

一种基于稀疏正则化的地下水点污染源识别法*

杨方浩, 吕中荣, 汪利
(中山大学航空航天学院, 广东 广州 510006)

摘要: 提出了一种基于稀疏正则化的方法识别地下水点污染源。首先, 对地下水一维对流-弥散方程时域有限元格式进行拉普拉斯变换得到频域方程, 然后建立以 l_1 范数项为约束的地下水点污染源识别问题的目标函数, 从而克服空间分布稀疏的点污染源识别问题的不适定性; 接着, 利用交替优化法进行迭代求解。研究表明, 所提方法能在噪声条件下有效识别地下水点污染源的位置和强度变化。

关键词: 对流-弥散; 稀疏正则化; 污染源识别; 交替优化法; 正则化参数

中图分类号: TV138 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2020) 05-0040-09

An identification method for groundwater point pollution source identification based on sparse regularization

YANG Fanghao, LV Zhongrong, WANG Li

(School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510006, China)

Abstract: This paper proposes a method based on sparse regularization to identify groundwater point pollution sources. Firstly, the time domain finite element discretized equation of groundwater one-dimensional convection-diffusion equation is used to obtain the frequency domain equation by Laplace transform, and then the objective function of the groundwater point pollution source identification problem constrained by the l_1 norm term is established, thus overcoming the ill-posed problem of the point source identification due to sparse spatial distribution. The identification equation is then solved iteratively using the alternating optimization method. The research results show that the proposed method can effectively identify the position and intensity changes of groundwater pollution sources under noise conditions.

Key words: convection-dispersion; sparse regularization; pollution source identification; alternating optimization method; regularization parameter

地下水是我国甚至全球重要的淡水资源之一, 约占我国水资源总量的 30%。而在我国部分城市, 地下水几乎是唯一的供水水源^[1]。由此可见, 地下水资源具有一定的珍贵性。但是, 我国地下水污染问题仍然相当严峻。并且, 由于地下水具有隐蔽性和复杂性等特性, 地下水污染的预防与治理工作十分困难。因此, 通过已知的水文地质参数和监测点浓度数据, 反求污染源位置及释放历史等信息具有十分重要的研究意义和实际价值。

地下水污染源识别属于典型的源项识别反问题, 目的在于反演地下水污染源的位置及释放历史信息。然而, 对于大多数反问题, 往往是不适定的, 即无法直接求解^[2]。目前已有大量的研究通过正则化方法

* 收稿日期: 2019-07-12

基金项目: 国家自然科学基金 (11972380)

作者简介: 杨方浩 (1995年生), 男; 研究方向: 污染源识别; E-mail: yangfh6@mail2.sysu.edu.cn

通信作者: 汪利 (1988年生), 男; 研究方向: 力学反问题; E-mail: wangli75@mail.sysu.edu.cn

将地下水污染源识别问题转变为适定问题进行求解。Skaggs等^[3]将Tikhonov正则化应用于地下水一维均匀流模型反问题中,在已知单个污染源的位置的情况下,反演得到污染源释放历史,进而得到污染物的时空分布。Li等^[4]在Tikhonov正则化的基础上,提出了一种新的梯度正则化算法用于求解地下水一维均匀流的源项反演问题,有效地识别出线污染源的空间强度变化。Huang等^[5]通过共轭梯度法反演地下水二维均匀流模型中的线污染源空间变化强度。而邢利英等^[6]通过改进的共轭梯度法重构地下水一维均匀流的线污染源空间释放函数。Onyari等^[7]对二维各向异性地下水含水层中的污染物运输反问题,通过格林函数法离散、奇异值分解及Tikhonov正则化的最小二乘法等进行求解,重构了一维已知位点的污染源随时间变化的释放函数以及二维线污染源的空间变化强度,从而得到污染物的时空分布。Mazaheri等^[8]则是将格林函数法应用于一维对流-弥散方程,从而得到积分方程,并通过Tikhonov正则化进行求解,以此准确地识别河流中的点污染源。Wang等^[9]提出了一种基于有限元方法求解序列适定正问题的非迭代正则化优化算法,重构了地下水一维均匀流模型反问题中线污染源释放函数的空间变化。

综上所述,以上研究大多采用正则化方法对地下水非点污染源和已知点源位置情况下点源源强进行反演识别,也就是说目前采用正则化方法对地下水点污染源的空间位置识别研究较少。而已有研究是将稀疏正则化理论应用于空气污染源定位^[10-11]、热源定位^[12]以及声源定位^[13]等领域。对此,本文将设计一种方法来识别地下水点污染源的位置及源强变化,即对反问题的目标函数引入 l_1 范数项加以约束,然后利用交替优化算法分别迭代求解浓度场和源强。

1 地下水污染源反演模型

1.1 地下水污染物运移控制方程

假定承压含水层地下水的流动方向为 x 方向,且污染物为保守性污染物,初始浓度场为0,故采用不考虑吸附及化学反应的一维对流-弥散方程,为:

$$\begin{cases} \frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = \nabla(\alpha_L v_x \nabla C(x, t)) - \nabla(v_x C(x, t)) + I, t \in [0, T], x \in [0, L] \\ C(0, t) = 0, t \in [0, T] \\ C(L, t) = 0, t \in [0, T] \\ C(x, 0) = 0, x \in [0, L] \end{cases} \quad (1)$$

