DOI:10. 13471/j. cnki. acta. snus. 2019. 10. 10. 2019A077

一类带参数的四阶两点边值问题的多解性*

张建梅，李杰梅
（兰州交通大学数理学院，甘肃 兰州 730070）

摘　要：研究一类带参数的四阶两点边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) + \beta u''(t) - \alpha u(t) = f(t, u(t)), & t \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) \end{cases}$$

这里参数 $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ 且 $\alpha \geqslant -\dfrac{\beta^2}{4}$，$\beta < 2\pi^2$，$\dfrac{\alpha}{\pi^4} + \dfrac{\beta}{\pi^2} < 1$。在非线性项 f 满足一定的条件下，运用 Leggett-Williams 不动点定理，获得所讨论问题至少三个非负解的存在性结果。

关键词：四阶；多解性；Leggett-Williams 不动点定理
中图分类号：O175. 8　　**文献标志码**：A　　**文章编号**：0529 -6579（2020）06 -0163 -07

Existence and multiplicity of solutions for a class of fourth-order two-point boundary value problems with parameters

ZHANG Jianmei, *LI Jiemei*
（School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China）

Abstract: A class of fourth-order two-point boundary value problems with parameters

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) + \beta u''(t) - \alpha u(t) = f(t, u(t)), & t \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) \end{cases}$$

are studied, where the parameters $\alpha, \beta \in \mathrm{R}$ and $\alpha \geqslant -\dfrac{\beta^2}{4}$, $\beta < 2\pi^2$, $\dfrac{\alpha}{\pi^4} + \dfrac{\beta}{\pi^2} < 1$. Under certain conditions of the nonlinear term f, the existence of at least three non-negative solutions for the discussed problem are obtained by using fixed point results of Leggett-Williams type.

Key words: fourth-order; multiple positive solutions; Leggett-Williams fixed point theorem

众所周知，四阶常微分方程边值问题在工程中有着重要应用，近年来取得了非常丰硕的成果[1-10]。许多文章为研究此类问题介绍了基本方法[11-12]。2003 年，李永祥[1]用不动点指数理论研究了带两个参数的四阶边值问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) + \beta u''(t) - \alpha u(t) = f(t, u), & t \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) \end{cases} \tag{1}$$

* **收稿日期**：2019-10-10
基金项目：国家自然科学基金（11801243）；国家自然科学基金（61863022）；甘肃省自然科学基金（1308RJ-ZA113）；甘肃省高校基本科研业务费基金（2120840）；甘肃省高等学校创新能力提升项目（2019B-054）
作者简介：张建梅（1991 年生），女；**研究方向**：非线性边值问题；E-mail：19893171158@163. com
通信作者：李杰梅（1981 年生），女；**研究方向**：非线性边值问题；E-mail： lijiemei81@126. com

正解的存在性。其中参数$\alpha,\beta \in \mathbf{R}$且$\alpha \geqslant -\frac{\beta^2}{4}$，$\beta < 2\pi^2$，$\frac{\alpha}{\pi^4} + \frac{\beta}{\pi^2} < 1$，并且分非线性项$f$为超线性与次线性两种情况进行讨论，但并未谈及该问题多解的情况。2009年，文献［2］应用临界点理论和无限维Morse理论，获得了问题（1）非平凡解的存在性。文献［3］研究了类似于问题（1）的离散四阶两点边值问题，用单调算子理论与临界点理论获得了离散四阶边值问题非平凡解的存在性、多解性和不存在性。2010年，马如云等[4]运用Krein-Rutman定理和全局分歧理论研究了问题（1）中$\alpha = \beta = 0$且非线性项f中包含未知函数u以及二阶导数项情况下正解的存在性。2015年，文献［5］运用Krasnoselskii' s不动点定理对问题（1）正解的存在性进行了讨论。但以上文献都未举出例子验证结论的有效性。最近，Cabada等[6]在讨论一类n阶边值问题时，作为特例讨论了问题（1）中方程在其它边值条件下至少三个非负解的存在性，并且方程中参数$\alpha = \beta = 0$，所采用的方法是Leggett-Williams型不动点定理。

