

# 基于稀疏正则化的稳态热源识别\*

潘天成, 吕中荣, 汪利  
(中山大学航空航天学院, 广东 广州 510006)

**摘要:** 热源识别属于热传导反问题, 目的在于识别热源的空间位置和强度, 及时掌握实际工程结构的热源属性。热源问题一般具有非适定性, 即当测量数据不够充分时, 识别结果对测量噪声十分敏感。为克服非适定性, 需要引入额外的约束条件。考虑点热源在空间上呈现稀疏性的特点, 提出了一种新的基于稀疏正则化的点热源识别方法。考虑测量噪声的存在, 通过罚函数将测量数据以弱形式施加到目标函数。接着, 采用交替优化方法对温度和热源两个分离的变量进行迭代求解, 并提出了一种快速确定正则化参数的阈值法。二维薄板稳态热传导数值算例表明, 该方法能快速准确地识别热源的位置和强度, 并且具有较好的抗噪性。

**关键词:** 热源识别; 稀疏正则化; 交替优化法; 正则化参数; 阈值法

**中图分类号:** TB12   **文献标志码:** A   **文章编号:** 0529-6579(2020)01-0043-07

## Steady-state heat source identification based on sparse regularization

PAN Tiancheng, LV Zhongrong, WANG Li

(School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510006, China)

**Abstract:** The heat source identification problem that aims to identify the spatial locations and strengths of point heat sources and know well about the heat source properties of actual engineering structure in time belongs to the field of Inverse Heat Conduction Problem (IHCP). The heat source identification problem is generally ill-posed, that is, the identified results are very sensitive to the measurement noise when the measured data is insufficient. In order to overcome the ill-posedness, additional constraints need to be introduced. In this paper, a novel point heat source identification approach based on sparse regularization is proposed where the sparsity of point heat sources in space is mainly considered. Due to the existence of measurement noise, a weak enforcement of measured data through a penalty term is introduced into the objective function. Moreover, to well cooperate with the sparse regularization, the alternating minimization is used to iteratively solve the separated variables of temperature and heat source, and the threshold setting method is proposed to quickly and accurately find an appropriate regularization parameter. At last, a numerical example on a two-dimensional steady-state case shows that the proposed approach can quickly and accurately identified both the locations and the strengths of heat source and is insensitive to measurement noise.

**Key words:** heat source identification; sparse regularization; alternating minimization method; regularization parameter; threshold setting method

\* 收稿日期: 2019-02-21

基金项目: 国家自然科学基金(11702336; 11972380)

作者简介: 潘天成(1993年生), 男; 研究方向: 热源识别; E-mail: pantch@mail2.sysu.edu.cn

通信作者: 汪利(1988年生), 男; 研究方向: 计算力学; E-mail: wangli75@mail.sysu.edu.cn

在实际工程中,存在着许多热现象,及时监测结构系统的温度,识别热源的位置和强度,对整个热传导系统的安全监测和温度控制具有重要意义。例如,通过测量核反应堆外部的温度,从而得到其内壁温度,实时监测和控制整个反应的温度;在电路中容易产生局部的热源,识别热源的位置可以用于对电路进行检修;航天飞机在进入大气层时,经常会产生气动加热,航天器的局部结构产生热源,因此根据局部温度场来识别热源的位置和强度就显得尤为重要。热源识别属于热传导反问题的研究领域<sup>[1]</sup>,目的在于识别热源的位置和强度,及时掌握系统中热源的属性。研究表明,热源识别问题一般是非适定的<sup>[2]</sup>,导致识别结果对温度测量误差十分敏感。