式中, T 表示计算区域内的时间范围, L 表示计算区域内的空间范围, $C(x, t)$ 表示污染物浓度, v_x 为沿 x 方向的地下水渗流速度, α_L 为纵向弥散度即沿 x 方向的弥散度, I 表示源汇项。这里仅考虑点污染源,故有:

$$I = \sum_{i=1}^N \delta(x - x_p) f_p(t) \quad (2)$$

式中, $f_p(t)$ 表示第 p 个点污染源随时间变化的释放函数,即源强; δ 为Dirac delta函数,即有:

$$\delta(x - x_p) = \begin{cases} 1, & x = x_p, \\ 0, & x \neq x_p. \end{cases} \quad (3)$$

然后通过Galerkin有限元方法^[14],即设试函数 $\tilde{C}(x, t) = \sum_{i=1}^n C_i(t) \phi_i(x)$ 为式(1)的近似解,将其代入式(1)中的边界条件,并与基函数 $\phi_j(x)$ 点乘后加权积分,最终将式(1)改写为

$$\mathbf{A}\{\mathbf{C}(t)\} + \mathbf{E}\left\{\frac{d\mathbf{C}(t)}{dt}\right\} = \{\mathbf{F}(t)\} \quad (4)$$

其中,

$$\begin{cases} A_{ji} = \sum_e \int \alpha_L v_x \frac{\partial \phi_i}{\partial x} \frac{\partial \phi_j}{\partial x} dx \\ E_{ji} = \sum_e \int \phi_i \cdot \phi_j dx \\ F_j = \sum_e \int I \cdot \phi_j dx \end{cases} \quad (5)$$

这里, e 为有限元法划分的单元, n 为空间节点数, \mathbf{A} 与 \mathbf{E} 皆为 n 阶方阵, $\{\mathbf{C}(t)\}$ 为 t 时刻 n 维浓度列向量, $\left\{\frac{d\mathbf{C}(t)}{dt}\right\}$ 为 t 时刻浓度对时间导数的 n 维列向量, $\{\mathbf{F}(t)\}$ 为 t 时刻 n 维污染源列向量。

1.2 加稀疏约束的目标函数

对式 (4) 而言, 由于 $\left\{\frac{d\mathbf{C}(t)}{dt}\right\}$ 时间偏导项的存在, 难以通过已知信息 \mathbf{A} 与 \mathbf{E} 方阵, 以及 t 时刻 m 个节点的测量浓度 $\hat{\mathbf{C}}^m(t)$, 反演得到 $\{\mathbf{F}(t)\}$ 。因此, 需将式 (4) 经拉普拉斯变换为

$$(\mathbf{sE} + \mathbf{A})\tilde{\mathbf{C}}(s) = \tilde{\mathbf{F}}(s) \quad (6)$$

式中, $\tilde{\mathbf{C}}(s) = \int_0^\infty \{\mathbf{C}(t)\}e^{-st}dt$, $\tilde{\mathbf{F}}(s) = \int_0^\infty \{\mathbf{F}(t)\}e^{-st}dt$, 且有 $\int_0^\infty \left\{\frac{d\mathbf{C}(t)}{dt}\right\}e^{-st}dt = s\tilde{\mathbf{C}}(s) - \{\mathbf{C}(0)\}$ 。又由初始条件可知, $\{\mathbf{C}(0)\} = 0$, 所以 $\int_0^\infty \left\{\frac{d\mathbf{C}(t)}{dt}\right\}e^{-st}dt = s\tilde{\mathbf{C}}(s)$ 。其中, 拉普拉斯值 s 有 $0 < s_1 < s_2 < \dots < s_r$ 。这样就可以得到式 (6) 的目标函数为

$$J\left(\left\{\tilde{\mathbf{C}}(s_i)\right\}_{i=1}^r, \left\{\tilde{\mathbf{F}}(s_i)\right\}_{i=1}^r\right) = \sum_{i=1}^r \left\| \tilde{\mathbf{F}}(s_i) - (\mathbf{s}_i\mathbf{E} + \mathbf{A})\tilde{\mathbf{C}}(s_i) \right\|^2$$

$$\text{s.t. } \tilde{\mathbf{C}}^m(s_i) = \tilde{\hat{\mathbf{C}}}^m(s_i), \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (7)$$

其中, $\tilde{\hat{\mathbf{C}}}^m(s_i)$ 是 $\hat{\mathbf{C}}^m(t)$ 经拉普拉斯变换后的形式, 而 $\tilde{\mathbf{C}}^m(s_i)$ 是这 m 个节点的真实浓度 $\mathbf{C}^m(t)$ 的拉普拉斯变换形式。若无测量噪声, 即严格满足式 (7) 中的约束条件 $\tilde{\mathbf{C}}^m(s_i) = \tilde{\hat{\mathbf{C}}}^m(s_i)$ 。

但是, 式 (7) 所表示的目标函数仍是不适定的, 通常需要添加约束作为罚项, 且由于点污染源具有稀疏性, 故选取 l_q 范数项 ($0 < q \leq 1$) 即稀疏正则化项为约束。而当 $q = 1$ 时, $\left\| \tilde{\mathbf{F}}(s_i) \right\|_q^q$ 为凸函数, 可降低求解难度^[15]。故本文取 l_1 范数项为约束项以建立加稀疏约束的目标函数:

$$J_\mu\left(\left\{\tilde{\mathbf{C}}(s_i)\right\}_{i=1}^r, \left\{\tilde{\mathbf{F}}(s_i)\right\}_{i=1}^r\right) = \sum_{i=1}^r \left\| \tilde{\mathbf{F}}(s_i) - (\mathbf{s}_i\mathbf{E} + \mathbf{A})\tilde{\mathbf{C}}(s_i) \right\|^2 + \mu \sum_{i=1}^r \left\| \tilde{\mathbf{F}}(s_i) \right\|_1$$

$$\text{s.t. } \tilde{\mathbf{C}}^m(s_i) = \tilde{\hat{\mathbf{C}}}^m(s_i), \quad i = 1, 2, \dots, r \quad (8)$$

