第 59 卷　第 4 期　　中山大学学报（自然科学版）　　Vol. 59　No. 4
2020 年　7 月　　ACTA　SCIENTIARUM　NATURALIUM　UNIVERSITATIS　SUNYATSENI　　Jul.　2020

DOI：10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2019. 06. 25. 2019A050

非线性数学期望的一些性质研究*

黄安琪[1,2]，周津名[3]，纪荣林[2]
（1. 对外经济贸易大学国际经济贸易学院，北京 100029；
2. 安徽大学数学科学学院，安徽 合肥 230601；
3. 合肥师范学院数学与统计学院，安徽 合肥 230601）

摘　要：在公理化假设的基本框架下，建立了次线性期望（超线性期望）与一致性风险度量之间的对应关系。进一步地，在对非线性数学期望附加一定的连续性假设的条件下，建立了凸期望（凹期望）与凸风险度量之间的内在联系。

关键词：非线性数学期望；次线性期望；凸期望；一致性风险度量；凸风险度量

中图分类号：O211.67　**文献标志码：**A　**文章编号：**0529-6579（2020）04-0144-05

Some properties of nonlinear expectations

HUANG Anqi[1,2], *ZHOU Jinming*[3], *JI Ronglin*[2]
（1. School of International Trade and Economics, University of International Business and Economics, Beijing 100029, China；
2. School of Mathematical Sciences, Anhui University, Hefei 230601, China；
3. School of Mathematics and Statistics, Hefei Normal University, Hefei 230601, China）

Abstract：Under the axiomatic assumptions for nonlinear expectations and financial risk measures, the relation between sublinear expectations (Resp. superlinear expectations) and coherent risk measures is obtained, respectively. Furthermore, under a natural continuous assumption for the nonlinear expectations, the relationship between convex expectations (Resp. concave expectations) and convex risk measures is also established, respectively.

Key words：nonlinear expectation；sublinear expectation；convex expectation；coherent risk measure；convex risk measure

期望效用理论是现代数理经济学的基石，但是诺贝尔经济学奖获得者Allais所提出的著名的Allais悖论使得期望效用理论受到了很大的挑战。相关研究表明基于线性数学期望的线性性是导致Allais悖论的主要原因，由此学者们致力于在非线性数学期望框架下研究经济和金融问题。1990年，山东大学彭实戈院士原创性地获得了一般形式的非线性倒向随机微分方程解的存在唯一性结果[1]。进一步地，彭实戈院士通过一类特殊的倒向随机微分方程的解引入g-期望和条件g-期望的概念[2]。2002年，Coquet-Hu-Mémin-Peng提出了信息流相容的非线性数学期望的公理化定义，进而研究了该类非线性数学期望与g-期望之间的联系[3]。2008年，彭实戈院士在次线性期望框架下，研究了多维G-布朗运动及其相关问题[4]。关于非线性数学期望及其相关问题的研究请参阅文献［5-13］等。

---

* **收稿日期：**2019-06-25
基金项目：安徽大学博士科研启动（Y040418128）；安徽省高校自然科学研究（KJ2018A0496，KJ2019A0001）
作者简介：黄安琪（1998年生），女；**研究方向：**金融数学；**E-mail：**ahuhuangaq@163. com
通信作者：纪荣林（1984年生），男；**研究方向：**金融数学；**E-mail：**jironglin@ahu. edu. cn

为了克服金融风险度量工具VaR的先天性缺陷，Artzner-Delbaen-Eber-Heath [14] 通过公理化假设的方式开创性地引入了一致性风险度量的概念。随后，Föllmer-Schied [15] 和Frittelli-Rosazza Gianin [16] 分别独立地提出凸风险度量的概念。Rosazza Gianin [17] 将g-期望理论与公理化的风险度量理论建立了联系。进一步地，在g-期望理论基本框架下，Jiang [18] 系统性地建立了g-期望理论及其诱导的风险度量之间的内在联系。