受以上工作的启发，本文主要应用Leggett-Williams不动点定理来讨论问题（1）至少三个非负解的存在性。并通过三个模型来验证所获得结果的有效性。

1 预备知识

考虑问题（1）对应的齐次问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) + \beta u''(t) - \alpha u(t) = 0, & t \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases}$$

设$\lambda_i (i = 1,2)$是多项式$p(\lambda) = \lambda^2 + \beta\lambda - \alpha$的根，由$\alpha,\beta$的取值范围可得$\lambda_1 \geqslant \lambda_2 > -\pi^2$。设$\omega_i = \sqrt{|\lambda_i|}$，$G_i(t,s)(i = 1,2)$是问题$-u''(t) + \lambda_i u(t) = 0$，$t \in (0,1)$，$u(0) = u(1) = 0$的Green函数。$G_i(t,s)$的三种情况详见文献［1］。

引理1[1] $G_i(t,s)(i = 1,2)$具有如下性质

（i） $G_i(t,s) > 0$，$t,s \in (0,1)$；

（ii） $k_{1i}(t)G_i(s,s) \leqslant G_i(t,s) \leqslant C_i G_i(s,s)$，$t,s \in [0,1]$，其中

$$k_{1i}(t) = \delta_i G_i(t,t),\quad C_i = \sup_{t,s \in (0,1)} \frac{G_i(t,s)}{G_i(s,s)},\quad \delta_i = \inf_{t,s \in (0,1)} \frac{G_i(t,s)}{G_i(t,t)G_i(s,s)}$$

设$I = [0,1]$，$I_1 = [a,b]$并且$I_1 \subset I$。令

$$k_a(t) = k_{11}(t)k_{12}(t),\quad \phi(s,\tau) = G_1(\tau,\tau)G_2(s,s),\quad K = C_1C_2 > 0,$$
$$m = \min_{t \in I_1} k_a(t) > 0,\quad N_i = \max_{t \in I} G_i(t,t) > 0,\quad n_i = \min_{t \in I_1} G_i(t,t) > 0$$

Banach空间$B = C[0,1]$以及范数$\|u\| = \max_{t \in [0,1]} |u(t)|$，锥

$$P \subset C^+[0,1], P = \left\{ u \in C^+[0,1] \;\middle|\; u(t) \geqslant \frac{k_a(t)}{K}\|u\| \right\}$$

在问题（1）中，本文假设如下条件成立：

（H） 当$(t,u) \in I \times \mathrm{R}^+$时，非线性项$f(t,u(t)) \geqslant 0$并且连续。

显然，问题（1）的解为

$$u(t) = \int_0^1\int_0^1 G_1(t,\tau)G_2(\tau,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \tag{2}$$

定义算子$T: C^+[0,1] \to C^+[0,1]$，即

$$Tu(t) = \int_0^1\int_0^1 G_1(t,\tau)G_2(\tau,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau$$

显然，$T: P \to P$是全连续算子。

定义1 设P为实Banach空间B中的锥，且有

$$g: P \to [0,+\infty),\quad g(tx + (1-t)y) \geqslant (\leqslant) tg(x) + (1-t)g(y)$$

称g为P中的非负连续凹（凸）函数。

设β,γ,θ是锥P中的非负连续凸函数，α,ψ是锥P中的非负连续凹函数，d,p,q为非负实数，定义锥P的子空间如下

$$P(\gamma,r)=\{u\in P \mid \gamma(u)\leqslant r\},$$

$$P(\gamma,\alpha,p,r)=\{u\in P \mid p\leqslant\alpha(u),\gamma(u)\leqslant r\},$$

$$Q(\gamma,\beta,d,r)=\{u\in P \mid \beta(u)\leqslant d,\gamma(u)\leqslant r\},$$

$$P(\gamma,\theta,\alpha,p,q,r)=\{u\in P \mid p\leqslant\alpha(u),\theta(u)\leqslant q,\gamma(u)\leqslant r\}$$

本文主要结果证明过程中所用工具为文献［6］中的定理2.5。

2 主要结论及证明

定理1 设存在正数p,q,r满足不等式$0<p<q<\frac{K}{m}q\leqslant r$。设非线性项$f$满足下列条件

（Ⅰ）$f(t,u)\leqslant\dfrac{r}{C_1C_2\int_0^1\int_0^1\phi(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau}$，当$t\in[0,1]$，$u\in[0,r]$；