其中, $\|\cdot\|_1$ 为 l_1 范数项, $\mu \geq 0$ 为正则化参数。

1.3 交替优化法

交替优化法是一种获得含分离变量的目标函数最优解迭代方法^[16]。但该方法不同于传统的增量迭代方法, 它通过对分离变量的目标函数依次交替最小化从而在每次迭代中找到解。因此, 本文采用该方法对相互分离的浓度 $\left\{\tilde{\mathbf{C}}(s_i)\right\}_{i=1}^r$ 和源强 $\left\{\tilde{\mathbf{F}}(s_i)\right\}_{i=1}^r$ 依次交替进行迭代求解。在此之前, 需将源强初始化置 0, 即令 $\tilde{\mathbf{F}}(s_i)^{(0)} = 0$, 然后将求解过程分为两步: 浓度恢复步和源强更新步。

1.3.1 浓度恢复步 由测量浓度 $\tilde{\mathbf{C}}^m(s_i) = \tilde{\hat{\mathbf{C}}}^m(s_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$ 以及已知信息 $\left\{\tilde{\mathbf{F}}(s_i)^{(k-1)}\right\}_{i=1}^r$, $k = 1, 2, \dots, r$, 恢复完整的浓度场, 即有:

$$\left\{\tilde{\mathbf{C}}(s_i)^{(k)}\right\}_{i=1}^r = \arg \min_{\tilde{\mathbf{C}}(s_i)} J_\mu\left(\left\{\tilde{\mathbf{C}}(s_i)\right\}_{i=1}^r, \left\{\tilde{\mathbf{F}}(s_i)^{(k-1)}\right\}_{i=1}^r\right) \quad (9)$$

其中, k 为迭代步数; 并且由 $\tilde{\mathbf{C}}^m(s_i) = \tilde{\hat{\mathbf{C}}}^m(s_i)$, $i = 1, 2, \dots, r$ 可知, 这里不考虑测量噪声。但是, 测量噪声是实际存在, 因此需添加一个罚项以增加求解过程的抗噪性, 即有:

$$\left\{\tilde{\mathbf{C}}(s_i)^{(k)}\right\}_{i=1}^r = \arg \min_{\tilde{\mathbf{C}}(s_i)} J_\mu\left(\left\{\tilde{\mathbf{C}}(s_i)\right\}_{i=1}^r, \left\{\tilde{\mathbf{F}}(s_i)^{(k-1)}\right\}_{i=1}^r\right) + \beta \sum_{i=1}^r g_b \left\| \tilde{\mathbf{C}}^m(s_i) - \tilde{\hat{\mathbf{C}}}^m(s_i) \right\|^2 \quad (10)$$

其中, 须先确定 $J_\mu \left(\left\{ \tilde{\mathbf{C}}(s_i) \right\}_{i=1}^r, \left\{ \tilde{\mathbf{F}}(s_i)^{(k-1)} \right\}_{i=1}^r \right)$ 的一般形式:

$$\begin{aligned} J_\mu \left(\left\{ \tilde{\mathbf{C}}(s_i) \right\}_{i=1}^r, \left\{ \tilde{\mathbf{F}}(s_i)^{(k-1)} \right\}_{i=1}^r \right) &= \sum_{i=1}^r \left\{ \tilde{\mathbf{C}}(s_i)^T \mathbf{B}(s_i) \tilde{\mathbf{C}}(s_i) - 2 \tilde{\mathbf{C}}(s_i)^T \mathbf{D}(s_i) \right\} + \mathbf{c} \\ &= \sum_{i=1}^r \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}^m(s_i) \\ \tilde{\mathbf{C}}^u(s_i) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{B}^m(s_i) & \mathbf{B}^{mu}(s_i) \\ (\mathbf{B}^{mu}(s_i))^T & \mathbf{B}^u(s_i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}^m(s_i) \\ \tilde{\mathbf{C}}^u(s_i) \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}^m(s_i) \\ \tilde{\mathbf{C}}^u(s_i) \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{D}^m(s_i) \\ \mathbf{D}^u(s_i) \end{pmatrix} \right\} + \mathbf{c} \end{aligned} \quad (11)$$

这里,

$$\begin{cases} \mathbf{c} = \sum_{i=1}^r \left\| \tilde{\mathbf{F}}(s_i)^{(k-1)} - \tilde{\mathbf{F}}(s_i)^{(k-1)} \right\|_1 + \mu \sum_{i=1}^r \left\| \tilde{\mathbf{F}}(s_i)^{(k-1)} \right\|_1 \\ \mathbf{B}(s_i) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^m(s_i) & \mathbf{B}^{mu}(s_i) \\ (\mathbf{B}^{mu}(s_i))^T & \mathbf{B}^u(s_i) \end{pmatrix} = (\mathbf{s}_i \mathbf{E} + \mathbf{A})^T (\mathbf{s}_i \mathbf{E} + \mathbf{A}) \\ \mathbf{D}(s_i) = \begin{pmatrix} \mathbf{D}^m(s_i) \\ \mathbf{D}^u(s_i) \end{pmatrix} = (\mathbf{s}_i \mathbf{E} + \mathbf{A})^T \tilde{\mathbf{F}}(s_i)^{(k-1)} \end{cases} \quad (12)$$