受文献［18］研究启发，一个自然的问题是：在公理化假设的基本框架下，非线性数学期望与金融风险度量之间的内在联系如何？在文献［4］关于非线性数学期望的公理化框架下，本文致力于研究次线性期望（超线性期望）与一致性风险度量之间的对应关系；进一步地，探索凸期望（凹期望）与凸风险度量之间的内在联系。

1　预备知识

设(Ω, F, P)是完备的概率空间，记$L^1(\Omega, F, P)$为可积的随机变量全体。我们引入文献［4］中关于非线性数学期望的相关定义，如下：

定义 1　称实值泛函$\varepsilon: L^1(\Omega, F, P) \mapsto \mathbf{R}$为非线性数学期望，若其满足：

（i）保常数性：$\varepsilon[c] = c$，$\forall c \in \mathbf{R}$；

（ii）单调性：$\varepsilon[X] \geqslant \varepsilon[Y]$，若$X \geqslant Y$。

定义 2　称非线性数学期望ε为次线性期望，若其满足：

（i）次可加性：$\varepsilon[X+Y] \leqslant \varepsilon[X] + \varepsilon[Y]$；

（ii）正齐次性：$\varepsilon[\lambda X] = \lambda \varepsilon[X]$，$\forall \lambda \geqslant 0$。

类似地，根据文献［8，10］，我们引入超线性期望、凸期望和凹期望的公理化定义，如下：

定义 3　称非线性数学期望ε为超线性期望，若其满足：

（i）超可加性：$\varepsilon[X+Y] \geqslant \varepsilon[X] + \varepsilon[Y]$；

（ii）正齐次性：$\varepsilon[\lambda X] = \lambda \varepsilon[X]$，$\forall \lambda \geqslant 0$。

定义 4　称非线性数学期望ε为凸期望，若其满足：

凸性：$\varepsilon[\lambda X + (1-\lambda) Y] \leqslant \lambda \varepsilon[X] + (1-\lambda) \varepsilon[Y]$，$\forall \lambda \in [0,1]$。

定义 5　称非线性数学期望ε为凹期望，若其满足：

凹性：$\varepsilon[\lambda X + (1-\lambda) Y] \geqslant \lambda \varepsilon[X] + (1-\lambda) \varepsilon[Y]$，$\forall \lambda \in [0,1]$。

接下来，我们引入文献［17］中金融风险度量的相关公理化定义，如下：

定义 6　称$\rho: L^1(\Omega, F, P) \mapsto \mathbf{R}$为一致性风险度量，若其满足下述性质：

（i）单调性：若$X \geqslant Y$，则$\rho(X) \leqslant \rho(Y)$；

（ii）平移不变性：$\rho(X+c) = \rho(X) - c$，$\forall c \in \mathbf{R}$；

（iii）次可加性：$\rho(X+Y) \leqslant \rho(X) + \rho(Y)$；

（iv）正齐次性：$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$，$\forall \lambda \geqslant 0$。

定义 7　称$\rho: L^1(\Omega, F, P) \mapsto R$为凸风险度量，若其满足下述性质：

（i）单调性：若$X \geqslant Y$，则$\rho(X) \leqslant \rho(Y)$；

（ii）平移不变性：$\rho(X+c) = \rho(X) - c$，$\forall c \in \mathbf{R}$；

（iii）凸性：$\rho(\lambda X + (1-\lambda) Y) \leqslant \lambda \rho(X) + (1-\lambda) \rho(Y)$，$\forall \lambda \in [0,1]$；

（iv）标准化：$\rho(0) = 0$。

2　主要结果

定理 1　设ε为$L^1(\Omega, F, P)$空间上的实值泛函。令$\rho(X) = \varepsilon[-X]$，$X \in L^1(\Omega, F, P)$，则以下陈述等价：