（Ⅱ）$f(t,u)<\dfrac{p}{C_1C_2\int_0^1\int_0^1\phi(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau}$，当$t\in[0,1]$，$u\in[0,p]$；

（Ⅲ）$f(t,u)\geqslant\dfrac{u}{\delta_1\delta_2n_1n_2\int_a^b\int_a^b\phi(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau}$，当$t\in[a,b]$，$u\in\left[q,\frac{K}{m}q\right]$；且$u=q$时不等式严格成立。

则算子T至少存在三个不动点u_1，u_2，$u_3\in\{u\in P \mid \|u\|\leqslant r\}$满足下列不等式

$$\max_{t\in I_1}u_1(t)<p,\quad q<\min_{t\in I_1}u_2(t),\quad p<\max_{t\in I_1}u_3(t),\quad \min_{t\in I_1}u_3(t)<q$$

证明 此证明过程主要基于文献［6］中定理2.5。令

$$\alpha(u):=\min_{t\in I_1}u(t),\quad \theta(u):=\max_{t\in I_1}u(t),\quad \gamma(u):=\|u\|,\quad \psi(u)=\alpha(u),\quad \beta(u)=\theta(u)$$

显然，α,ψ是锥P中的非负凹函数，β,θ,γ是锥P中非负凸函数。又有$T:P\to P$是全连续算子。现在验证$T\left(\overline{P(\gamma,r)}\right)\subset\overline{P(\gamma,r)}$。设$u\in\overline{P(\gamma,r)}$，即$\|u\|\leqslant r$，由条件（I）可得

$$\begin{aligned}\|Tu\|&=\max_{t\in I}\int_0^1\int_0^1G_1(t,\tau)G_2(\tau,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\&\leqslant\max_{t\in I}\int_0^1\int_0^1C_1C_2\phi(s,\tau)f(s,u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\&\leqslant C_1C_2\int_0^1\int_0^1\phi(s,\tau)\frac{r}{C_1C_2\int_0^1\int_0^1\phi(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau=r\end{aligned}$$

故$T\left(\overline{P(\gamma,r)}\right)\subset\overline{P(\gamma,r)}$。显然，对$u\in\overline{P(\gamma,r)}$，有$\alpha(u)\leqslant\beta(u)=\theta(u)$，$\gamma(u)=\|u\|$。

设$u_q(t)=\frac{K}{m}q$，则有$u_q(t)\in\left\{u\in P\left(\gamma,\theta,\alpha,q,\frac{K}{m}q,r\right)\middle|\alpha(u)>q\right\}$，即

$$u_q(t)\in\left\{u(t)\in P\ \middle|\ q<\min_{t\in I_1}u(t),\ \max_{t\in I_1}u(t)\leqslant\frac{K}{m}q,\ \|u\|\leqslant r\right\}\neq\varnothing$$

对$u\in P\left(\gamma,\theta,\alpha,q,\frac{K}{m}q,r\right)$，由条件（Ⅲ）可得

$$\begin{aligned}\alpha(Tu)&=\min_{t\in I_1}\int_0^1\int_0^1G_1(t,\tau)G_2(\tau,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\&\geqslant\min_{t\in I_1}\int_0^1\int_0^1k_{11}(t)k_{12}(\tau)\phi(s,\tau)f(s,u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\\&\geqslant\delta_1\delta_2n_1n_2\int_a^b\int_a^b\phi(s,\tau)\frac{u(s)}{\delta_1\delta_2n_1n_2\int_a^b\int_a^b\phi(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau\end{aligned}\tag{3}$$

假设存在$s_1 \in I_1$使得$u(s_1) > q$，则必定存在I_1的非平凡子区间$I_0 \subset I_1$，当$s \in I_0$时，有$u(s) > q$。于是可以推出$\alpha(Tu) > q$。设对任意$s \in I_1$，有$u(s) = q$，由条件（I）和（3）式可得

$$\begin{aligned}\alpha(Tu) &\geqslant \delta_1\delta_2 n_1 n_2\int_a^b\int_a^b \phi(s,\tau) f(s,q)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \\ &> \delta_1\delta_2 n_1 n_2\int_a^b\int_a^b \phi(s,\tau)\frac{q}{\delta_1\delta_2 n_1 n_2\int_a^b\int_a^b \phi(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau = q\end{aligned}$$