式中, 上标 m 表示测点, 上标 u 表示除测点外的其他节点, 而上标 mu 则是两者耦合的部分。那么由公式 (11) 与 (12) 可得:

$$\tilde{\mathbf{C}}(s_i)^{(k)} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{C}}^m(s_i)^{(k)} \\ \tilde{\mathbf{C}}^u(s_i)^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{B}^m(s_i) + \beta g_b \mathbf{I}_m & \mathbf{B}^{mu}(s_i) \\ (\mathbf{B}^{mu}(s_i))^T & \mathbf{B}^u(s_i) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{D}^m(s_i) + \beta g_b \tilde{\mathbf{C}}^m(s_i) \\ \mathbf{D}^u(s_i) \end{pmatrix} \quad (13)$$

其中, \mathbf{I}_m 为 m 阶单位矩阵; β 为权重, 由测量噪声决定其大小, 即其值越大, 噪声越小; $g_b = \left\| \mathbf{B}^m(s_i) \right\|_2$ 主要起防止条件数过大引起病态的作用。

1.3.2 源强更新步 由完整的浓度场 $\left\{ \tilde{\mathbf{C}}(s_i)^{(k)} \right\}_{i=1}^r$ 识别污染源位置及强度, 并对其迭代更新, 则有:

$$\left\{ \tilde{\mathbf{F}}(s_i)^{(k)} \right\}_{i=1}^r = \arg \min_{\left\{ \tilde{\mathbf{F}}(s_i) \right\}_{i=1}^r} J_\mu \left(\left\{ \tilde{\mathbf{C}}(s_i)^{(k)} \right\}_{i=1}^r, \left\{ \tilde{\mathbf{F}}(s_i) \right\}_{i=1}^r \right) \quad (14)$$

其中, 由式 (8) 可知

$$\begin{aligned} J_\mu \left(\left\{ \tilde{\mathbf{C}}(s_i)^{(k)} \right\}_{i=1}^r, \left\{ \tilde{\mathbf{F}}(s_i) \right\}_{i=1}^r \right) &= \sum_{i=1}^r \left\| \tilde{\mathbf{F}}(s_i) - (\mathbf{s}_i \mathbf{E} + \mathbf{A}) \tilde{\mathbf{C}}(s_i)^{(k)} \right\|_2^2 + \mu \sum_{i=1}^r \left\| \tilde{\mathbf{F}}(s_i) \right\|_1 \\ &= \sum_{i=1}^r \left\| \tilde{\mathbf{F}}(s_i) - \mathbf{G}(s_i) \right\|_2^2 + \mu \sum_{i=1}^r \left\| \tilde{\mathbf{F}}(s_i) \right\|_1 = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^n \left\| \left(\tilde{\mathbf{F}}(s_i) \right)_j - \left(\mathbf{G}(s_i) \right)_j \right\|_2^2 + \mu \left| \left(\tilde{\mathbf{F}}(s_i) \right)_j \right| \end{aligned} \quad (15)$$

这里,

$$\left(\mathbf{G}(s_i) \right)_j = \left((\mathbf{s}_i \mathbf{E} + \mathbf{A}) \tilde{\mathbf{C}}(s_i)^{(k)} \right)_j \quad (16)$$

其中, n 为空间节点数, j 表示矩阵或向量的第 j 行。那么, 由式 (14)、(15) 及 (16), 可得

$$\left(\tilde{\mathbf{F}}(s_i)^{(k)} \right)_j = \arg \min_{\left(\tilde{\mathbf{F}}(s_i) \right)_j} \left\{ \left| \left(\tilde{\mathbf{F}}(s_i) \right)_j - \left(\mathbf{G}(s_i) \right)_j \right|_2^2 + \mu \left| \left(\tilde{\mathbf{F}}(s_i) \right)_j \right| \right\}$$

$$= \begin{cases} \left(G(s_i)\right)_j - \frac{\mu}{2}, & \text{if } 0 \leq \mu \leq 2\left(G(s_i)\right)_j, \\ \left(G(s_i)\right)_j + \frac{\mu}{2}, & \text{if } 0 \leq \mu \leq -2\left(G(s_i)\right)_j, \\ 0, & \text{if } \mu \geq 2\left|\left(G(s_i)\right)_j\right|. \end{cases} \quad (17)$$

其中, 若 $\mu = 0$, 则有 $\left(\tilde{F}(s_i)^{(k)}\right)_j = \left(G(s_i)\right)_j$, 并且这意味着无正则化约束目标函数。

1.4 正则化参数选取

首先, 定义一个与 n 个节点相对应的正则化参数阈值集合 $\{\mu_{jcr}, j = 1, 2, \dots, n\}$, 其中

$$\mu_{jcr} = \sum_{i=1}^r \mu_{ijcr} = 2 \sum_{i=1}^r \left|\left(G(s_i)\right)_j\right| \quad (18)$$