实际上,热源识别的研究主要分为两类:一是给定热源的位置或者空间分布,识别热源的强度;二是同时识别热源的空间位置和强度。过去几十年,很多学者已经对热源识别问题做了大量的研究。为求解此类非适定问题, BECK 提出在最小二乘方程中添加正则化项求解,发展并使用了 Tikhonov 正则化方法。在一维的热传导问题中, BLACK WELL 提出了序列估计方法<sup>[3]</sup>。HUANG 等通过共轭梯度法来研究了一维和二维模型中的一个或两个点热源的强度识别问题<sup>[4]</sup>。但是由于算法迭代的特性,计算时间比较长。GENG 等采用变分迭代算法求得抛物型热方程无离散化问题的数值解并确定热源的强度<sup>[5]</sup>。NETO 等完成了矩形域内特定位置的线热源随时间变化的强度识别<sup>[6]</sup>。LI 等提出了一种并行蚁群的优化算法来识别二维域中的一个点热源<sup>[7]</sup>。第一类热源识别的研究工作比较多,但对于第二类热源的识别研究却十分有限。主要难点在于测量得到的温度与热源强度和位置之间呈复杂、难以显式表达的非线性关系,而且在有限元的框架下,测量数据量将小于未知参数数目,导致问题的严重非适定性。幸运的是,稀疏正则化可以很好地解决这一问题<sup>[8-9]</sup>。

本文将提出一种新的方法来研究热源识别第二类问题。考虑到点热源在空间上的分布是稀疏的,引入稀疏正则化<sup>[10-12]</sup>来对目标函数进行约束,并且采用交替优化方法<sup>[13]</sup>分别对温度和热源两个分离的变量进行迭代求解。在寻求正则化参数的过程中,提出了阈值法。本文所提算法能快速准确地识别热源位置和强度,这给实际工程的应用提供了一定的参考。

## 1 稀疏正则化目标函数建立

### 1.1 热传导问题有限元格式

考虑一个包含边界  $\partial\Omega$  的二维域  $\Omega$  的热传导问题,一般的控制方程为

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \right) \\ &+ Q(x,y,t), \\ x,y &\in \Omega, t \geq 0 \end{aligned} \quad (1)$$

其中,  $x,y$  是笛卡尔坐标,  $T$  为温度,  $\alpha$  为不随时间变化的热传导率,  $Q$  是热源项, 本文主要考虑为点热源的情形。

边界条件为

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} n_x + \alpha \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} n_y \\ = h(T_e(x,y,t) - T(x,y,t)) \end{aligned}$$

在  $\partial_q\Omega$  边界上  $T(x,y,t) = g(x,y,t)$ , 在  $\partial_r\Omega$  边界上

$$\begin{aligned} \partial_q\Omega \cup \partial_r\Omega &= \partial\Omega, \\ \partial_q\Omega \cap \partial_r\Omega &= \phi, \partial_r\Omega \neq \phi \end{aligned} \quad (2)$$

其中,  $n_x, n_y$  分别是二维域边界的法向方向余弦,  $h$  是对流换热系数,  $T_e(x,y,t)$  是周围的环境温度,  $\partial_r\Omega$  和  $\partial_q\Omega$  分别为本质边界和对流边界,  $g(x,y,t)$  是在本质边界  $\partial_r\Omega$  给定的温度分布。

初始条件为

$$T(x,y,0) = T_0(x,y) \quad (3)$$

其中,  $T_0(x,y)$  为二维域内的初始温度分布。

经过一段时间的热交换之后, 二维域  $\Omega$  内的温度将不会随着时间变化而变化, 温度分布达到稳态, 即  $\frac{\partial T(x,y,t)}{\partial t} = 0$ , 那么公式 (1) 则转换成稳态情况下的热传导问题。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \alpha \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \alpha \frac{\partial T(x,y,t)}{\partial y} \right) \\ + Q(x,y,t) = 0, \\ x,y \in \Omega, t \geq 0 \end{aligned} \quad (4)$$

有限元方法是求解热传导问题 (1) - (4) 的有效数值方法, 将二维域  $\Omega$  划分为有限个微小的单元  $d\Omega$ , 通过分段线性插值得到的有限元形函数, 可以将域内的温度用各节点的温度表示。那么, 稳态情况下的有限元格式如下:

$$\mathbf{K} \tilde{\mathbf{T}} = \mathbf{F} \quad (5)$$

其中,  $\mathbf{K}$  是热传导矩阵 (也称为温度刚度矩阵),

是一个  $n \times n$  的方阵,  $\tilde{\mathbf{T}} = [T_1, T_2 \cdots T_n]^T$  是温度列阵,  $\mathbf{F} = [Q_1, Q_2 \cdots Q_n]^T$  是点热源列阵。

