

# 预不变凸函数的 Hermite-Hadamard 型分数阶积分不等式的推广\*

孙文兵, 郑灵红

(邵阳学院理学院, 湖南 邵阳 422000)

**摘要:** 不变凸子集上构造了一个含参数的关于 Riemann-Liouville 分数阶积分的恒等式, 利用构造的积分恒等式为辅助函数, 得到几个函数导数绝对值为预不变凸的新 Hermite-Hadamard 型分数阶积分不等式。参数取特定值时得到一些不同形式的积分不等式。

**关键词:** 预不变凸函数; Hermite-Hadamard 型不等式; Riemann-Liouville 分数阶积分; 参数; 推广

**中图分类号:** O178 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2020) 04-0149-09

## The generalization of Hermite-Hadamard type fractional integrals inequalities for preinvex functions

SUN Wenbing, ZHENG Linghong

(School of Science, Shaoyang University, Shaoyang 422000, China)

**Abstract:** An identity with parameter is constructed via Riemann-Liouville fractional integrals on the invex subset. Using the constructed integral identity as the auxiliary function, some new Hermite-Hadamard type fractional integrals inequalities are derived, whose absolute values of the derivatives of the functions are preinvex. When the parameters are taken some specific values, some integral inequalities with different forms are obtained.

**Key words:** preinvex functions; Hermite-Hadamard type inequalities; Riemann-Liouville fractional integrals; parameter; generalization

凸函数理论是一个古老的数学分支。近年来, 由于最优化理论等学科越来越为人们所需要, 因此凸分析理论受到众多专家和学者重视。凸函数理论在其深度和广度两方面都得到了发展, 比如 Weir 等<sup>[1-2]</sup>提出了预不变凸函数的定义, 如下:

**定义 1** 对于映射  $\eta: S \times S \rightarrow \mathbf{R}^n$ , 如果对于任意  $x, y \in S$  和  $t \in [0, 1]$ ,  $x + t\eta(y, x) \in S$ , 则称集合  $S \subseteq \mathbf{R}^n$  是关于  $\eta$  的不变凸集。

**定义 2** 令  $S \subseteq \mathbf{R}^n$  是相对于  $\eta: S \times S \rightarrow \mathbf{R}^n$  的不变凸集。如果对于任意  $x, y \in S$  和  $t \in [0, 1]$ , 有

$$f(x + t\eta(y, x)) \leq (1-t)f(x) + tf(y) \quad (1)$$

那么, 函数  $f: S \rightarrow \mathbf{R}$  是关于  $\eta$  的预不变凸函数。函数  $f$  是预不变凹的当且仅当  $-f$  是预不变凸的。

\* 收稿日期: 2019-07-03

基金项目: 湖南省教育厅优秀青年基金(18B433); 湖南省自然科学基金(2020JJ5445); 国家自然科学基金(61672356)

作者简介: 孙文兵 (1978年生), 男; 研究方向: 积分不等式; E-mail: swb0520@163.com

注1在式(1)中取 $\eta(x, y) = x - y$ 时,  $f$ 便是一个经典凸函数。

## 1 背景知识

凸函数在证明不等式方面起着积极的作用, 如 Jensen 首先提出如下不等式:

如果对任意的 $x_1, x_2 \in [a, b]$ , 函数 $f$ 在区间 $[a, b]$ 上是 Jensen 意义下的凸函数, 那么有

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \quad (2)$$

成立, 函数 $f$ 称为 J 凸函数, 相反地, 当不等式进行反向时, 函数 $f$ 为 J 凹函数。

Hermite 和 Hadamard 分别对 Jensen 不等式进行了均值插值得到以下我们所熟知的 Hermite-Hadamard 型不等式:

若 $f: I \subseteq \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个凸函数,  $a, b \in I$ 且 $a < b$ , 那么有如下不等式成立:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (3)$$

近年来, 许多研究者对 Hermite-Hadamard 型积分不等式进行了推广和完善<sup>[3-6]</sup>。预不变凸函数的定义提出以后, Hermite-Hadamard 不等式与预不变凸函数相结合的研究结果也开始出现<sup>[7-10]</sup>。

Dragomir 和 Agarwal<sup>[6]</sup>证明了如下不等式:

定理1 令 $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ 是区间 $(a, b)$ 上的可微函数, 若 $|f'|^{p-1}$ 是 $[a, b]$ 上的凸函数,  $a, b \in \mathbf{R}$ ,  $a < b$ 且 $p \in \mathbf{R}$ ,  $p > 1$ , 则有以下不等式成立:

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} - \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \right| \leq \frac{b-a}{2(p+1)^{1/p}} \left[ \frac{|f'(a)|^{p-1} + |f'(b)|^{p-1}}{2} \right]^{\frac{p-1}{p}} \quad (4)$$