满足文献［6］中定理2.5的条件（a）。下面验证文献［6］中定理2.5的条件（b）。

设$u_p(t) = \frac{m}{K}p$，则有$u_p(t) \in \left\{u \in P\left(\gamma,\beta,\psi,\frac{m}{K}p,p,r\right)\middle|\beta(u) < p\right\}$，即

$$u_p(t) \in \left\{u(t) \in P \;\middle|\; \frac{m}{K}p < \min_{t\in I_1} u(t),\;\; \max_{t\in I_1} u(t) < p,\; \|u\| \leqslant r\right\} \neq \varnothing$$

对$u \in P\left(\gamma,\beta,\psi,\frac{m}{K}p,p,r\right)$，由条件（II）可得

$$\begin{aligned}\beta(Tu) &= \max_{t\in I_1}\int_0^1\int_0^1 G_1(t,\tau)G_2(\tau,s) f(s,u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant \max_{t\in I_1}\int_0^1\int_0^1 C_1C_2\phi(s,\tau) f(s,u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant C_1C_2\int_0^1\int_0^1\phi(s,\tau)\frac{p}{C_1C_2\int_0^1\int_0^1\phi(s,\tau)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau = p\end{aligned}$$

满足文献［6］中定理2.5的条件（b）。下面验证文献［6］中定理2.5的条件（c）。

设$C_0 = \int_0^1 G_1(\tau,\tau)G_2(\tau,\tau) > 0$，$\sigma = \frac{\delta_1\delta_2 C_0 n_1}{C_1C_2N_1} > 0$。当$u \in P(\gamma,\alpha,\sigma q,r)$，$\theta(Tu) > q$，有

$$\begin{aligned}\sigma q < \sigma\theta(Tu) &\leqslant \sigma\max_{t\in I_1}\int_0^1\int_0^1 C_1G_1(\tau,\tau)C_2G_2(s,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant \frac{\delta_1\delta_2C_0n_1}{C_1C_2N_1}\int_0^1 C_1C_2N_1G_2(s,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s \\ &= \min_{t\in I_1}\int_0^1\int_0^1\delta_1G_1(t,t)G_1(\tau,\tau)\delta_2G_2(\tau,\tau)G_2(s,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant \min_{t\in I_1}\int_0^1\int_0^1 G_1(t,\tau)G_2(\tau,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau = \alpha(Tu)\end{aligned}$$

满足文献［6］中定理2.5的条件（c）。下面验证文献［6］中定理2.5的条件（d）。

对$u \in Q(\gamma,\beta,p,r)$，$\psi(Tu) < \sigma p$，可得

$$\begin{aligned}\beta(Tu) &\leqslant \max_{t\in I_1}\int_0^1\int_0^1 C_1G_1(\tau,\tau)C_2G_2(s,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant C_1C_2N_1\int_0^1 G_2(s,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s \\ &= \frac{C_1C_2N_1}{\delta_1\delta_2C_0n_1}\int_0^1\delta_1\delta_2n_1C_0G_2(s,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s \\ &\leqslant \frac{1}{\sigma}\min_{t\in I_1}\int_0^1\int_0^1\delta_1G_1(t,t)G_1(\tau,\tau)\delta_2G_2(\tau,\tau)G_2(s,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \\ &\leqslant \frac{1}{\sigma}\min_{t\in I_1}\int_0^1\int_0^1 G_1(t,\tau)G_2(\tau,s)f(s,u(s))\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\sigma}\psi(Tu) < \frac{1}{\sigma}\sigma p = p\end{aligned}$$

即对$u \in Q(\gamma,\beta,p,r)$，$\psi(Tu) < \sigma p$，有$\beta(Tu) < p$。满足文献［6］中定理2.5的条件（d）。

由文献［6］中定理2.5知，积分算子T在锥中至少有三个不动点u_1, u_2, u_3满足

$$p > \beta(u_1) = \max_{t\in I_1} u_1(t),\quad q < \alpha(u_2) = \min_{t\in I_1} u_2(t),$$

$$p < \beta(u_3) = \max_{t\in I_1} u_3(t),\quad q < \alpha(u_3) = \min_{t\in I_1} u_3(t)$$