由式 (17) 与 (18) 可知, 当正则化参数 $\mu \geq \mu_{jcr}$ 时, $\left(\tilde{F}(s_i)^{(k)}\right)_j = 0$, 即表示第 j 个节点或相应单元内没有污染源释放; 反之, 则可能存在污染源释放。而且, μ_{jcr} 越大, 则其存在污染源的的概率越高。因此, 需将该集合 $\{\mu_{jcr}, j = 1, 2, \dots, n\}$ 按大小重新排序为 $\{\tilde{\mu}_{1cr} \geq \tilde{\mu}_{2cr} \geq \dots \geq \tilde{\mu}_{ncr}\}$ 。然后通过一个循环判断语句确定正则化参数, 算法如图 1。图 1 中, p_{\max} 为点源可能存在的最大个数, 则取 $p_{\max} \geq p + 1$, 其中 p 为实际存在的点源个数; γ 是一个比值, 一般 $\gamma > 1$, 且 p_{\max} 较大时 γ 值较小, 其作用为区分节点是否存在污染源。另外, 为了防止正则化参数 μ 的选取影响源强识别值, 可对式 (17) 改写为

$$\left(\tilde{F}(s_i)^{(k)}\right)_j = \begin{cases} \left(G(s_i)\right)_j, & \text{if } \mu < \mu_{jcr}, \\ 0, & \text{if } \mu \geq \mu_{jcr}. \end{cases} \quad (19)$$

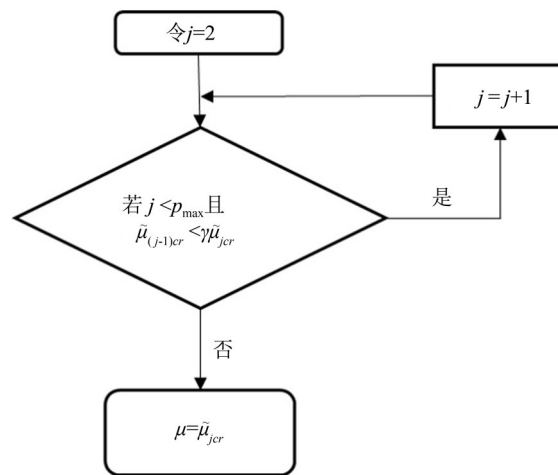


图 1 正则化参数 μ 的选取

Fig. 1 Selection of regularization parameter μ

2 数值算例

本文研究一个一维的地下水污染源识别问题, 如图 2 所示。并令式 (1) 中, $L = 100 \text{ m}$, $T = 10 \text{ d}$, $v_x = 1 \text{ m/d}$, $\alpha_L = 10 \text{ m}$, 然后设空间步长为 $dx = 0.5 \text{ m}$, 时间步长为 $dt = 0.01 \text{ d}$, 则将空间范围划分为 200 个单元, 201 个节点, 并定义节点编号集合为 $\{n_i, i = 1, 2, \dots, 201\}$, 其中 n_i 表示第 i 个节点上; 单元编号集合为 $\{e_i, i = 1, 2, \dots, 200\}$, 其中 e_i 则表示第 i 个单元内。

同时, 为验证所提稀疏正则化方法的适用性, 设置表 1 所示的几种工况, 检验所提方法在以下工况的

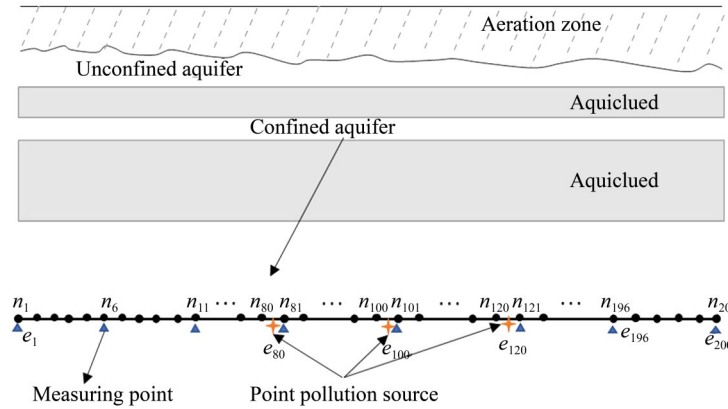


图 2 一维地下水污染物运移示意图

Fig. 2 Schematic of a one-dimensional groundwater contaminant transport problem

识别效果, 并设源强为 $f_p(t) = \left(\cos \frac{t}{4} + 1\right) \times 10^3 \text{ mg/L}$, 测点集合为 $m = \{n_i, i = 1, 6, 11, \dots, 196, 201\}$, 定义上文所提的 t 时刻测量节点浓度为

$$\hat{C}^m(t_j) = C^m(t_j) + \sigma \cdot \text{Rn} \cdot \text{RMS} \left([C^m(t_1), C^m(t_2), \dots] \right) \quad (20)$$

式中, $C^m(t_j)$ 为上文所提的 t 时刻真实节点浓度, 可由式 (4) 求得; σ 表示噪声水平; Rn 为由标准正态分布 (即均值等于 0, 标准差等于 1) 求得的随机数; RMS 表示均方根误差。

表 1 一维点源识别的四种工况

Table 1 Four scenarios for one-dimensional point sources identification

工况	点源位置	识别位置	噪声水平 /%
1	e_{100}	n_{100}, n_{101}	0
2	e_{100}	n_{100}, n_{101}	5
3	e_{80}, e_{120}	$n_{80}, n_{81}, n_{120}, n_{121}$	0
4	e_{80}, e_{120}	$n_{80}, n_{81}, n_{120}, n_{121}$	5