### 1.2 建立目标函数

以  $S, U$  分别表示测量的节点和未测量的节点,  $\hat{\mathbf{T}}^S$  表示测量得到的温度数据。热源识别即从已知的结构信息  $\mathbf{K}$  和测量的温度  $\hat{\mathbf{T}}^S$ , 识别热源列阵  $\mathbf{F}$ 。因此, 一个新的稳态目标函数可以表示为非线性的最小二乘问题:

$$g(\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{F}) = \|\mathbf{F} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{T}}\|_2^2 \quad (6)$$

s. t.  $\tilde{\mathbf{T}}^S = \hat{\mathbf{T}}^S$

其中,  $\|\cdot\|_2$  表示向量的  $l_2$  范数,  $\tilde{\mathbf{T}}^S$  表示温度列阵对应于测量节点  $S$  的部分。公式 (6) 的条件是测量得到的温度数据  $\hat{\mathbf{T}}^S$  与实际上该节点的温度数据  $\tilde{\mathbf{T}}^S$  是一致的, 即严格满足约束条件  $\tilde{\mathbf{T}}^S = \hat{\mathbf{T}}^S$ 。显然, 在实际测量中, 总会存在测量噪声或者测量误差, 因此应对公式 (6) 进行改进, 添加一个测量温度的弱形式的罚项, 即

$$g_1(\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{F}) = \|\mathbf{F} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{T}}\|_2^2 + \beta f_b \|\hat{\mathbf{T}}^S - \tilde{\mathbf{T}}^S\|_2^2 \quad (7)$$

其中,  $\beta$  是一个权系数, 主要依据测量温度的噪声或误差来决定,  $\beta \rightarrow +\infty$  意味着测量得到的数据是严格施加的, 几乎没有测量噪声的存在;  $\beta \rightarrow 0$  意味着测量数据是完全不置信的,  $f_b$  是一个避免可能存在病态条件的标量数, 在本文中  $\tilde{\mathbf{T}}^S$  是数值模拟中计算得到的数据。

### 1.3 稀疏正则化

通常, 目标函数 (7) 是不适定的, 需引入额外的约束进行求解。考虑到点热源的位置在实际的空间上的分布是稀疏的, 即  $\mathbf{F}$  是一个稀疏的向量, 只有少数的元素不为 0, 因此, 在公式 (7) 添加稀疏约束项  $\|\mathbf{F}\|_p^p$ 。本文取  $p = 1$ , 约束项函数则为凸的, 使得最优解比较容易得到, 并且通常以罚项的形式添加到目标函数中:

$$g_\lambda(\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{F}) = \|\mathbf{F} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{T}}\|_2^2 + \beta f_b \|\hat{\mathbf{T}}^S - \tilde{\mathbf{T}}^S\|_2^2 + \lambda \|\mathbf{F}\|_1 \quad (8)$$

其中,  $\lambda \geq 0$  是一个正则化参数。至此, 基于稀疏正则化的有限元格式稳态热源识别目标函数已经建

立。

## 2 交替优化方法

### 2.1 交替优化方法求解目标函数

稳态目标函数 (8) 中温度  $\tilde{\mathbf{T}}$  和热源  $\mathbf{F}$  是两个相互分离的变量。因此, 可以采用交替优化方法<sup>[13]</sup>进行迭代求解。将初始的点热源设置为  $\mathbf{F}^{(0)} = 0$ , 识别过程分为两步: 温度恢复步和热源识别步。

**2.1.1 温度恢复步** 完整的温度数据从测量得到的温度中得到恢复。

$$(\tilde{\mathbf{T}}^{(k)}) = \operatorname{argmin} g_\lambda(\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{F}^{(k-1)}) \quad (9)$$