（i）ε为次线性期望。

（ii）ρ为一致性风险度量。

证明 首先证明（i）⇒（ii）成立。设ε为次线性期望。我们验证ρ满足一致性风险度量的公理化条件。对任意的$X, Y \in L^1(\Omega, F, P)$，若$X \geqslant Y$，则$-X \leqslant -Y$。由$\varepsilon$的单调性立得$\varepsilon[-X] \leqslant \varepsilon[-Y]$，即$\rho(X) \leqslant \rho(Y)$。下证$\rho$满足平移不变性。事实上，对任意的$X \in L^1(\Omega, F, P)$，$c \in \mathbf{R}$，一方面，由$\varepsilon$的次可加性和保常数性可得

$$\varepsilon[X + c] \leqslant \varepsilon[X] + \varepsilon[c] = \varepsilon[X] + c$$

另一方面，由上式及ε的次可加性和保常数性，有

$$\varepsilon[X] = \varepsilon[X + c - c] \leqslant \varepsilon[X + c] + \varepsilon[-c] = \varepsilon[X + c] - c$$

从而

$$\varepsilon[X + c] \geqslant \varepsilon[X] + c$$

故对任意的$X \in L^1(\Omega, F, P)$，$c \in \mathbf{R}$，恒有

$$\varepsilon[X + c] = \varepsilon[X] + c$$

结合$\rho(X) = \varepsilon[-X]$，立得

$$\rho(X + c) = \varepsilon[-X - c] = \varepsilon[-X] - c = \rho(X) - c, \forall X \in L^1(\Omega, F, P), c \in \mathbf{R}$$

即ρ满足平移不变性。

对任意的$X, Y \in L^1(\Omega, F, P)$，由$\varepsilon$的次可加性可得

$$\rho(X + Y) = \varepsilon[-X - Y] \leqslant \varepsilon[-X] + \varepsilon[-Y] = \rho(X) + \rho(Y)$$

进一步地，对任意的$\lambda \geqslant 0$，由ε的正齐次性可知

$$\rho(\lambda X) = \varepsilon[-\lambda X] = \lambda\varepsilon[-X] = \lambda\rho(X)$$

综上，结合定义6，可得ρ为一致性风险度量。

接下来，证明（ii）⇒（i）成立。设ρ为一致性风险度量。由ρ的实值性及正齐次性，可得$\rho(0) = 0$。对任意的$X, Y \in L^1(\Omega, F, P)$，若$X \geqslant Y$，则$-X \leqslant -Y$。由$\rho$的单调性及$\rho(-X) = \varepsilon[X]$可得$\varepsilon[X] \geqslant \varepsilon[Y]$，即$\varepsilon$满足单调性条件。对任意的$c \in \mathbf{R}$，结合$\rho$的平移不变性和$\rho(0) = 0$可得

$$\varepsilon[c] = \rho(-c) = \rho(0 - c) = \rho(0 + (-c)) = \rho(0) - (-c) = c$$

即ε满足保常数性。进一步地，对任意的$X, Y \in L^1(\Omega, F, P)$，$\lambda \geqslant 0$，由$\rho$的次可加性和正齐次性，可知

$$\varepsilon[X + Y] = \rho(-X - Y) \leqslant \rho(-X) + \rho(-Y) = \varepsilon[X] + \varepsilon[Y],$$
$$\varepsilon[\lambda X] = \rho(-\lambda X) = \lambda\rho(-X) = \lambda\varepsilon[X]$$

即ε满足次可加性和正齐次性。综上，由定义2立得ε为次线性期望。

结合定义3，类似于定理1的证明，我们有下述结论。

定理2 设ε为$L^1(\Omega, F, P)$空间上的实值泛函。令$\rho(X) = -\varepsilon[X]$，$X \in L^1(\Omega, F, P)$，则以下陈述等价：

（i）ε为超线性期望；

（ii）ρ为一致性风险度量。

接下来，我们探索凸期望和凸风险度量之间的内在联系，相关结论如下：

定理3 设ε为$L^1(\Omega, F, P)$空间上的实值泛函。令$\rho(X) = \varepsilon[-X]$，$X \in L^1(\Omega, F, P)$，则

（i）若ρ为凸风险度量，则ε为凸期望；

（ii）若ε为凸期望且$\varepsilon\left[\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)X + c\right] \to \varepsilon[X + c]$，$\forall X \in L^1(\Omega, F, P)$，$c \in \mathbf{R}$，则$\rho$为凸风险度量。