Noor<sup>[7]</sup>证明了关于预不变凸函数的 Hermite-Hadamard 不等式。

定理2 令 $f: K = [a, a + \eta(b, a)] \rightarrow (0, \infty)$ 是区间 $K^\circ$ 上的一个预不变凸函数 ( $K^\circ$ 是 $K$ 的内部),  $a, b \in K^\circ$ 且 $a < a + \eta(b, a)$ , 则如下不等式成立:

$$f\left(\frac{2a + \eta(b, a)}{2}\right) \leq \frac{1}{\eta(b, a)} \int_a^{a + \eta(b, a)} f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (5)$$

注2 当 $\eta(x, y) = x - y$ , 不等式(5)就变成了不等式(3)。

文献[8]中, Barani 等得到了如下函数导数绝对值是预不变凸函数的 Hermite-Hadamard 型积分不等式:

定理3 设 $A \subseteq \mathbf{R}$ 是一个关于 $\theta: A \times A \rightarrow \mathbf{R}$ 的一个开的不变凸集,  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$ 是一个可微函数。假设 $p \in \mathbf{R}$ 且 $p > 1$ , 如果 $|f'|^{p(p-1)}$ 在 $A$ 上是预不变凸的, 那么对每一个 $a, b \in A$ 且 $\theta(b, a) \neq 0$ , 如下不等式成立:

$$\left| \frac{f(a) + f(a + \theta(b, a))}{2} - \frac{1}{\theta(b, a)} \int_a^{a + \theta(b, a)} f(x) dx \right| \leq \frac{|\theta(b, a)|}{2(p+1)^{1/p}} \left[ \frac{|f'(a)|^{p(p-1)} + |f'(b)|^{p(p-1)}}{2} \right]^{\frac{p-1}{p}} \quad (6)$$

近年, 很多研究者对 Hermite-Hadamard 型积分不等式的研究推广到分数阶积分的形式, 如文献[11-12]等。

定义3 令 $f \in L^1[a, b]$ , 左侧和右侧 $\alpha (\in \mathbf{R}^+)$ 阶 Riemann-Liouville 分数阶积分 $J_{a+}^\alpha f$ 和 $J_b^\alpha f$  ( $a \geq 0$ )的定

义分别为

$$J_{a+}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x > a,$$

$$J_{b-}^{\alpha} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_x^b (t-x)^{\alpha-1} f(t) dt, \quad x < b$$

这里,  $\Gamma(\alpha)$  是 Gamma 函数,  $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{\alpha-1} du$ , 并且  $J_{a+}^0 f(x) = J_{b-}^0 f(x) = f(x)$ 。

目前, 国内对预不变凸函数的研究并不多见。本文对预不变凸函数的 Hermite-Hadamard 型积分不等式推广到 Riemann-Liouville 分数阶积分的形式, 而且所得不等式中含有参数  $\lambda (0 < \lambda \leq 1)$ , 并在两个对称的积分区间  $\left[0, \frac{\lambda}{2}\right]$  和  $\left[1 - \frac{\lambda}{2}, 1\right]$  上研究 Hermite-Hadamard 型积分不等式, 对不等式形式进行了一定改进, 并且对参数取特殊值时可以得到不同的不等式, 因此文中结果是对 Hermite-Hadamard 型积分不等式的极大改进。

## 2 主要结果及证明

**引理 1** 令  $A \subseteq \mathbf{R}$  是一个关于  $\eta: A \times A \rightarrow \mathbf{R}$  的开的不变凸子集, 且  $a, b \in A, a < a + \eta(b, a)$ 。设  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  是区间  $(a, a + \eta(b, a))$  上的可微映射, 且  $f' \in L[a, a + \eta(b, a)]$ ,  $0 < \lambda \leq 1, \alpha > 0$ , 则以下关于 Riemann-Liouville 分数阶积分的恒等式成立:

$$\begin{aligned} & \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{\eta^{\alpha}(b, a)} \left[ J_{a+}^{\alpha} f\left(a + \frac{\lambda}{2} \eta(b, a)\right) + (-1)^{\alpha-1} J_{[a+\eta(b, a)]-}^{\alpha} f\left(a + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \eta(b, a)\right) \right] \\ & + \frac{1}{2} [(-\lambda)^{\alpha} f(a + \eta(b, a)) - \lambda^{\alpha} f(a)] \\ & = \frac{\eta(b, a)}{2} \left[ \int_0^{\frac{\lambda}{2}} (\lambda - 2t)^{\alpha} f'(a + t\eta(b, a)) dt + \int_{1-\frac{\lambda}{2}}^1 (2 - \lambda - 2t)^{\alpha} f'(a + t\eta(b, a)) dt \right] \end{aligned} \quad (7)$$

