese Journal of Construction Machinery,2016,14(3):187 – 192.

[15] KARLI I D,CAJI M,ADHIKARI S. Dynamic stability of a nonlinear multiple-nanobeam system[J]. Nonlinear Dynamics, 2018,93(3):1495 – 1517.

[16] HUANG J L,SU R K L, LEE R Y Y,et al. Various bifurcation phenomena in a nonlinear curved beam subjected to base harmonic excitation[J]. International Journal of Bifurcation and Chaos,2018,28(7):1830023.

[17] NAYFEH A H,KREIDER W,ANDERSON T J. Investigation of natural frequencies and mode shapes of buckled beams[J]. AIAA Journal,1995,33(6):1121 – 1126.

[18] NAYFEHA H,EMAM S A. Exact solution and stability of postbuckling configurations of beams[J]. Nonlinear Dynamics, 2008,54(4):395 – 408.

[19] EMAM S A,NAYFEH A H. Nonlinear responses of buckled beams to subharmonic-resonance excitations[J]. Nonlinear Dynamics,2004,35(2):105 – 122.

(责任编辑 王海蓉)