从而问题（1）至少有三个非负解，证毕。

值得注意的是，当非线性项 $f(t,u(t))=0$ 时，由（2）式可得定理1中的三个解中有一个为零解。

3 主要应用

当 α,β 的取值范围不同时，边值问题（1）对应的 Green 函数有三种情况，在文献［1］中已有详细说明。取 $I_1=\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$。首先研究下列问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)=f(t,u), & t\in(0,1) \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0 \end{cases} \tag{4}$$

显然 $\alpha=\beta=0$，$\lambda_i=0$，由文献［1］可知 $C_i=\delta_i=1$，计算可得

$$m=\frac{4}{81},\quad K=C_1C_2=1,\quad n_1=\frac{2}{9},\quad n_2=\frac{2}{9},\quad N_1=\frac{1}{4}$$

特别地，取非线性项 f 为

$$f(t,u)=\begin{cases}(2+3t)u^2, & u\leqslant\frac{1}{2}, \\ \left(u-\frac{1}{2}\right)u^4+(2+3t)u^2, & \frac{1}{2}<u<17, \\ \frac{2\,757\,349}{2}+867t, & u\geqslant 17\end{cases}$$

取 $p=\frac{1}{2}$，$q=17$，$r=38\,321$，则有

（i） 当 $t\in[0,1]$，$u\in[0,38\,321]$，于是 $f(t,u)\leqslant\frac{2\,757\,349}{2}+867<36\times 38\,321=1\,379\,556$；

（ii） 当 $t\in[0,1]$，$u\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$，有 $f(t,u)=(2+3t)u^2\leqslant\frac{5}{4}<36\times\frac{1}{2}=18$；

（iii） 当 $t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]$，$u\in\left[17,\frac{1\,377}{4}\right]$，有 $f(t,u)=\dfrac{\frac{2\,757\,349}{2}+867t}{u}\cdot u\geqslant\frac{16\,547\,562}{4\,131}\cdot u>\frac{531\,441}{169}u$。

非线性项 f 满足定理 1 中的条件，故边值问题（4）至少存在三个非负解 $u_1,u_2,u_3\in\{u\in P\mid \|u\|\leqslant 38\,321\}$ 满足下列不等式

$$\max_{t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]}u_1(t)<\frac{1}{2},\quad \min_{t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]}u_2(t)>17,\quad \frac{1}{2}<\max_{t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]}u_3(t),\quad \min_{t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]}u_3(t)<17$$

当 $\alpha=-2$，$\beta=3$ 时，有 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$，$\omega_1=1$，$\omega_2=\sqrt{2}$，则（1）变为如下问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t)+3u''(t)+2u(t)=f(t,u), & t\in(0,1), \\ u(0)=u(1)=u''(0)=u''(1)=0 \end{cases} \tag{5}$$

显然，$-\pi^2<\lambda_i<0\ (i=1,2)$，由文献［1］可知 $C_i=\frac{1}{\sin\omega_i}$，$\delta_i=\omega_i(i=1,2)$，故而有

$$m=\frac{17}{190},\quad K=\frac{1\,700}{1\,413},\quad n_1=\frac{69}{341\cdot\sin 1},\quad n_2=\frac{326}{887\cdot\sqrt{2}\cdot\sin\sqrt{2}},\quad N_1=\frac{365}{1\,588\cdot\sin 1}$$

特别地，考虑下列非线性项

$$f(t,u)=\begin{cases}1\,094\left(\frac{33}{28}t+\frac{23}{28}\right)u^3, & u\leqslant 15 \\ 3\,692\,250\left(\frac{33}{28}t+\frac{23}{28}\right), & u>15\end{cases}$$

取 $p=\frac{1}{10}$，$q=1$，$r=308\,730$，则有

（iv） 当$t \in [0,1]$，$u \in [0,308\,730]$，有$f(t,u) \leqslant 7\,384\,500 < \dfrac{12\,103}{506} \times 308\,730 = \dfrac{1\,868\,279\,595}{253}$；