**证明** 对上述等式的右边部分进行分部积分, 可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{\eta(b, a)}{2} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} (\lambda - 2t)^{\alpha} f'(a + t\eta(b, a)) dt \\ & = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} (\lambda - 2t)^{\alpha} d[f(a + t\eta(b, a))] \\ & = \frac{1}{2} (\lambda - 2t)^{\alpha} f(a + t\eta(b, a)) \Big|_0^{\frac{\lambda}{2}} - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \alpha (\lambda - 2t)^{\alpha-1} (-2) f(a + t\eta(b, a)) dt \\ & = -\frac{1}{2} \lambda^{\alpha} f(a) + \int_0^{\frac{\lambda}{2}} \alpha (\lambda - 2t)^{\alpha-1} f(a + t\eta(b, a)) dt \\ & = -\frac{1}{2} \lambda^{\alpha} f(a) + \frac{2^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{\eta^{\alpha}(b, a)} J_{a+}^{\alpha} f\left(a + \frac{\lambda}{2} \eta(b, a)\right) \end{aligned} \quad (8)$$

同理

$$\begin{aligned} & \frac{\eta(b, a)}{2} \int_{1-\frac{\lambda}{2}}^1 (2 - \lambda - 2t)^{\alpha} f'(a + t\eta(b, a)) dt \\ & = \frac{1}{2} \int_{1-\frac{\lambda}{2}}^1 (2 - \lambda - 2t)^{\alpha} d[f(a + t\eta(b, a))] \\ & = \frac{1}{2} (-\lambda)^{\alpha} f(a + \eta(b, a)) + \int_{1-\frac{\lambda}{2}}^1 \alpha (2 - \lambda - 2t)^{\alpha-1} f(a + t\eta(b, a)) dt \\ & = \frac{1}{2} (-\lambda)^{\alpha} f(a + \eta(b, a)) + \frac{2^{\alpha-1} (-1)^{\alpha-1} \Gamma(\alpha+1)}{\eta^{\alpha}(b, a)} J_{[a+\eta(b, a)]-}^{\alpha} f\left(a + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) \eta(b, a)\right) \end{aligned} \quad (9)$$

其中, 用到了变量代换  $x = a + t\eta(b, a)$ , 则  $t = \frac{x - a}{\eta(b, a)}$ ,  $t \in [0, 1]$ 。

再将式 (8) 和式 (9) 进行整理、合并, 结论可得, 引理 1 得证。

**定理 4** 令  $A \subseteq \mathbf{R}$  是一个关于  $\eta: A \times A \rightarrow \mathbf{R}$  的开的不变凸子集, 且  $a, b \in A, a < a + \eta(b, a)$ 。设  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  是区间  $(a, a + \eta(b, a))$  上的可微映射, 且  $f' \in L[a, a + \eta(b, a)]$ ,  $0 < \lambda \leq 1, \alpha > 0$ , 如果  $|f'|^{p-1}$  在区间  $[a, b]$  上是关于  $\eta$  的预不变凸函数,  $p > 1$ , 那么以下分数阶积分不等式成立:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b, a)} \left[ J_{a^+}^\alpha f \left( a + \frac{\lambda}{2} \eta(b, a) \right) + (-1)^{\alpha-1} J_{[a+\eta(b, a)]^-}^\alpha f \left( a + \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \right) \eta(b, a) \right) \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} [(-\lambda)^\alpha f(a + \eta(b, a)) - \lambda^\alpha f(a)] \right| \\ & \leq \frac{\eta(b, a)}{2} \left( \frac{\lambda^{\alpha p + 1}}{2(\alpha p + 1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \left( \frac{4\lambda - \lambda^2}{8} |f'(a)|^{p-1} + \frac{\lambda^2}{8} |f'(b)|^{p-1} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right. \\ & \quad \left. + \left( \frac{\lambda^2}{8} |f'(a)|^{p-1} + \frac{4\lambda - \lambda^2}{8} |f'(b)|^{p-1} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right] \end{aligned} \tag{10}$$

其中,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ 。

**证明** 由引理 1, 两边同时取模以及 Hölder 不等式, 得到

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b, a)} \left[ J_{a^+}^\alpha f \left( a + \frac{\lambda}{2} \eta(b, a) \right) + (-1)^{\alpha-1} J_{[a+\eta(b, a)]^-}^\alpha f \left( a + \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \right) \eta(b, a) \right) \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} [(-\lambda)^\alpha f(a + \eta(b, a)) - \lambda^\alpha f(a)] \right| \\ & \leq \frac{|\eta(b, a)|}{2} \left[ \left( \int_0^{\frac{\lambda}{2}} (\lambda - 2t)^{\alpha p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^{\frac{\lambda}{2}} |f'(a + t\eta(b, a))|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \\ & \quad + \frac{|\eta(b, a)|}{2} \left[ \left( \int_{1-\frac{\lambda}{2}}^1 (2t + \lambda - 2)^{\alpha p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{1-\frac{\lambda}{2}}^1 |f'(a + t\eta(b, a))|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