其中,  $k = 1, 2, \dots$ 。为了求解问题 (9), 对  $g_\lambda(\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{F}^{(k-1)})$  进行改写与重组, 如下

$$\begin{aligned} g_\lambda(\tilde{\mathbf{T}}, \mathbf{F}^{(k-1)}) &= \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{T}} - 2 \tilde{\mathbf{T}}^T \mathbf{B} \\ &\quad + (\mathbf{F}^{(k-1)})^T \mathbf{F}^{(k-1)} \\ &\quad + \beta f_b \|\hat{\mathbf{T}}^S - \tilde{\mathbf{T}}^S\|_2^2 \\ &\quad + \lambda \|\mathbf{F}^{(k-1)}\|_1 \\ &= \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{T}}^S \\ \tilde{\mathbf{T}}^U \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{SS} + \beta f_b \mathbf{I} & (\mathbf{A}^{US})^T \\ \mathbf{A}^{US} & \mathbf{A}^{UU} \end{pmatrix} \\ &\quad \cdot \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{T}}^S \\ \tilde{\mathbf{T}}^U \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{T}}^S \\ \tilde{\mathbf{T}}^U \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{B}^S + \beta f_b \hat{\mathbf{T}}^S \\ \mathbf{B}^U \end{pmatrix} \\ &\quad + (\mathbf{F}^{(k-1)})^T \mathbf{F}^{(k-1)} \\ &\quad + \beta f_b (\hat{\mathbf{T}}^S)^T \hat{\mathbf{T}}^S \\ &\quad + \lambda \|\mathbf{F}^{(k-1)}\|_1 \\ \mathbf{A} &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{SS} & (\mathbf{A}^{US})^T \\ \mathbf{A}^{US} & \mathbf{A}^{UU} \end{pmatrix} = \mathbf{K}^T \mathbf{K}, \\ \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} \mathbf{B}^S \\ \mathbf{B}^U \end{pmatrix} = \mathbf{K}^T \mathbf{F}^{(k-1)} \end{aligned} \quad (10)$$

其中, 公式 (10) 中的上标  $S$  和  $U$  分别对应测量的节点和未测量的节点, 上标  $US$  对应耦合的部分,  $\mathbf{I}$  是一个单位矩阵。因此可以得到公式 (9) 的解, 如下

$$\begin{pmatrix} (\tilde{\mathbf{T}}^S)^{(k)} \\ (\tilde{\mathbf{T}}^U)^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{SS} + \beta f_b \mathbf{I} & (\mathbf{A}^{US})^T \\ \mathbf{A}^{US} & \mathbf{A}^{UU} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{B}^S + \beta f_b \hat{\mathbf{T}}^S \\ \mathbf{B}^U \end{pmatrix} \quad (11)$$

### 2.1.2 热源识别步

从恢复得到的完整温度数据中识别热源位置和

强度, 如下

$$(\mathbf{F}^{(k)}) = \operatorname{argmin}_{\mathbf{F}} g_{\lambda}(\tilde{\mathbf{T}}^{(k)}, \mathbf{F}) \quad (12)$$

热源识别步在迭代的过程中, 会对热源列阵进行更新, 可将  $g_{\lambda}(\tilde{\mathbf{T}}^{(k)}, \mathbf{F})$  以另一种形式表示, 如下

$$\begin{aligned} g_{\lambda}(\tilde{\mathbf{T}}^{(k)}, \mathbf{F}) &= \|\mathbf{F} - \mathbf{K}\tilde{\mathbf{T}}^{(k)}\|_2^2 + \beta f_b \|\hat{\mathbf{T}}^s - \tilde{\mathbf{T}}^s\|_2^2 \\ &\quad + \lambda \|\mathbf{F}\|_1 \\ &= \sum_{j=1}^n ((Q_j - a_j)^2 + \lambda |Q_j|) + c \\ a_j &= (\mathbf{K}\tilde{\mathbf{T}}^{(k)})_j, \\ c &= \beta f_b \|\hat{\mathbf{T}}^s - \tilde{\mathbf{T}}^s\|_2^2 \end{aligned} \quad (13)$$

