

基于频率数据与稀疏正则化的悬臂梁损伤识别*

聂滋森, 李冬安, 曹明志, 汪利, 吕中荣
(中山大学航空航天学院, 广东 广州 510275)

摘要: 振动频率是描述结构自身振动特性的数据, 因其比较容易获取, 常被用于识别结构损伤。但由于频率数据的量相对较少, 损伤识别通常是非适定的。文章构造了一个新的基于频率数据的目标函数, 发展了一种新的稀疏正则化方法以克服损伤识别问题的非适定性。该方法运用少量的频率数据就能识别出梁结构的损伤位置。最后, 将该方法运用到悬臂梁结构的损伤识别实验当中去, 发现识别出的损伤与实际相符, 验证了该方法的正确性。

关键词: 损伤识别; 稀疏正则化; 频率数据; 交替最小化方法; 阈值设定法

中图分类号: O327 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2020) 06-0148-06

Structural damage identification based on frequency data and sparse regularization

NIE Zisen, LI Dongan, CAO Mingzhi, WANG Li, LU Zhongrong

(School of Aeronautics and Astronautics, Sun-Yat sen University, Guangzhou 510275, China)

Abstract: Vibration frequency describes the structure's vibration characteristics. Since frequency data can be easily obtained, it's often applied in the identification of structural damage. However, there's a defect that the amount of frequency data is usually small, which would cause the identification to be ill-posed. This paper proposes a new method in damage identification using frequency data. In this method, we introduce sparse regularization to overcome the ill-posedness of the problem. The proposed damage identification approach can work for merely low order frequency data. Damage identification of a cantilever beam is conducted to verify the proposed approach. As a result, the exact position of the damage can be determined, which proves the approach to be functional and accurate.

Key words: damage identification; sparse regularization; vibration frequency data; alternating minimization approach; threshold setting method

近年来, 随着综合国力的不断增强, 国家在高层建筑、桥梁、海洋钻探平台、机械、船舶、飞机等大型结构的建设投入了巨额资金。在此类结构设施实际的工作和运行中, 由于复杂的工作环境、荷载长期作用引起的疲劳、地震等偶然自然灾害的作用, 结构通常会不可避免地出现损伤破坏。因此, 发展针对工程结构的损伤识别技术有着十分重要的理论和现实意义。为此, 国内外的研究者提出了许多基于结构振动响应的损伤识别法, 如时域、频域灵敏度分析的有限元模型修正法、群智能优化算法等。但由于损伤识别是典型的反问题, 其具有非适定性, 即对测量误差十分敏感。因此, 发展新的能克服损伤识别非适定性的方法是必要的。

* 收稿日期: 2019-11-05

基金项目: 国家自然科学基金 (11702336)

作者简介: 聂滋森 (1998年生), 男; 研究方向: 工程力学; E-mail: niezs@mail2.sysu.edu.cn

通信作者: 汪利 (1988年生), 男; 研究方向: 工程力学, 结构健康监测; E-mail: wangli75@mail.sysu.edu.cn

为了克服损伤识别的非适定性, 可引入 Tikhonov 正则化^[1-2] 和稀疏正则化^[3] (或称为 L1 范数正则化^[4-5] / 压缩感知^[6])。稀疏正则化假设损伤位置尽可能地稀少^[3]。这种假设对于损伤识别是非常合理的, 因为结构的实际损坏经常发生在裂缝、塑性等几个稀疏位置。正则化的本质是引入额外的约束, 在更多约束下, 非适定的反问题变成了适定的问题。稀疏正则化已被证明即使只有少量测量数据^[7], 也可以明显提高损伤识别的准确性和鲁棒性^[8-10]。本文使用频率数据进行损伤识别分析。首先, 基于梁线性振动的本征方程, 构造了一个新的关于损伤参数解耦的目标函数。然后, 通过稀疏正则化来设置约束条件, 求得该目标函数的极值, 并由此推断梁的损伤位置和程度。最后, 通过悬臂梁实验, 验证了本文所提损伤识别方法在识别损伤位置时的有效性。