因为  $f'$  在区间  $[a, b]$  是关于  $\eta$  的预不变凸函数, 那么有

$$\int_0^{\frac{\lambda}{2}} |f'(a + t\eta(b, a))|^q dt \leq \int_0^{\frac{\lambda}{2}} [(1-t)|f'(a)|^q + t|f'(b)|^q] dt = \frac{4\lambda - \lambda^2}{8} |f'(a)|^q + \frac{\lambda^2}{8} |f'(b)|^q$$

以及

$$\int_{1-\frac{\lambda}{2}}^1 |f'(a + t\eta(b, a))|^q dt \leq \int_{1-\frac{\lambda}{2}}^1 [(1-t)|f'(a)|^q + t|f'(b)|^q] dt = \frac{\lambda^2}{8} |f'(a)|^q + \frac{4\lambda - \lambda^2}{8} |f'(b)|^q$$

通过计算, 可以得到

$$\int_0^{\frac{\lambda}{2}} (\lambda - 2t)^{\alpha p} dt = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} (\lambda - 2t)^{\alpha p} d(\lambda - 2t) = \frac{\lambda^{\alpha p + 1}}{2(\alpha p + 1)}$$

以及  $\int_{1-\frac{\lambda}{2}}^1 (2t + \lambda - 2)^{\alpha p} dt = \frac{\lambda^{\alpha p + 1}}{2(\alpha p + 1)}$ , 从而得到

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b,a)} \left[ J_{a^+}^\alpha f \left( a + \frac{\lambda}{2} \eta(b,a) \right) + (-1)^{\alpha-1} J_{[a+\eta(b,a)]^-}^\alpha f \left( a + \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \right) \eta(b,a) \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} [(-\lambda)^\alpha f(a+\eta(b,a)) - \lambda^\alpha f(a)] \right| \\ & \leq \frac{|\eta(b,a)|}{2} \left[ \left( \frac{\lambda^{\alpha p+1}}{2(\alpha p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{4\lambda - \lambda^2}{8} |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + \frac{\lambda^2}{8} |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right. \\ & \left. + \left( \frac{\lambda^{\alpha p+1}}{2(\alpha p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left( \frac{\lambda^2}{8} |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + \frac{4\lambda - \lambda^2}{8} |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right] \end{aligned}$$

定理4得证。

**推论1** 令  $A \subseteq \mathbf{R}$  是一个关于  $\eta: A \times A \rightarrow \mathbf{R}$  的开的不变凸子集, 且  $a, b \in A, a < a + \eta(b, a)$ 。设  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  是区间  $(a, a + \eta(b, a))$  上的可微映射, 且  $f' \in L[a, a + \eta(b, a)]$ ,  $0 < \lambda \leq 1$ , 如果  $|f'|^{\frac{p}{p-1}}$  在区间  $[a, b]$  上是关于  $\eta$  的预不变凸函数,  $p > 1$ , 那么以下积分不等式成立:

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^\lambda f(a + t\eta(b, a)) dt + \int_{1-\frac{\lambda}{2}}^1 f(a + t\eta(b, a)) dt - \frac{\lambda[f(a) + f(a + \eta(b, a))]}{2} \right| \\ & \leq \frac{|\eta(b, a)|}{2} \left[ \left( \frac{\lambda^{p+1}}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \left( \frac{4\lambda - \lambda^2}{8} |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + \frac{\lambda^2}{8} |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} + \left( \frac{\lambda^2}{8} |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + \frac{4\lambda - \lambda^2}{8} |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right] \right] \quad (11) \end{aligned}$$

**证明** 在式(10)中, 取  $\alpha = 1$ , 就可以得到式(11)。

**推论2** 假设推论1的条件成立, 可得以下不等式:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\eta(b, a)} \int_a^{a+\eta(b, a)} f(x) dx - \frac{f(a) + f(a + \eta(b, a))}{2} \right| \\ & \leq \frac{|\eta(b, a)|}{2} \left[ \left( \frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \left( \frac{3}{8} |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{8} |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} + \left( \frac{1}{8} |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + \frac{3}{8} |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right] \right] \quad (12) \end{aligned}$$

**证明** 在式(11)中取  $\lambda = 1$ , 并令  $a + t\eta(b, a) = x$  时, 可得结论成立。

**推论3** 假设推论1的条件成立, 那么以下分数阶积分不等式成立:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b, a)} \left[ J_{a^+}^\alpha f \left( a + \frac{1}{4} \eta(b, a) \right) + (-1)^{\alpha-1} J_{[a+\eta(b, a)]^-}^\alpha f \left( a + \frac{3}{4} \eta(b, a) \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \left[ \left( -\frac{1}{2} \right)^\alpha f(a + \eta(b, a)) - \left( \frac{1}{2} \right)^\alpha f(a) \right] \right| \\ & \leq \frac{|\eta(b, a)|}{2^{1+\frac{1}{p}}(\alpha p+1)^{\frac{1}{p}}} \left[ \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{\alpha p+1}{p}} \left[ \left( \frac{7}{32} |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{32} |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} + \left( \frac{1}{32} |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + \frac{7}{32} |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right] \right] \quad (13) \end{aligned}$$