其中,  $(\nu)_j$  表示向量  $\nu$  的第  $j$  个分量。显然, 问题 (13) 是具有显式解。因此, 热源识别步, 即公式 (12) 的解为

$$\begin{aligned} Q_j^{(k)} &= \operatorname{argmin}_{Q_j} ((Q_j - a_j)^2 + \lambda |Q_j|) \\ &= f^m(\lambda; a_j) = \begin{cases} a_j - \lambda/2, & \lambda < 2a_j \\ a_j + \lambda/2, & \lambda < -2a_j \\ 0, & \lambda > 2|a_j| \end{cases} \end{aligned} \quad (14)$$

可以发现, 公式 (14) 容易得到稀疏正则化目标函数的最优解, 而且目标函数是解耦的, 无需迭代。进一步的研究表明, 稀疏正则化参数  $\lambda$  可能会对热源的强度识别造成一定的偏差, 因此应避免, 本文对公式 (14) 进行了修正, 消除  $\lambda$  对识别的热源强度的影响。

$$\begin{aligned} Q_j^{(k)} &= \operatorname{argmin}_{Q_j} ((Q_j - a_j)^2 + \lambda |Q_j|) \\ &= f^m(\lambda; a_j) \\ &= \begin{cases} a_j, & \lambda < 2|a_j| \\ 0, & \lambda \leq 2|a_j| \end{cases} \end{aligned} \quad (15)$$

关于  $\lambda$  的选取将在接下来进行讨论。

## 2.2 阈值法寻求正则化参数

在执行每一热源识别步之前, 都必须选取一个合适的正则化参数。根据公式 (15), 可选取一个阈值集  $\tau$ 。

$$\tau = \{\lambda_{jcr} = 2|a_j|, j = 1, 2, \dots, n\} \quad (16)$$

当  $\lambda \geq \lambda_{jcr}$  时, 公式 (15) 的解为 0, 即表示在第  $j$  个节点内部没有点热源存在;  $\lambda < \lambda_{jcr}$  时, 结果表明点热源在相应的节点内部。将阈值集进行降序排序

$$\tau = \{\tilde{\lambda}_{1cr} \geq \tilde{\lambda}_{2cr} \geq \dots \geq \lambda_{ncr}\} \quad (17)$$

那么就可以通过阈值法来选取一个正则化参数, 基本算法如图 1 所示。其中,  $l_{\max}$  和  $\gamma$  是两个阈值参数,  $l_{\max}$  表示点热源存在的最大个数;  $\gamma$  是一个判别比, 通常在  $l_{\max}$  比较小的情况下, 取值较大。

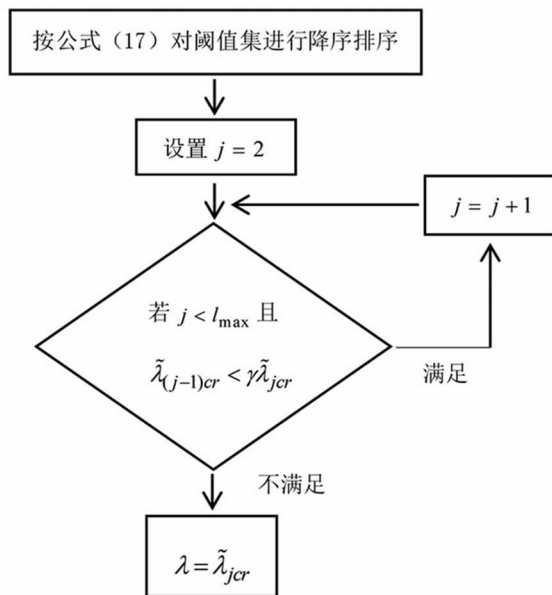


图 1 阈值法确定正则化参数流程图

Fig. 1 The flow chart for determining regularization parameters by threshold setting method

## 3 数值算例

### 3.1 模型建立

本文考虑一个二维稳态的数值算例。通常, 测量的温度是从有限元模拟并添加一定的噪声得到。在稳态情况下, 噪声施加下

$$\hat{T}_j = T_j \cdot (1 + \varepsilon \cdot r), j = 1, 2, \dots, n \quad (18)$$