（v） 当$t \in [0,1]$，$u \in \left[0,\dfrac{1}{10}\right]$，有$f(t,u) = 1\,094\left(\dfrac{33}{28}t + \dfrac{23}{28}\right)u^3 \leqslant \dfrac{547}{250} < \dfrac{12\,103}{5\,060}$；

（vi） 当$t \in \left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$，$u \in \left[1,\dfrac{3\,523}{262}\right]$，有$f(t,u) = 1\,094\left(\dfrac{33}{28}t + \dfrac{23}{28}\right)u^3 \geqslant \dfrac{9\,299}{7}u > \dfrac{38\,494}{29}u$。

即非线性项f满足定理1中条件，故边值问题（5）至少存在三个非负解$u_1,u_2,u_3 \in \left\{u \in P \,\middle|\, \|u\| \leqslant 308\,730\right\}$满足下列不等式

$$\max_{t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]} u_1(t) < \frac{1}{10},\quad \min_{t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]} u_2(t) > 1,\quad \max_{t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]} u_3(t) > \frac{1}{10},\quad \min_{t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]} u_3(t) < 1$$

当$\alpha = -2$，$\beta = -3$时，有$\lambda_1 = 1$，$\lambda_2 = 2$，$\omega_1 = 1$，$\omega_2 = \sqrt{2}$，则问题（1）变为如下问题

$$\begin{cases} u^{(4)}(t) - 3u''(t) + 2u(t) = f(t,u(t)), & t \in (0,1) \\ u(0) = u(1) = u''(0) = u''(1) = 0 \end{cases} \tag{6}$$

显然$\lambda_i > 0\ (i = 1,2)$，由文献［1］可知$C_i = 1$，$\delta_i = \dfrac{\omega_i}{\sinh\omega_i}\ (i = 1,2)$。故而有

$$m = \frac{187}{7\,457},\ K = 1,\ n_1 = \frac{1\,946}{7\,991\cdot\sinh 1},\ n_2 = \frac{671}{1\,260\cdot\sqrt{2}\cdot\sinh\sqrt{2}},\ N_1 = \frac{104}{383\cdot\sinh 1}$$

设非线性项f如下

$$f(t,u) = \begin{cases} (213t + 412)u^3, & u \leqslant 170 \\ 4\,913\,000(213t + 412), & u > 170 \end{cases}$$

取$p = \dfrac{1}{5}$，$q = 4$，$r = 71\,120\,000$，则有

（vii）当$t \in [0,1]$，$u \in [0,71\,120\,000]$，有$f(t,u) \leqslant 3\,070\,625\,000 < \dfrac{3\,411}{79} \times 71\,120\,000 = \dfrac{242\,590\,320\,000}{79}$；

（viii） 当$t \in [0,1]$，$u \in \left[0,\dfrac{1}{5}\right]$，有$f(t,u) = (213t + 412)u^3 \leqslant 5 < \dfrac{3\,411}{79} \times \dfrac{1}{5} = \dfrac{3\,411}{395}$；

（ix） 当$t \in \left[\dfrac{1}{3},\dfrac{2}{3}\right]$，$u \in \left[4,\dfrac{29\,816}{187}\right]$，有$f(t,u) = (213t + 412)u^3 \geqslant 7\,728u > \dfrac{92\,605}{12}u$。

即f满足定理1中条件，故问题（6）至少存在三个非负解$u_1,u_2,u_3 \in \left\{u \in P \,\middle|\, \|u\| \leqslant 71\,120\,000\right\}$，且满足

$$\max_{t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]} u_1(t) < \frac{1}{5},\quad \min_{t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]} u_2(t) > 4,\quad \max_{t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]} u_3(t) > \frac{1}{5},\quad \min_{t\in\left[\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right]} u_3(t) < 4$$

参考文献：

［1］ LI Y X. Positive solutions of fourth-order boundary value problems with two parameters［J］. Math Anal Appl，2003，281：477-484.

［2］ CUI Y Q. Multiple solutions to fourth-order boundary value problems［J］. Appl Math Comput，2009，57：643-649.

［3］ HE T S，SU Y L. On discrete fourth-order boundary value problems with three parameters［J］. Appl Math Comput，2010，233（10）：2506-2520.

［4］ MA R Y，XU L. Existience of positive solutions of a nonlinear fourth-order boundary value problem［J］. Appl Math Lett，2010，23：537-543.