式 (20) 中, Rn 是一个随机数, 因此本文对识别过程进行 50 次重复试验, 取其均值与标准差为检验标准, 并设拉普拉斯值集合为 $\{s\}_{i=1}^r = \{1, 2, \dots, 20\}$, 然后令 $p_{\max} = 6, \gamma = 2, \beta = 10^3$ 。另外, 如表 1 所示点源位置处于单元内, 无法直接识别其位置, 而是通过识别其单元的两个节点, 并且每个节点的源强是单元内点源的一半。例如, 点源位置处于单元 e_{100} 内, 其源强 $f_{e_{100}}(t) = \left(\cos \frac{t}{4} + 1\right) \times 10^3 \text{ mg/L}$, 则识别位置为节点 n_{100} 和 n_{101} , 识别位置源强 $f_{n_{100}}(t) = f_{n_{101}}(t) = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{t}{4} + 1\right) \times 10^3 \text{ mg/L}$, 而识别源强结果则以其拉普拉斯变换形式呈现, 即 $\tilde{f}(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$ 。

如图 3-8 所示, 本文所提基于稀疏正则化的识别方法对表 1 中的四种工况均能有效识别其点源位置及强度; 而当无正则化约束目标函数时, 则不能识别。当然, $\tilde{f}(1)$ 的识别结果较差, 但在可接受范围内; 而当 $s > 1$ 时, $\tilde{f}(s)$ 的识别结果与真实值拟合良好。另外, 在噪声水平为 5% 时, $\tilde{f}(1)$ 的标准差较 $\tilde{f}(s > 1)$ 的标准差大, 但相对 $\tilde{f}(1)$ 自身来说其标准差很小。