**证明** 在式(11)中, 取  $\lambda = \frac{1}{2}$ , 就可以得到式(13)。

**推论4** 假设定理4的条件成立, 那么以下分数阶积分不等式成立:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b, a)} \left[ J_{a^+}^\alpha f \left( a + \frac{1}{2} \eta(b, a) \right) + (-1)^{\alpha-1} J_{[a+\eta(b, a)]^-}^\alpha f \left( a + \frac{1}{2} \eta(b, a) \right) \right] + \frac{1}{2} [(-1)^\alpha f(a + \eta(b, a)) - f(a)] \right| \\ & \leq \frac{|\eta(b, a)|}{2} \left[ \left( \frac{1}{2(\alpha p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \left( \frac{3}{8} |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + \frac{1}{8} |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} + \left( \frac{1}{8} |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + \frac{3}{8} |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right] \right] \quad (14) \end{aligned}$$

**证明** 在式 (10) 中, 取  $\lambda = 1$ , 就可以得到式 (14)。

**定理 5** 令  $A \subseteq \mathbf{R}$  是一个关于  $\eta: A \times A \rightarrow \mathbf{R}$  的开的不变凸子集, 且  $a, b \in A, a < a + \eta(b, a)$ 。设  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  是区间  $(a, a + \eta(b, a))$  上的可微映射, 且  $f' \in L[a, a + \eta(b, a)]$ ,  $0 < \lambda \leq 1, \alpha > 0$ , 如果  $|f'|^{p-1}$  在区间  $[a, b]$  上是关于  $\eta$  的预不变凸函数,  $p > 1$ , 那么以下分数阶积分不等式成立:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b,a)} \left[ J_{a^+}^\alpha f \left( a + \frac{\lambda}{2} \eta(b,a) \right) + (-1)^{\alpha-1} J_{[a+\eta(b,a)]^-}^\alpha f \left( a + \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \right) \eta(b,a) \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} [(-\lambda)^\alpha f(a + \eta(b,a)) - \lambda^\alpha f(a)] \right| \\ & \leq \frac{|\eta(b,a)|}{2} \left( \frac{\lambda^{\alpha p+1}}{2(\alpha p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \left( \left( \frac{4\lambda - \lambda^2}{8} \right)^{\frac{p-1}{p}} |f'(a)| + \left( \frac{\lambda^2}{8} \right)^{\frac{p-1}{p}} |f'(b)| \right) \right. \\ & \left. + \left( \left( \frac{\lambda^2}{8} \right)^{\frac{p-1}{p}} |f'(a)| + \left( \frac{4\lambda - \lambda^2}{8} \right)^{\frac{p-1}{p}} |f'(b)| \right) \right] \end{aligned} \quad (15)$$

**证明** 令  $a_1 = \frac{4\lambda - \lambda^2}{8} |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}, b_1 = \frac{\lambda^2}{8} |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}, a_2 = \frac{\lambda^2}{8} |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}}, b_2 = \frac{4\lambda - \lambda^2}{8} |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}}$ , 对  $p > 1$ , 有  $0 < \frac{p-1}{p} < 1$ 。因为对于  $0 < r < 1, a_1, a_2, \dots, a_n \geq 0$  和  $b_1, b_2, \dots, b_n \geq 0$  有

$$\sum_{i=1}^n (a_i + b_i)^r \leq \sum_{i=1}^n a_i^r + \sum_{i=1}^n b_i^r$$

由定理 4, 可以得到

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b,a)} \left[ J_{a^+}^\alpha f \left( a + \frac{\lambda}{2} \eta(b,a) \right) + (-1)^{\alpha-1} J_{[a+\eta(b,a)]^-}^\alpha f \left( a + \left( 1 - \frac{\lambda}{2} \right) \eta(b,a) \right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} [(-\lambda)^\alpha f(a + \eta(b,a)) - \lambda^\alpha f(a)] \right| \\ & \leq \frac{|\eta(b,a)|}{2} \left( \frac{\lambda^{\alpha p+1}}{2(\alpha p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \left( \frac{4\lambda - \lambda^2}{8} |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + \frac{\lambda^2}{8} |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} + \left( \frac{\lambda^2}{8} |f'(a)|^{\frac{p}{p-1}} + \frac{4\lambda - \lambda^2}{8} |f'(b)|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-1}{p}} \right] \\ & \leq \frac{|\eta(b,a)|}{2} \left( \frac{\lambda^{\alpha p+1}}{2(\alpha p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \left( \left( \frac{4\lambda - \lambda^2}{8} \right)^{\frac{p-1}{p}} |f'(a)| + \left( \frac{\lambda^2}{8} \right)^{\frac{p-1}{p}} |f'(b)| \right) + \left( \left( \frac{\lambda^2}{8} \right)^{\frac{p-1}{p}} |f'(a)| + \left( \frac{4\lambda - \lambda^2}{8} \right)^{\frac{p-1}{p}} |f'(b)| \right) \right] \end{aligned}$$