1 基于频率数据的结构损伤识别方法

1.1 目标函数的构建

本文考虑使用频率数据识别结构损伤, 其可描述为: 如何根据振动测量到的频率反推识别结构损伤的部位和程度。根据线性振动理论, 结构的特征振动方程为:

$$\mathbf{K}\Phi_k = \lambda_k \mathbf{M}\Phi_k \quad (1)$$

其中, \mathbf{K} 是结构对应的整体刚度矩阵, \mathbf{M} 是质量矩阵, λ_k 是对应特征向量 Φ_k 的特征值。通常, 损伤会引起刚度的折减, 可以引入损伤参数 α_i ($0 < \alpha_i \leq 1$) 来代表结构在该处受到损伤的程度。此时, 刚度矩阵可以表示为:

$$\mathbf{K}(\alpha) = \sum_{i=0}^m \alpha_i \mathbf{K}_i \quad (2)$$

本文采用解耦的方式处理损伤识别, 关键在于刚度矩阵的特征参数分解^[9], 即:

$$\sum_{i=0}^m \alpha_i \mathbf{K}_i = \sum_{i=0}^m \mathbf{L}_i (\alpha_i \mathbf{I}_{r_i}) \mathbf{R}_i = (\mathbf{L}_0, \mathbf{L}_1, \dots, \mathbf{L}_m) \mathbf{D}(\alpha) \begin{pmatrix} \mathbf{R}_0 \\ \mathbf{R}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{R}_m \end{pmatrix} \quad (3)$$

其中:

$$\mathbf{D}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_0 \mathbf{I}_{r_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha_1 \mathbf{I}_{r_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_m \mathbf{I}_{r_m} \end{pmatrix}, r_i = \text{rank}(\mathbf{K}_i), i = 0, 1, \dots, m$$

对于本文研究的 Euler 梁问题^[9], 可有

$$\mathbf{L}_i = \begin{pmatrix} 0 & 2\sqrt{3} \\ L & \sqrt{3}L \\ 0 & -2\sqrt{3} \\ -L & \sqrt{3}L \end{pmatrix} \quad (4)$$

$$\mathbf{R}_i = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 0 & L & 0 & -L \\ 2\sqrt{3} & \sqrt{3}L & -2\sqrt{3} & \sqrt{3}L \end{pmatrix}$$

考虑式 (3) 中的刚度分解, 损伤梁的振动方程可以表示为:

$$\mathbf{L}\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{R}\Phi_k = \lambda_k \mathbf{M}\Phi_k \quad (5)$$

对于静定结构 (包括悬臂梁), 根据实际约束简化后, \mathbf{L} 是可逆的。从而, 损伤梁的振动方程可以继续化为:

$$\mathbf{D}(\alpha)\mathbf{R}\Phi_k = \mathbf{L}^{-1}\lambda_k \mathbf{M}\Phi_k \quad (6)$$

由于实验数据存在一定的误差, 左边项和右边项不可避免地不能相等, 因此可以根据测量的频率数据 $\{\lambda_k\}_{k \in S}$ (S 表示测量的频率的阶次的集合) 构造目标函数:

$$g(\alpha, \{\Phi_k\}_{k \in S}) = \sum_{k \in S} \|D(\alpha)R\Phi_k - L^{-1}\lambda_k M\Phi_k\|^2 \quad (7)$$

自此, 损伤识别问题变成了一个优化问题: 通过求式 (7) 函数的最小值, 可以定出损伤的参数 α 。通常, 损伤识别是非适定的, 它对测量噪声非常敏感。为了克服这一困难, 可引入损伤位置的稀疏性约束。具体说来, 令 α_0 表示未损伤结构的参数, 其元素均为 1。损伤位置的稀疏性可描述为: $\alpha - \alpha_0$ 只有少量的非零元素。为施加稀疏性约束条件, 需在目标函数中引入 L_1 范数项 $\|\alpha - \alpha_0\|_1$, 此时目标函数变为

$$g_\mu(\alpha, \{\Phi_k\}_{k \in S}) = \sum_{k \in S} \|D(\alpha)R\Phi_k - L^{-1}\lambda_k M\Phi_k\|^2 + \mu \|\alpha - \alpha_0\|_1 \quad (8)$$

其中, $\mu > 0$ 为待定正则化参数。

1.2 根据目标函数求解损伤参数

本文采用交替最小化方法求解损伤识别问题 (8), 其具体步骤为: 首先设定初始损伤参数为未损伤结构的参数, 即 $\alpha^{(0)} = \alpha_0$, 然后进行交替迭代求解:

1) 已知 $\alpha^{(j-1)}$, 更新 Φ_k 。为此, 可以有

$$\begin{aligned} g_\mu(\alpha^{(j-1)}, \{\Phi_k\}_{k \in S}) &= \sum_{k \in S} \|(D(\alpha^{(j-1)})R\Phi_k - L^{-1}\lambda_k M\Phi_k)\|^2 + \mu \|\alpha - \alpha_0\|_1 \\ &= \sum_{k \in S} \Phi_k^T B_k \Phi_k + \mu \|\alpha - \alpha_0\|_1 \end{aligned} \quad (9)$$

考虑振型 Φ_k 的比例性, Φ_k 为矩阵 B_k 的最小特征值对应的特征向量。

2) 更新损伤参数 α 。为了求解模态参数, 需要将目标函数以另一种形式展开:

$$\begin{aligned} g_\mu(\alpha, \{\Phi_k\}_{k \in S}) &= \sum_{k \in S} \|D(\alpha)a_k - b_k\|^2 + \mu \|\alpha - \alpha_0\|_1 \\ &= \sum_{i=0}^m \left\{ a_i \alpha_i^2 - 2b_i a_i + \mu \|\alpha - \alpha_0\|_1 \right\} + c \end{aligned} \quad (10)$$

$$n_0 = 0, n_i = \sum_{l=0}^{i-1} r_l, a_i = \sum_{k \in S} \sum_{l=1}^{r_i} (a_k)_{, n_i+l}^2 > 0, b_i = a_i = \sum_{k \in S} \sum_{l=1}^{r_i} \left((a_k)_{, n_i+l} \right) \left((b_k)_{, n_i+l} \right), c = \sum_{k \in S} b_k^T b_k$$

其中: $a_k = R\Phi_k^{(j)}$, $b_k = \hat{\lambda}_k L^{-1} M\Phi_k^{(j)}$ 。可以看出, $g_\mu(\alpha, \{\Phi_k\}_{k \in S})$ 关于损伤参数 α 是解耦的, 即参数更新步可被分成一系列单变量的优化问题:

$$\alpha_i^{(j)} = \operatorname{argmin} \left\{ a_i \alpha_i^2 - 2b_i \alpha_i + \mu \|\alpha_i - \alpha_{0i}\| \right\} = \begin{cases} \frac{b_i - \frac{\mu}{2}}{a_i}, & \text{if } \mu < 2(b_i - a_i \alpha_{0i}) \\ \frac{b_i + \frac{\mu}{2}}{a_i}, & \text{if } \mu < 2(-b_i + a_i \alpha_{0i}) \\ \alpha_{0i}, & \text{if } \mu \geq 2|b_i - a_i \alpha_{0i}| \end{cases} \quad (11)$$

为了确定合适的正则化系数 μ , 定义阈值集 $\Gamma = \{\mu_{icr} := 2|b_i - a_i \alpha_{0i}|, i = 1, 2, \dots, m\}$, 并将其元素按降序重新排列 $\Gamma = \{\hat{\mu}_{1cr} \geq \hat{\mu}_{2cr} \geq \dots \geq \hat{\mu}_{mcr}\}$ 。根据式 (11), 如果 $\mu = \hat{\mu}_{(l+1)cr} < \hat{\mu}_{lcr}$, 则必然有 l 个位置满足 $\alpha_i^{(j)} \neq \alpha_{0i}$, 意味着可能存在 l 个损伤。如果整个结构存在 n_d 处损伤, 则需选择 $\mu = \hat{\mu}_{lcr}$, 其满足 $l \geq n_d + 1$ 。在实际操作中, 可根据损伤情况选择 $\mu = \hat{\mu}_{lcr}$, l 与损伤数目相关。综上所述, 本文所提损伤识别算法流程可见图 1。