其中,  $T_j$  是从公式 (5) 求得的在第  $j$  个节点的温度数据。  $\varepsilon$  是噪声水平, 一般为 0%、2%、5% 等等。  $r$  是一个标准正态分布的随机数。

如图 1 所示, 薄板为铝合金材料, 长和宽均为 0.5 m, 密度  $\rho = 2787 \text{ kg/m}^3$ , 比热容  $c = 883 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)}$ , 热传导率  $\alpha = 194 \text{ W/(m} \cdot \text{°C)}$ , 对流换热系数  $h = 10 \text{ W/(m}^2 \cdot \text{K)}$ , 环境温度为  $0 \text{ °C}$ , 一个或多个热源在薄板的内部。每个热源的面积为  $0.004 \text{ m} \times 0.004 \text{ m}$ , 相对于板的面积是非常小的, 因此可以看作是点热源。

薄板的有限元单元和节点信息, 如图 2 所示。

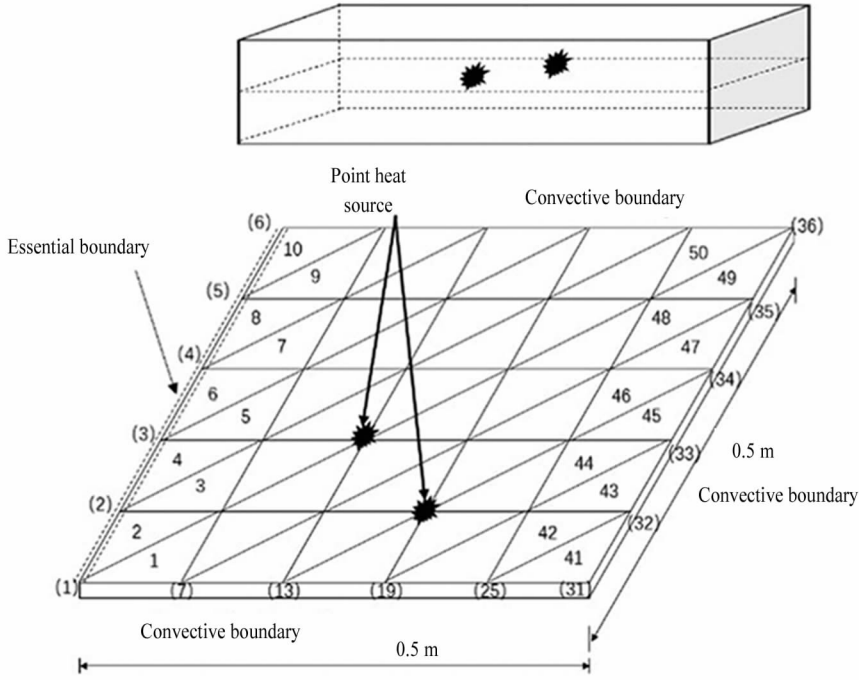


图 2 二维稳态模型图

Fig. 2 Two-dimensional steady-state model

考虑以下几种工况, 来验证所提方法的有效性和准确性, 热源的强度  $Q_{15} = 1.2 \times 10^6 \text{ W/m}^2$ ,  $Q_{20} = 1.0 \times 10^6 \text{ W/m}^2$ 。

表 1 二维稳态识别的四种工况

Table 1 Four scenarios for two-dimensional steady-state identification

工况	测量节点	热源位置	噪声水平/%
1	8-36	20	0
2	8-36	20	2
3	8-36	15, 20	5
4	对流边界节点	20	2

### 3.2 热源识别结果

在识别表 1 四种工况的过程中, 考虑噪声的随机性, 进行蒙特卡洛 (monte carlo) 试验, 每种工况取 100 组数据进行研究, 最后取其均值和标准差作为识别结果。在算法实现过程中, 阈值法选取的参数分别为  $l_{\max} = 4, \gamma = 5, \beta = 1 \times 10^6$ ,  $f_b$  的值则在每一次迭代的过程中选取矩阵  $\mathbf{A}^{SS}$  的 2 范数, 即  $f_b = \text{norm}(\mathbf{A}^{SS})$ 。