［5］ 岳蔓，韩晓玲. 带参数的四阶两点边值问题正解的存在性［J］. 四川师范大学学报（自然科学版），2015，38（3）：333-336.
YUE M，HAN X L. Existence of solutions for fourth-order two-point boundary value problems with parameters［J］. Journal of Sichuan Normal University：Natueal Science，2015，38（3）：333-336.

［6］ CABADA A，SAAVEDRA L. Existence of solutions for n^{th} nonlinear differential boundary value problems by means of fixed point theorems［J］. Nonlinear Anal Real World Appl，2018，42：180-206.

[7] CABADA A，PRECUP R，SAAVEDRA L，et al. Multiple solutions to a fourth-order boundary value problem [J]. Differential Equations，2016，254：1-18.
[8] AVERY R I，ELOE P，HENDERSON J. A Leggett-Williams type theorem applied to a fourth order problem [J]. Commun Appl Anal，2012，16(4)：578-588.
[9] GUPTA C P. Existence and uniqueness theorems for a bending of an elastic beam equation [J]. Appl Anal，1988，26：289-304.
[10] GUPTA C P. Existence and uniqueness results for the bending of an elastic beam equation at resonance [J]. Math Anal Appl，1988，135：208-225.
[11] 林壮鹏，徐远通，郭志明. 一类非线性算子的不动点理论及其应用[J]. 中山大学学报(自然科学版)，2000，39(6)：26-29.
LIN Z P，XU Y T，GUO Z M. Fixed point theorems of a class of nonlinear operators and their applications [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni，2000，39(6)：26-29.
[12] 成立花. Banach空间混合型泛函方程的稳定性问题[J]. 中山大学学报(自然科学版)，2017，56(6)：68-71.
CHENG L H. Stability of a mixed type functional equation in Banach spaces [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni，2017，56(6)：68-71.

（责任编辑　冯兆永）

•简讯•

《中山大学学报(自然科学版)》多篇论文荣获第五届广东省期刊优秀作品奖

近日，第五届广东省期刊优秀作品评选活动揭晓。我刊共有8篇文章获得优秀作品奖，其中一等奖2篇、二等奖3篇、三等奖3篇。

本次活动是在广东省委宣传部和广东省新闻出版广电局指导下，由广东省期刊协会主办的，得到了全省382家期刊和150家侨刊乡讯的积极响应，共有2015年11月—2020年3月间刊出的参评文章、栏目、版式、封面和摄影美术作品3461件参选，最终评出了一批具有较好社会效益、较高科学价值的作品。

《中山大学学报(自然科学版)》第五届广东省期刊优秀作品名单

序号	文章名	作者	责任编辑	刊期	奖项
1	以化橘红为基源的一类新药柚皮苷的临床前研究	李沛波，王永刚，吴忠，彭维，杨翠平，聂怡初，刘孟华，罗钰龙，邹威，柳颖，王声，陈妍，苏畅，方思琪，苏薇薇	张冰	2015年06期	一等奖
2	广州市绿地生态网络的构建与评价	蒋思敏，张青年，陶华超	秦社彩	2016年04期	一等奖
3	多种细菌与凡纳滨对虾肝胰腺坏死症（HPNS）爆发有关	黄志坚，陈勇贵，翁少萍，路晓锋，钟立洪，范文洲，陈旭凌，张慧文，何建国	张冰	2016年01期	二等奖
4	核主成分分析网络的人脸识别方法	胡伟鹏，胡海峰，顾建权，李昊曦	张楚民	2016年05期	二等奖
5	带后续迭代的双极S函数激励的WASD神经网络	张雨浓，肖争利，丁思彤，毛明志，刘锦荣	冯兆永	2016年04期	二等奖
6	2000-2010年广州市人口老龄化空间变动及其影响因素研究	周春山，李一璇，童新梅	秦社彩	2016年01期	三等奖
7	缬氨酸分子的手性转变及水分子的催化机理	闫红彦，王佐成，邹晶，佟华，杨晓翠	朱娴	2016年02期	三等奖
8	非线性系统准周期振动的多时间尺度IHB法	张丹伟，刘济科，黄建亮	王海蓉	2018年06期	三等奖

《中山大学学报（自然科学版）》编辑部