3 结 语

针对地下水一维点污染源识别问题, 本文提出了一种基于稀疏正则化的点源识别方法, 从而为地下

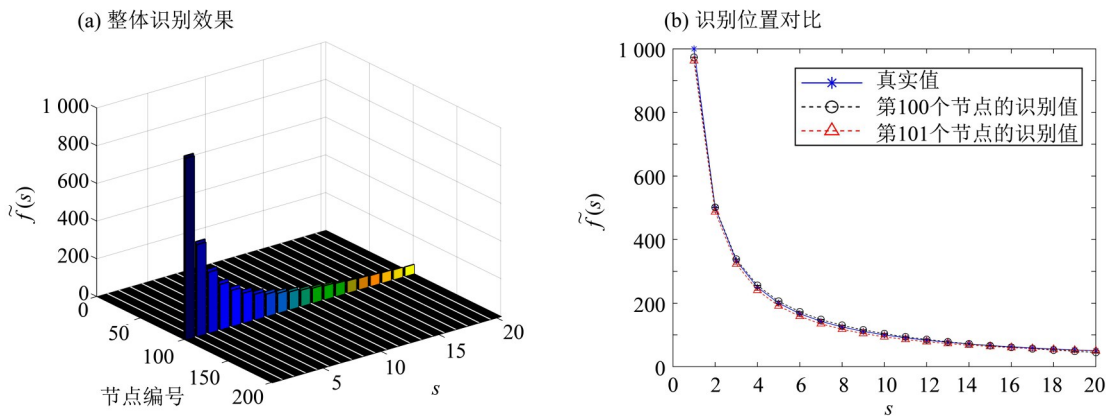


图 3 工况 1 的稀疏正则化识别结果

Fig. 3 Identified results for scenario 1 with sparse regularization

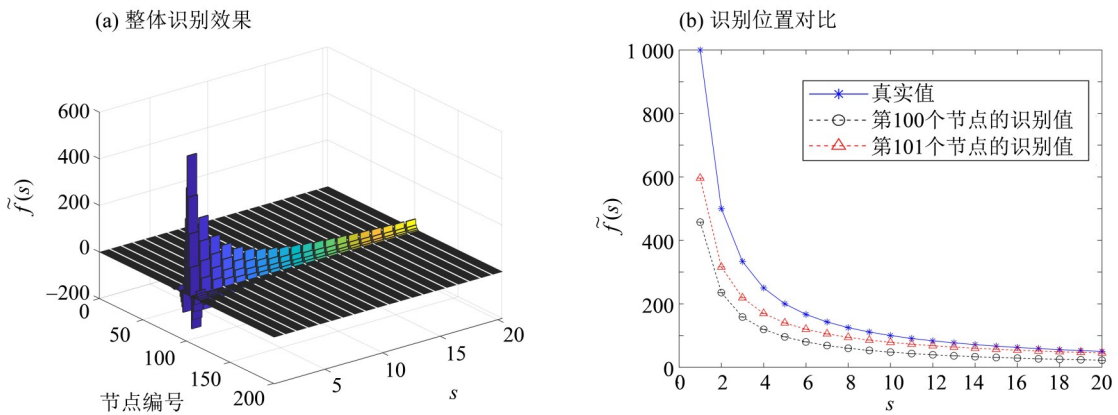


图 4 工况 1 的无正则化识别结果

Fig. 4 Identified results for scenario 1 without regularization

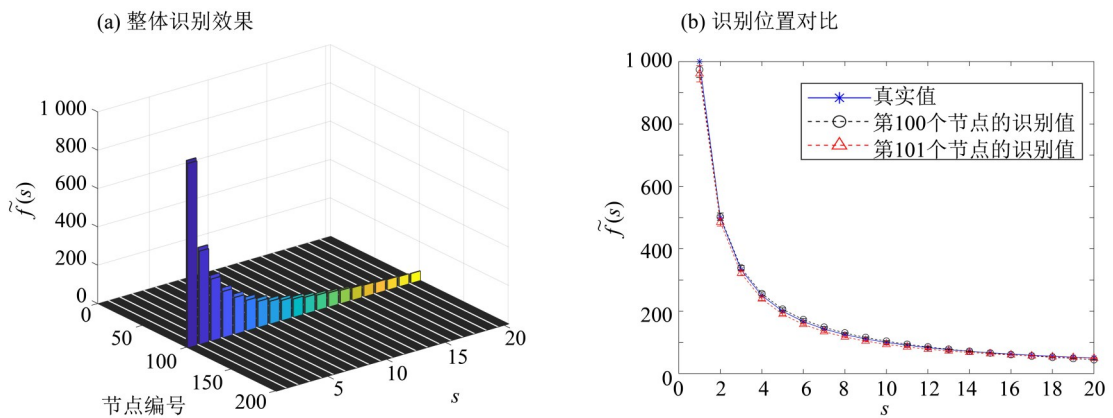


图 5 工况 2 的稀疏正则化识别结果

Fig. 5 Identified results for scenario 2 with sparse regularization

水污染的预防与治理工作提供一定的理论支持。首先, 构造一维点污染源对流-弥散方程的时域有限元格式, 并进行拉普拉斯变化得到频域方程, 接着建立以 l_1 范数项为约束的目标函数, 从而克服污染源识别的不适定性并兼顾点源的稀疏性, 然后利用交替优化法在不同噪声水平下进行迭代求解, 发现所提方法能