证明 首先证明（i）成立。设ρ为凸风险度量。对任意的$X, Y \in L^1(\Omega, F, P)$，若$X \geqslant Y$，则由$\rho$的单调性知$\rho(-X) \geqslant \rho(-Y)$。结合$\rho(-X) = \varepsilon[X]$可知，泛函$\varepsilon$满足单调性条件。由$\rho$的平移不变性及标准化条件知，

$$\varepsilon[c] = \rho(-c) = \rho(0 + (-c)) = \rho(0) - (-c) = c, \forall c \in \mathbf{R}$$

即ε满足保常数性。下证ε满足凸性条件。事实上，对任意的$X, Y \in L^1(\Omega, F, P)$，$\alpha \in [0, 1]$，由$\rho$的凸性知

$$\varepsilon[\alpha X + (1 - \alpha)Y] = \rho(\alpha(-X) + (1 - \alpha)(-Y)) \leqslant \alpha\rho((-X)) + (1 - \alpha)\rho((-Y)) = \alpha\varepsilon[X] + (1 - \alpha)\varepsilon[Y]$$

综上，结合定义4立得ε为凸期望。

接下来，证明（ii）成立。设 ε 为凸期望且 $\varepsilon[(1-\frac{1}{n})X+c]\to\varepsilon[X+c]$，$\forall X\in L^1(\Omega,F,P)$，$c\in\mathbf{R}$。对任意的 $X,Y\in L^1(\Omega,F,P)$，若 $X\geqslant Y$，则 $-X\leqslant -Y$。由 ε 的单调性立得 $\varepsilon[-X]\leqslant\varepsilon[-Y]$，从而 $\rho(X)\leqslant\rho(Y)$，即 ρ 满足单调性条件。由 $\rho(X)=\varepsilon[-X]$ 及 ε 的保常数性知，$\rho(0)=\varepsilon[0]=0$，即 ρ 满足标准化条件。进一步地，我们说明 ρ 满足凸性条件。事实上，对任意的 $X,Y\in L^1(\Omega,F,P)$，$\alpha\in[0,1]$，由 ε 的凸性知

$$\rho(\alpha X+(1-\alpha)Y)=\varepsilon[\alpha(-X)+(1-\alpha)(-Y)]\leqslant\alpha\varepsilon[-X]+(1-\alpha)\varepsilon[-Y]=\alpha\rho(X)+(1-\alpha)\rho(Y)$$

最后，我们验证 ρ 满足平移不变性条件。对任意的 $X\in L^1(\Omega,F,P)$，$c\in\mathbf{R}$，对每一个自然数 n，由 ε 的凸性和保常数性知

$$\begin{aligned}\varepsilon\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)X+c\right]&=\varepsilon\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)X+\frac{1}{n}(nc)\right]\\&\leqslant\left(1-\frac{1}{n}\right)\varepsilon[X]+\frac{1}{n}\varepsilon[nc]\\&=\left(1-\frac{1}{n}\right)\varepsilon[X]+\frac{1}{n}\times nc\\&=\left(1-\frac{1}{n}\right)\varepsilon[X]+c\end{aligned}$$

注意到 $\varepsilon\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)X+c\right]\to\varepsilon[X+c]$，$\forall X\in L^1(\Omega,F,P)$，$c\in\mathbf{R}$。令 $n\to\infty$，对上式两边取极限，可得

$$\varepsilon[X+c]\leqslant\varepsilon[X]+c,\forall X\in L^1(\Omega,F,P),c\in\mathbf{R}$$

进而结合 ε 的保常数性，得

$$\varepsilon[X]=\varepsilon[X+c-c]\leqslant\varepsilon[X+c]+\varepsilon[-c]=\varepsilon[X+c]-c,\forall X\in L^1(\Omega,F,P),c\in\mathbf{R}$$

故

$$\varepsilon[X+c]=\varepsilon[X]+c,\forall X\in L^1(\Omega,F,P),c\in\mathbf{R}$$