2 实验验证

2.1 悬臂梁振动测试

通过振动梁实验, 验证损伤识别方法的有效性。实验的研究对象为 $800 \times 50 \times 5$ mm 的 302 号不锈钢梁 (弹性模量为 193 GPa, 密度为 7930 kg/m^3), 开展力锤法实验并使用加速度传感器测量梁的加速度, 部分实验仪器见图 2。对加速度数据进行处理, 可得到低阶的频率数据。将梁划分为 16 个单元 (17 个结点, 见图 3), 并将梁一端固定在一支架上, 尽量与固支的条件相近。实验过程中, 主要测量了三种损伤情况的频率: a) 未损伤悬臂梁; b) 一处损伤悬臂梁, 损伤位置位于梁的 7、8 号结点之间; c) 两处损伤悬臂梁, 损伤位置分别位于梁的 7、8 号结点之间和梁的 3、4 号结点之间 (见图 4)。相关频率数据见表 1。通

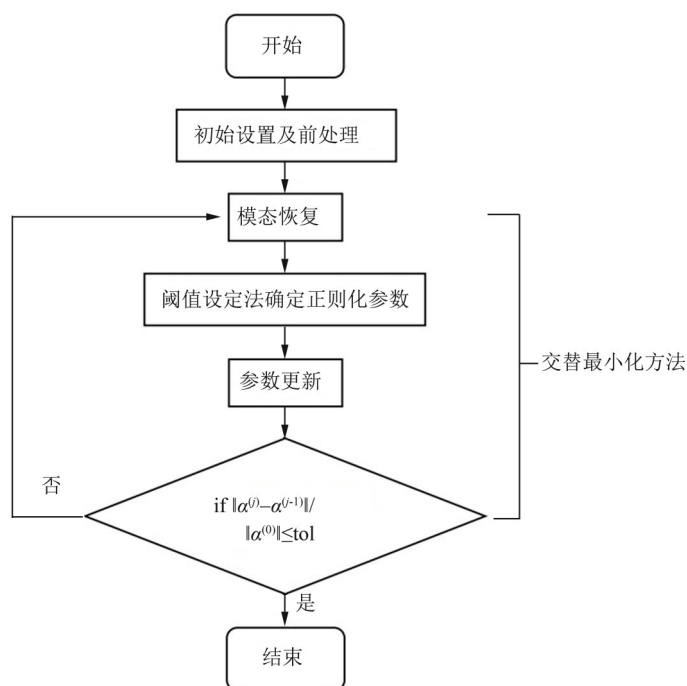
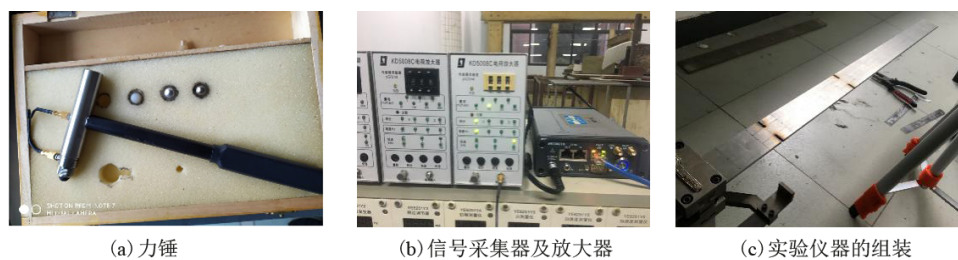


图1 损伤识别算法流程

Fig. 1 Damage identification algorithm process



(a) 力锤

(b) 信号采集器及放大器

(c) 实验仪器的组装

图2 部分实验仪器

Fig. 2 Part of the experiment instruments

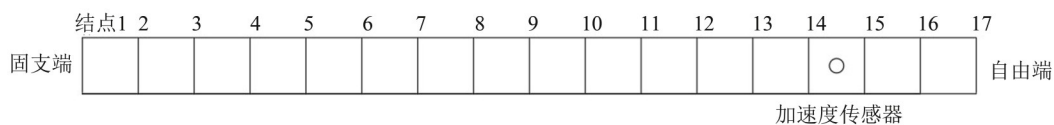


图3 梁的示意图

Fig. 3 Diagram of the beam

常, 结构的有限元模型存在误差。此时, 可采用无损梁的振动频率来修正有限元模型; 修正前后梁的频率仍见表1。

2.2 实验结果与分析

根据测量的频率数据, 使用提出的损伤识别方法, 可以识别出两种损伤梁的损伤位置和程度。关于一次损伤梁的损伤识别结果见图5, 而关于二次损伤梁的损伤识别结果见图6。从图中可以看出: 对于一次损伤梁, 识别的损伤位置包括单元7, 损伤程度约为0.39; 而对于二次损伤梁, 识别的损伤位置包括单元3和单元7, 损伤程度分别约为0.32和0.40。两根损伤梁的损伤位置识别均与实际情况吻合, 且损伤程度识别也比较合理。在所有损伤识别结果中, 单元1均被识别为损伤单元。这是因为单元1靠近固支端, 而固支约束可能存在松动, 从而产生等效损伤。本实验中, 仅用4个频率就能很好地识别结构的损伤。