定理 5 得证。

**推论 5** 令  $A \subseteq \mathbf{R}$  是一个关于  $\eta: A \times A \rightarrow \mathbf{R}$  的开的不变凸子集, 且  $a, b \in A, a < a + \eta(b, a)$ 。设  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  是区间  $(a, a + \eta(b, a))$  上的可微映射, 且  $f' \in L[a, a + \eta(b, a)], \alpha > 0$ , 如果  $|f'|^{p-1}$  在区间  $[a, b]$  上是关于  $\eta$  的预不变凸函数,  $p > 1$ , 那么以下分数阶积分不等式成立:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b,a)} \left[ J_{a^+}^\alpha f \left( a + \frac{1}{2} \eta(b,a) \right) + (-1)^{\alpha-1} J_{[a+\eta(b,a)]^-}^\alpha f \left( a + \frac{1}{2} \eta(b,a) \right) \right] + \frac{1}{2} [(-1)^\alpha f(a + \eta(b,a)) - f(a)] \right| \\ & \leq \frac{|\eta(b,a)|}{2} \left( \frac{1}{2(\alpha p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \left( \left( \frac{3}{8} \right)^{\frac{p-1}{p}} |f'(a)| + \left( \frac{1}{8} \right)^{\frac{p-1}{p}} |f'(b)| \right) + \left( \left( \frac{1}{8} \right)^{\frac{p-1}{p}} |f'(a)| + \left( \frac{3}{8} \right)^{\frac{p-1}{p}} |f'(b)| \right) \right] \end{aligned} \quad (16)$$

**证明** 在式 (15) 中, 取  $\lambda = 1$ , 就可以得到式 (16)。

**推论 6** 假设推论 5 的条件成立, 且  $b > a$ , 可得如下关于经典凸函数的分数阶积分不等式:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{a+}^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) + (-1)^{\alpha-1} J_{b-}^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] + \frac{1}{2} [(-1)^\alpha f(b) - f(a)] \right| \\ & \leq \frac{b-a}{2} \left( \frac{1}{2(\alpha p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \left( \left( \frac{3}{8} \right)^{\frac{p-1}{p}} |f'(a)| + \left( \frac{1}{8} \right)^{\frac{p-1}{p}} |f'(b)| \right) + \left( \left( \frac{1}{8} \right)^{\frac{p-1}{p}} |f'(a)| + \left( \frac{3}{8} \right)^{\frac{p-1}{p}} |f'(b)| \right) \right] \end{aligned} \quad (17)$$

**证明** 推论4中, 取  $\eta(b, a) = b - a$ , 可得结论成立。

**推论7** 设推论5的条件成立, 可得如下预不变凸函数的“梯形型”积分不等式:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\eta(b, a)} \int_a^{a+\eta(b, a)} f(x) dx - \frac{f(a) + f(a + \eta(b, a))}{2} \right| \\ & \leq \frac{|\eta(b, a)|}{2} \left( \frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \left( \left( \frac{3}{8} \right)^{\frac{p-1}{p}} |f'(a)| + \left( \frac{1}{8} \right)^{\frac{p-1}{p}} |f'(b)| \right) + \left( \left( \frac{1}{8} \right)^{\frac{p-1}{p}} |f'(a)| + \left( \frac{3}{8} \right)^{\frac{p-1}{p}} |f'(b)| \right) \right] \end{aligned} \quad (18)$$

**证明** 推论5中取  $\alpha = 1$ , 令  $a + t\eta(b, a) = x$  可得结论成立。

**定理6** 令  $A \subseteq \mathbf{R}$  是一个关于  $\eta: A \times A \rightarrow \mathbf{R}$  的开的不变凸子集, 且  $a, b \in A, a < a + \eta(b, a)$ 。设  $f: A \rightarrow \mathbf{R}$  是区间  $(a, a + \eta(b, a))$  上的可微映射, 且  $f' \in L[a, a + \eta(b, a)]$ ,  $\alpha > 0, 0 < \lambda \leq 1$ , 如果  $|f'|^p$  在区间  $[a, b]$  上是预不变凹的,  $p, q > 1$ , 那么以下分数次积分不等式成立:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b, a)} \left[ J_{a+}^\alpha f\left(a + \frac{\lambda}{2}\eta(b, a)\right) + (-1)^{\alpha-1} J_{[a+\eta(b, a)]-}^\alpha f\left(a + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\eta(b, a)\right) \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} [(-\lambda)^\alpha f(a + \eta(b, a)) - \lambda^\alpha f(a)] \right| \\ & \leq \frac{|\eta(b, a)|}{2} \left( \frac{\lambda^{\alpha p+1}}{2(\alpha p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \left| f'\left(a + \frac{\lambda}{4}\eta(b, a)\right) \right| + \left| f'\left(a + \left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)\eta(b, a)\right) \right| \right] \end{aligned} \quad (19)$$