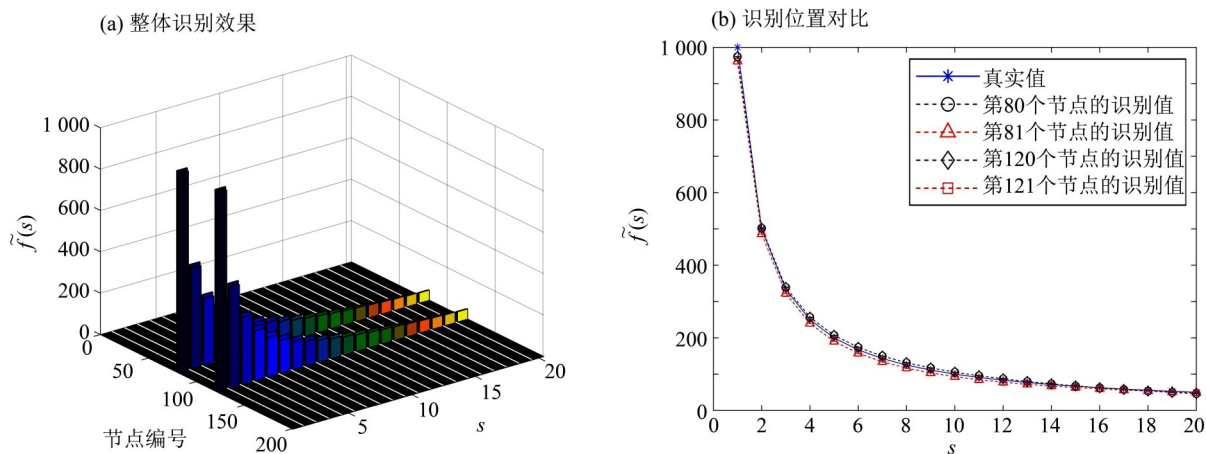


图 6 工况 3 的稀疏正则化识别结果

Fig. 6 Identified results for scenario 2 with sparse regularization

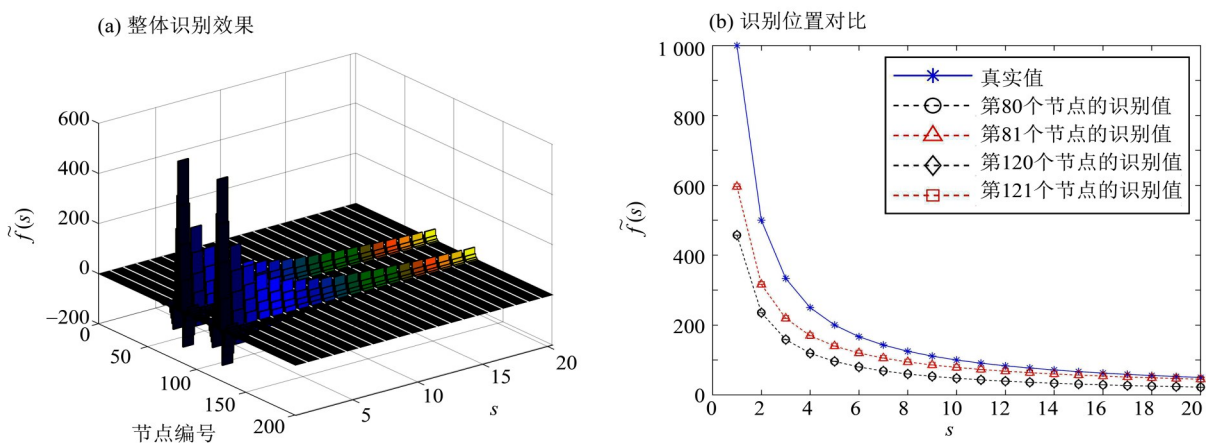


图 7 工况 3 的无正则化识别结果

Fig. 7 Identified results for scenario 3 without regularization

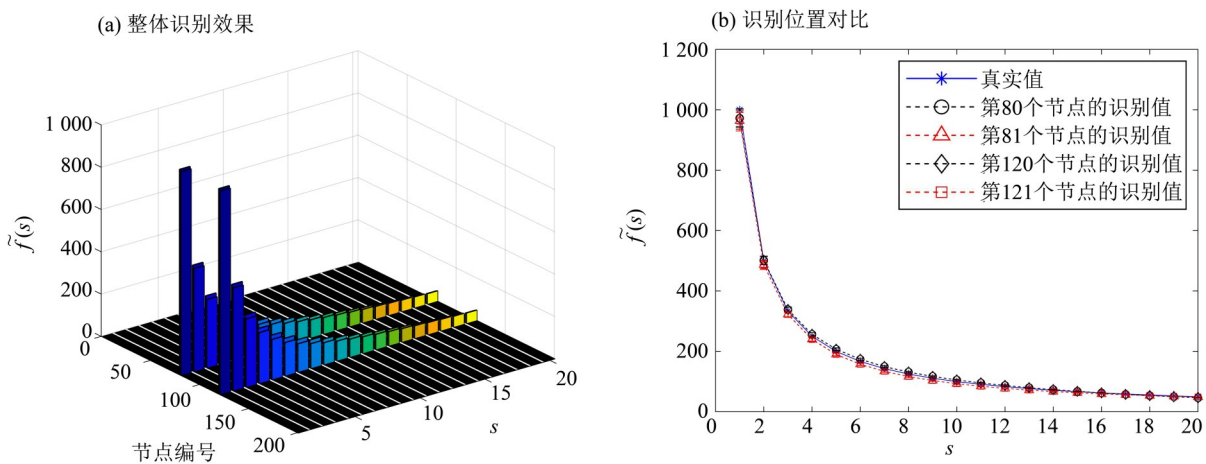


图 8 工况 4 的稀疏正则化识别结果

Fig. 8 Identified results for scenario 4 with sparse regularization

有效识别算例的点源位置及其强度变化,且其抗噪性较强,本论文方法可进一步推广应用到地下水二维点污染源识别问题。

参考文献:

- [1] 姜建军,文冬光.合理开发利用地下水缓解水资源紧缺状况[J].中国水利,2005(13):36-39.
JIANG J J, WEN D G. Exploitation of groundwater resources reasonable to alleviate water shortage [J]. China Water Resources, 2005(13):36-39.
- [2] 王景瑞,胡立堂.地下水污染源识别的数学方法研究进展[J].水科学进展,2017,28(6):943-952.
WANG J R, HU L T. Advances in mathematical methods of groundwater pollution source identification [J]. Advances in Water Science, 2017, 28(6): 943-952.
- [3] SKAGGS T H, KABALA Z J. Recovering the release history of a groundwater contaminant [J]. Water Resources Research, 1994, 30(1): 71-79.
- [4] LI G, LIU J, FAN X, et al. A new gradient regularization algorithm for source term inversion in 1D solute transportation with final observations [J]. Applied Mathematics and Computation, 2008, 196(2): 646-660.
- [5] HUANG C H, LI J X, KIM S. An inverse problem in estimating the strength of contaminant source for groundwater systems [J]. Applied Mathematical Modelling, 2008, 32(4): 417-431.
- [6] 邢利英,张国珍.基于改进的共轭梯度算法重构地下水污染源项[J].水资源保护,2017,33(3):42-46+58.
XING L Y, ZHANG G Z. Reconstruction of groundwater pollution source term with improved conjugate gradient algorithm [J]. Water Resources Protection, 2017, 33(3): 42-46+58.
- [7] ONYARI E, TAIGBENU A. Inverse Green element evaluation of source strength and concentration in groundwater contaminant transport [J]. Journal of Hydroinformatics, 2017, 19(1): 81-96.
- [8] MAZAHERI M, SAMANI J M V, SAMANI H M V. Mathematical model for pollution source identification in rivers [J]. Environmental Forensics, 2015, 16(4): 310-321.
- [9] WANG Z, ZHANG W, WU B. Regularized optimization method for determining the space-dependent source in a parabolic equation without iteration [J]. Journal of Computational Analysis and Applications, 2016, 20(6): 1107-1126.
- [10] 余潇潇,张林,李安国.基于稀疏系统辨识的空气污染源定位算法[J].清华大学学报(自然科学版),2013,53(8): 1077-1081.
YU X X, ZHANG L, LI A G. Sparse system identification algorithm for air pollution source localization [J]. Journal of Tsinghua University (Science and Technology), 2013, 53(8): 1077-1081.
- [11] HASE N, MILLER S M, MAAB P, et al. Atmospheric inverse modeling via sparse reconstruction [J]. Geoscientific Model Development, 2017, 10(10): 3695-3713.
- [12] 潘天成,吕中荣,汪利.基于稀疏正则化的稳态热源识别[J].中山大学学报(自然科学版),2020,59(1):43-49.
PAN T C, LV Z R, WANG L. Steady-state heat source identification based on sparse regularization [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2020, 59(1): 43-49.
- [13] 宋绍禹.基于稀疏正则化的声源识别算法研究[D].重庆:重庆大学,2018.
SONG S Y. Algorithm Study of Sound Sources Identification Based on Sparsity Regularization [D]. Chongqing: Chongqing University, 2018.
- [14] 杨金忠,蔡树英,王旭升.地下水运动数学模型[M].北京:科学出版社,2009.
- [15] ZHANG C D, XU Y L. Comparative studies on damage identification with Tikhonov regularization and sparse regularization [J]. Structural Control and Health Monitoring, 2016, 23(3): 560-579.
- [16] BECK A. On the convergence of alternating minimization for convex programming with applications to iteratively reweighted least squares and decomposition schemes [J]. SIAM Journal on Optimization, 2015, 25(1): 185-209.

(责任编辑 王海蓉)