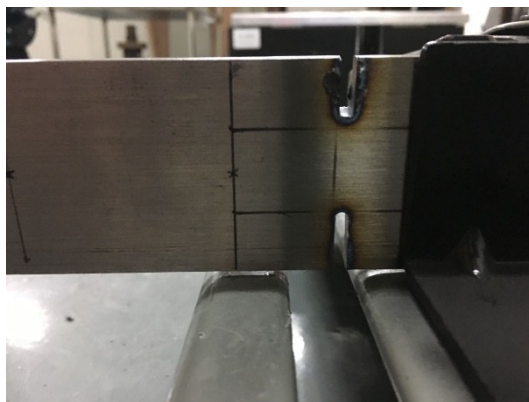


图 4 梁的损伤

Fig. 4 Damage of the beam

表 1 几种工况下测量到的频率以及无损时的理论频率¹⁾

Table 1 Frequency under three different conditions and the theoretical frequency of the unscathed beam

实验频率/Hz	理论频率/Hz	相对误差	一处损伤频率/Hz	一处损伤修正后频率/Hz	二处损伤频率/Hz	二处损伤修正后频率/Hz
5.995	6.354	-0.056 5	5.727	6.067	5.574	5.908
37.302	39.826	-0.063 4	35.741	38.160	35.464	37.865
104.974	111.495	-0.058 49	101.451	107.754	100.968	107.240
206.195	218.531	-0.056 45	198.660	210.545	196.970	208.754
340.786	361.245	-0.056 63	325.182	344.703	320.381	339.613

1) 一次损伤为 7、8 号结点之间 (单元 7), 二次损伤为 7、8 结点之间和 3、4 结点之间 (单元 3) 的损伤。

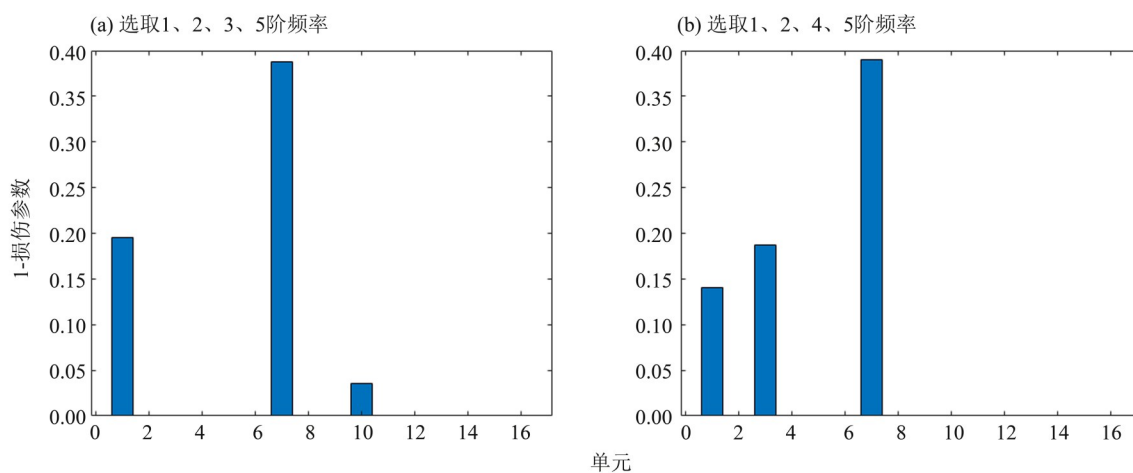


图 5 不同数据选择下得到的损伤识别结果 (一处损伤)

Fig. 5 Identification of the damage using different set of frequency data (with one damage)