其中,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  且  $\alpha \in [0, 1]$ 。

**证明** 根据引理2, 两边同时取模以及 Hölder 不等式, 可以得到

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b, a)} \left[ J_{a+}^\alpha f\left(a + \frac{\lambda}{2}\eta(b, a)\right) + (-1)^{\alpha-1} J_{[a+\eta(b, a)]-}^\alpha f\left(a + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\eta(b, a)\right) \right] \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{2} [(-\lambda)^\alpha f(a + \eta(b, a)) - \lambda^\alpha f(a)] \right| \\ & \leq \frac{|\eta(b, a)|}{2} \left[ \left( \int_0^{\frac{\lambda}{2}} (\lambda - 2t)^{\alpha p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_0^{\frac{\lambda}{2}} |f'(a + t\eta(b, a))|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} + \left( \int_{1-\frac{\lambda}{2}}^1 (2t + \lambda - 2)^{\alpha p} dt \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int_{1-\frac{\lambda}{2}}^1 |f'(a + t\eta(b, a))|^q dt \right)^{\frac{1}{q}} \right] \end{aligned}$$

因为  $|f'|^p$  在区间  $[a, b]$  上是预不变凹的, 利用不等式 (5), 可以得到

$$\int_0^{\frac{\lambda}{2}} |f'(a + t\eta(b, a))|^q dt = \frac{1}{\eta(b, a)} \int_a^{a + \frac{\lambda}{2}\eta(b, a)} |f'(x)|^q dx \leq \left| f'\left(a + \frac{\lambda}{4}\eta(b, a)\right) \right|^q$$

以及

$$\int_{1-\frac{\lambda}{2}}^1 |f'(a + t\eta(b, a))|^q dt = \frac{1}{\eta(b, a)} \int_{a + (1-\frac{\lambda}{2})\eta(b, a)}^{a + \eta(b, a)} |f'(x)|^q dx \leq \left| f'\left(a + \left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)\eta(b, a)\right) \right|^q$$

其中用到了变量代换  $x = a + t\eta(b, a)$ 。

通过计算, 可以得到

$$\int_0^{\frac{\lambda}{2}} (\lambda - 2t)^{\alpha p} dt = -\frac{1}{2} \int_0^{\frac{\lambda}{2}} (\lambda - 2t)^{\alpha p} d(\lambda - 2t) = -\frac{1}{2(\alpha p + 1)} (\lambda - 2t)^{\alpha p + 1} \Big|_0^{\frac{\lambda}{2}} = \frac{\lambda^{\alpha p + 1}}{2(\alpha p + 1)}$$

以及

$$\int_{1-\frac{\lambda}{2}}^1 (2t + \lambda - 2)^{\alpha p} dt = \frac{1}{2} \int_{1-\frac{\lambda}{2}}^1 (2t + \lambda - 2)^{\alpha p} d(2t + \lambda - 2) = \frac{\lambda^{\alpha p + 1}}{2(\alpha p + 1)}$$

根据上述不等式

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b,a)} \left[ J_{a^+}^\alpha f\left(a + \frac{\lambda}{2}\eta(b,a)\right) + (-1)^{\alpha-1} J_{[a+\eta(b,a)]^-}^\alpha f\left(a + \left(1 - \frac{\lambda}{2}\right)\eta(b,a)\right) \right] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} [(-\lambda)^\alpha f(a + \eta(b,a)) - \lambda^\alpha f(a)] \right| \\ & \leq \frac{|\eta(b,a)|}{2} \left( \frac{\lambda^{\alpha p + 1}}{2(\alpha p + 1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \left| f'\left(a + \frac{\lambda}{4}\eta(b,a)\right) \right| + \left| f'\left(a + \left(1 - \frac{\lambda}{4}\right)\eta(b,a)\right) \right| \right] \end{aligned}$$

定理 6 得证。

**推论 8** 假设定理 6 的条件成立，那么以下分数次积分不等式成立：

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{\eta^\alpha(b,a)} \left[ J_{a^+}^\alpha f\left(a + \frac{1}{2}\eta(b,a)\right) + (-1)^{\alpha-1} J_{[a+\eta(b,a)]^-}^\alpha f\left(a + \frac{1}{2}\eta(b,a)\right) \right] + \frac{1}{2} [(-1)^\alpha f(a + \eta(b,a)) - f(a)] \right| \\ & \leq \frac{|\eta(b,a)|}{2} \left( \frac{1}{2(\alpha p + 1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \left| f'\left(a + \frac{1}{4}\eta(b,a)\right) \right| + \left| f'\left(a + \frac{3}{4}\eta(b,a)\right) \right| \right] \end{aligned} \tag{20}$$