从而恒有

$$\rho(X+c)=\varepsilon[-X-c]=\varepsilon[-X]-c=\rho(X)-c,\forall X\in L^1(\Omega,F,P),c\in\mathbf{R}$$

故 ρ 满足平移不变性。综上，由定义7立得 ρ 为凸风险度量。

结合定义5，类似于定理3的证明，我们有下述结论。

定理4 设 ε 为 $L^1(\Omega,F,P)$ 空间上的实值泛函。令 $\rho(X)=-\varepsilon[X]$，$X\in L^1(\Omega,F,P)$，则

（i）若 ρ 为凸风险度量，则 ε 为凹期望；

（ii）若 ε 为凹期望且 $\varepsilon\left[\left(1-\frac{1}{n}\right)X+c\right]\to\varepsilon[X+c]$，$\forall X\in L^1(\Omega,F,P)$，$c\in\mathbf{R}$，则 ρ 为凸风险度量。

参考文献：

［1］ PARDOUX E，PENG S G. Adapted solution of a backward stochastic differential equation［J］. Systems Control Letters，1990，14：55-61.

［2］ PENG S G. BSDE and related g-expectation［J］. in：N El Karoui，L Mazliak（Eds.），Backward Stochastic Differential Equations，in：Pitman Res Notes Math Ser，1997，364：141-159.

［3］ COQUET F，HU Y，MÉMIN J，et al. Filtration consistent nonlinear expectations and related g-expectations［J］. Probability Theory and Related Fields，2002，123：1-27.

［4］ PENG S G. Multi-dimensional G-Brownian motion and related stochastic calculus under G-expectation［J］. Stochastic Processes and their Applications，2008，118：2223-2253.

［5］ CHEN Z J，EPSTEIN L. Ambiguity，risk and asset returns in continuous time［J］. Econometrica，2002，70：1403-1444.

［6］ CHEN Z J，KULPERGER R. Minimax pricing and choquet pricing［J］. Insurance：Mathematics and Economics，2006，38：

518-528.

[7] HE K, HU M S, CHEN Z J. The relationship between risk measures and choquet expectations in the framework of g-expectations [J]. Statistics and Probability Letters, 2009, 79: 508-512.

[8] HUANG J, JIA G Y. On the minimal members of convex expectations [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2011, 376: 42-50.

[9] JIA G Y. The minimal sublinear expectations and their related properties [J]. Science in China Series A: Mathematics, 2009, 39: 79-87.

[10] JI R L, JIANG L, TIAN D J. On the minimal members of convex expectations with constraints [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2015, 191: 1-8.

[11] 纪荣林,江龙,石学军. 凸 g-期望的若干性质[J]. 中山大学学报(自然科学版),2015,54(5):11-14.
JI R L, JIANG L, SHI X J. Some properties of convex g-expectations [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2015, 54(5): 11-14.

[12] 纪荣林, 周津名. g-期望的凸性及其应用[J]. 中山大学学报(自然科学版),2018,57(5): 127-131.
JI R L, ZHOU J M. Convexity of g-expectations and its application [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2018, 57(5): 127-131.

[13] JIANG L. A necessary and sufficient condition for probability measures dominated by g-expectation [J]. Statistics and Probability Letters, 2009, 79(2): 196-201.

[14] ARTZNER PH, DELBAEN F, EBER J M, et al. Coherent measures of risk [J]. Mathematical Finance, 1999, 4: 203-228.

[15] FÖLLMER H, SCHIED A. Convex measures of risk and trading constraints [J]. Finance and Stochastics, 2002, 6: 429-447.

[16] FRIRRELLI M, ROSAZZA GIANIN E. Putting order in risk measures [J]. Journal of Banking and Finance, 2002, 26: 1473-1486.

[17] ROSAZZA GIANIN E. Risk measures via g-expectations [J]. Insurance: Mathematics and Economics, 2006, 39: 19-34.

[18] JIANG L. Convexity, translation invariance and subadditivity for g-expectations and related risk measures [J]. Annals of Applied Probability, 2008, 18: 245-258.

（责任编辑　冯兆永）