3 结 论

本文提出了一种基于少量频率数据和稀疏正则化的结构损伤识别方法。核心主要有两方面: 首先, 提出了一种针对损伤参数解耦的目标函数, 并引入稀疏正则化处理损伤位置稀疏性的约束; 其次, 使用交替优化方法求解损伤识别问题, 并提出阈值设定法快速确定正则化参数。为验证损伤识别方法的有效性, 进行了悬臂梁实验。结果表明, 本文所提方法确实仅需要少量的频率数据便能很好地识别出损伤位置和程度。

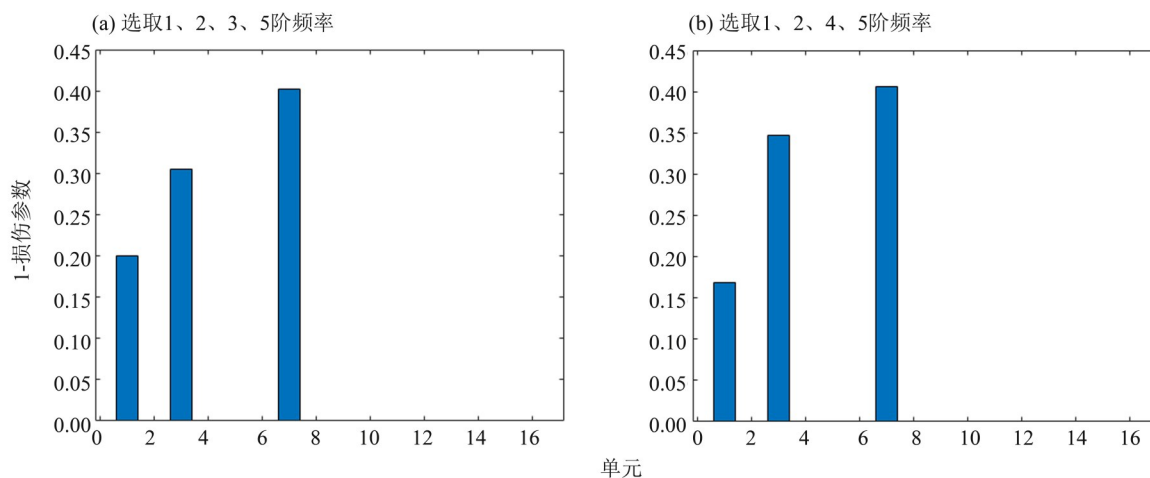


图6 不同数据选择下得到的损伤识别结果 (二处损伤)

Fig. 6 Identification of the damage using different set of frequency data (with two damages)

参考文献:

- [1] LU Z R, WANG L. An enhanced response sensitivity approach for structural damage identification: convergence and performance [J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2017, 111: 1231–1251.
- [2] TIKHONOV A M. On the solution of ill-posed problems and the method of regularization [J]. *Soviet Mathematics*, 1963, 4: 1035–1038.
- [3] YANG Y, NAGARAJIAH S. Structural damage identification via a combination of blind feature extraction and sparse representation classification [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2014, 45: 1–23.
- [4] HERNANDEZ E M. Identification of isolated structural damage from incomplete spectrum information using l1-norm minimization [J]. *Journal of Sound and Vibration*, 2014, 46: 59–69.
- [5] HERNANDEZ E M. Identification of localized structural damage from highly incomplete modal information: theory and experiments [J]. *Journal of Engineering Mechanics*, 2016, 142(2): 04015075.
- [6] HOU R, XIA Y, ZHOU X. Structural damage detection based on l1 regularization using natural frequencies and mode shapes [J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2018, 25(3): e2107.
- [7] ZHANG C D, XU Y L. Comparative studies on damage identification with Tikhonov regularization and sparse regularization [J]. *Structural Control and Health Monitoring*, 2016, 23: 560–579.
- [8] ZHOU X Q, XIA Y, WENG S. L1 regularization approach to structural damage detection using frequency data [J]. *Structural Health Monitoring*, 2015, 14(6): 571–582.
- [9] WANG L, LU Z R. Sensitivity-free damage identification based on incomplete modal data, sparse regularization and alternating minimization approach [J]. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 2019, 120: 43–68.
- [10] 潘天成, 吕中荣, 汪利. 基于稀疏正则化的稳态热源识别 [J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2020, 59(1): 43–49.
PAN T, LU Z R, WANG L. Steady-state heat source identification based on sparse regularization [J]. *Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni*, 2020, 59(1): 43–49.

(责任编辑 王海蓉)