**证明** 在式 (19) 中，取  $\lambda = 1$ ，就可以得到式 (20)。

**推论 9** 假设定理 6 的条件成立，且  $b > a$ ，可得如下关于经典凹函数的分数阶积分不等式：

$$\begin{aligned} & \left| \frac{2^{\alpha-1}\Gamma(\alpha+1)}{(b-a)^\alpha} \left[ J_{a^+}^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) + (-1)^{\alpha-1} J_{b^-}^\alpha f\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] + \frac{1}{2} [(-1)^\alpha f(b) - f(a)] \right| \\ & \leq \frac{b-a}{2} \left( \frac{1}{2(\alpha p + 1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \left| f'\left(\frac{b+3a}{4}\right) \right| + \left| f'\left(\frac{3b+a}{4}\right) \right| \right] \end{aligned} \tag{21}$$

**证明** 推论 8 中，取  $\eta(b,a) = b - a$ ，可得结论成立。

**推论 10** 假设定理 6 的条件成立，可得如下预不变凹函数的“梯形型”积分不等式：

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\eta(b,a)} \int_a^{a+\eta(b,a)} f(x) dx - \frac{f(a) + f(a + \eta(b,a))}{2} \right| \\ & \leq \frac{|\eta(b,a)|}{2} \left( \frac{1}{2(p+1)} \right)^{\frac{1}{p}} \left[ \left| f'\left(a + \frac{1}{4}\eta(b,a)\right) \right| + \left| f'\left(a + \frac{3}{4}\eta(b,a)\right) \right| \right] \end{aligned} \tag{22}$$

**证明** 推论 8 中取  $\alpha = 1$ ，令  $a + t\eta(b,a) = x$  可得结论成立。

**参考文献：**

[1] WEIR T, MOND B. Pre-invex functions in multiple objective optimization [J]. J Math Anal Appl, 1988, 136: 29-38.  
 [2] WEIR T, JEYAKUMAR V. A class of nonconvex functions and mathematical programming [J]. Bull Austral Math Soc, 1988, 38: 177-189.  
 [3] SUN W B, LIU Q. New Hermite-Hadamard type inequalities for  $(\alpha, m)$ -convex functions and applications to special means [J]. J Math Inequal, 2017, 11(2): 383-397.  
 [4] İSCAN İ. Hermite-Hadamard type inequalities for harmonically convex functions [J]. Hacett J Math Stat, 2014, 43(6): 935-942.

- [5] 孙文兵. 关于  $(h, m)$ -凸函数乘积的 Hadamard-型不等式及应用(英文)[J]. 中国科学院大学学报, 2018, 35(2): 145–153.  
SUN W B. Hadamard-type inequalities for products of  $(h, m)$ -convex functions and its applications [J]. Journal of University of Chinese Academy of Sciences, 2018, 35(2): 145–153.
- [6] DRAGOMIR S S, AGARWAL R P. Two inequalities for differentiable mappings and applications to special means of real numbers and to trapezoidal formula [J]. Appl Math Lett, 1998, 11: 91–95.
- [7] NOOR M A. Hermite–Hadamard integral inequalities for Log–Preinvex functions [J]. J Math Anal Approx Theory, 2007, 2: 126–131.
- [8] BARANI A, GHAZANFARI A G, DRAGOMIR S S. Hermite–Hadamard inequality for functions whose derivatives absolute values are preinvex [J]. Journal of Inequalities and Applications, 2012, 2012: 247.
- [9] AWAN M U, CRISTESCU G, NOOR M A, et al. Upper and lower bounds for Riemann type quantum integrals of preinvex and preinvex dominated functions [J]. U P B Sci Bull, Series A, 2017, 79(3): 33–44.
- [10] NOOR M A, NOOR K I, MIHAI M V, et al. Fractional Hermite–Hadamard inequalities for some classes of differentiable preinvex functions [J]. U P B Sci Bull (Series A), 2016, 78(3): 163–174.
- [11] CHEN F X. On the generalization of some Hermite–Hadamard inequalities for functions with convex absolute values of the second derivatives via fractional integrals [J]. Ukr Mat Zh, 2018, 70(12): 1696–1706.
- [12] 孙文兵. 分数次积分下关于  $s$ -凸函数的新 Hermite–Hadamard 型不等式[J]. 浙江大学学报(理学版), 2017, 44(5): 531–537.  
SUN W B. New Hermite–Hadamard-type inequalities for  $s$ -convex functions via fractional integrals [J]. Journal of Zhejiang University (Science Edition), 2017, 44(5): 531–537.

(责任编辑 冯兆永)