四种工况稀疏正则化与无正则化的识别结果如图 3-6 所示, 每种工况第 20 节点内部的热源强度识别结果及相对误差如表 2 所示。在无噪声的情况下, 目标函数中有稀疏正则化与无正则化均能准确

识别热源的位置和强度, 无正则化识别的强度误差也为 0。当有噪声水平的时候, 稀疏正则化的识别结果明显比无正则化的结果要好, 而且能保证解的稀疏性, 而无正则化的时候不能保证。同时发现, 噪声水平的提高, 蒙特卡洛实验得到的热源识别标准差也会增大, 但不影响热源的定位。工况 4 表明, 仅通过边界点的测量, 本文所提方法也能准确定位结构内部的热源, 且识别的强度误差不大, 误差为 3.62%, 而无正则化的算法甚至无法准确定位。在测量数据量比较少的情况下, 稀疏正则化的优势明显地体现出来了。

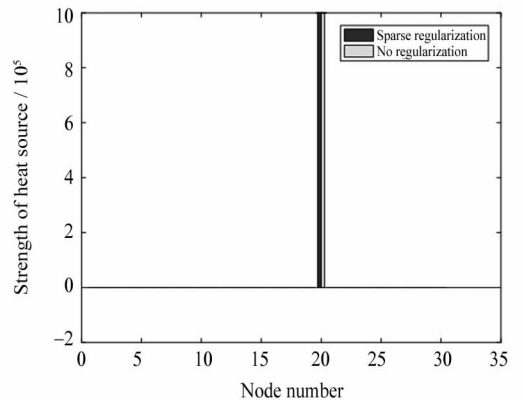


图 3 工况 1 有无稀疏正则化识别结果对比

Fig. 3 Identified results without and with regularization for scenario 1

表 2 第 20 节点热源强度识别结果  
Table 2 The identified results of heat source strength at 20th node

工况	真实值 ( $\times 10^6 \text{ W/m}^2$ )	识别值 ( $10^6 \text{ W/m}^2$ )		相对误差/%	
		稀疏正则化	无正则化	稀疏正则化	无正则化
1	10.00	10.00	10.00	0	0
2	10.00	9.959	9.880	0.41	1.2
3	10.00	10.08	8.907	0.8	10.93
4	10.00	9.638	1.483	3.62	85.17

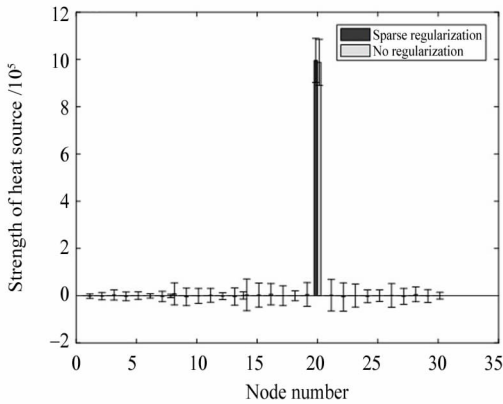


图 4 工况 2 有无稀疏正则化识别结果对比  
Fig. 4 Identified results without and with regularization for scenario 2

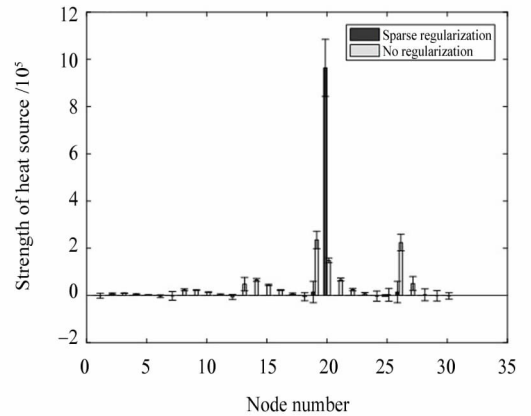


图 6 工况 4 有无稀疏正则化识别结果对比  
Fig. 6 Identified results without and with regularization for scenario 4

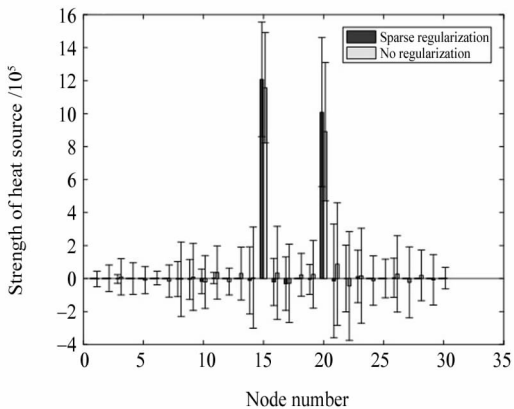


图 5 工况 3 有无稀疏正则化识别结果对比  
Fig. 5 Identified results without and with regularization for scenario 3

## 4 结 论

本文考虑到点热源在空间分布上的稀疏性, 将稀疏正则化与交替优化方法结合, 提出了一种新的热源识别方法, 很好地克服了热源识别非适应性的问题。数值算例的结果表明: 该方法能同时识别热源的位置和强度, 稀疏正则化能加强解的稀疏性, 具有较好的抗噪性, 并且交替优化方法的求解和阈值法寻求正则化参数使得识别快速准确, 甚至仅通过边界的测量也可识别内部的热源, 这给实际工程提供了一定的参考意义。

## 参考文献:

- [1] OZISIK M N, ORLANDE H, KASSAB A J. Inverse heat transfer: fundamentals and applications [J]. Applied & Environmental Microbiology, 2000, 74 (17): 5483 - 5489.
- [2] BECK J V, BLACKWELL B, ST CLAIR C R. Inverse heat conduction, Ill-Posed problems [M]. A Wiley-Interscience Publication, 1985.
- [3] BLACKWELL B F. Efficient technique for the numerical solution of the one-dimensional inverse problem of heat conduction [J]. Numerical Heat Transfer, 1981, 4(2): 229 - 238.
- [4] HUANG C H, OZISIK M N. Inverse problem of determining the unknown strength of an internal plane heat source [J]. Journal of the Franklin Institute, 1992, 329(4): 751 - 764.
- [5] GENG F, LIN Y. Application of the variational iteration method to inverse heat source problems [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2009, 58 (11/12): 2098 - 2102.
- [6] NETO A J S, OZISIK M N. Two-dimensional inverse heat conduction problem of estimating the time-varying strength of a line heat source [J]. Journal of Applied Physics, 1992, 71(11): 5357 - 5362.
- [7] LI B H, LU M, SHAN Y G, et al. Parallel ant colony optimization for the determination of a point heat source position in a 2-D domain [J]. Applied Thermal Engineering, 2015, 91:994 - 1002.
- [8] 张慧. 稀疏恢复与稀疏优化的  $l_1$  极小化理论及其计算 [D]. 长沙:国防科学技术大学, 2014.  
ZHANG H. Theory and computation of sparse recovery and sparse optimization via  $l_1$ -minimization [D]. Changsha: National University of Defense Technology, 2014.
- [9] 焦雨领. 稀疏约束下反问题理论与算法的研究 [D]. 武汉:武汉大学, 2014.  
JIAO Y L. Studies on inverse problem theory and algorithm with sparsity constraints [D]. Wuhan: Wuhan University, 2014.
- [10] YIN W, OSHER S, GOLDFARB D, et al. Bregman Iterative Algorithms for  $l_1$ -minimization with applications to Compressed Sensing [J]. Siam Journal on Imaging Sciences, 2008, 1(1): 143 - 168.
- [11] CAI J F, OSHER S, SHEN Z. Convergence of the linearized Bregman iteration for  $l_1$ -norm minimization [J]. Mathematics of Computation, 2009, 78(268): 2127 - 2136.
- [12] LI Y, OSHER S, TSAI R. Heat source identification based on  $l_1$  constrained minimization [J]. Inverse Problems and Imaging, 2014, 8(1): 199 - 221.
- [13] BECK A. On the convergence of alternating minimization for convex programming with applications to iteratively reweighted least squares and decomposition schemes [J]. SIAM Journal on Optimization, 2015, 25(1): 185 - 209.

(责任编辑 王海蓉)