

# 基于分裂法的内部 Neumann 反散射问题\*

张欢, 刘立汉

重庆师范大学数学科学学院, 重庆 401331

**摘要:** 通过分裂法研究了具有 Neumann 边界条件的内部声波反散射问题。首先, 证明了在 Neumann 边界条件下散射体的位置、形状可由腔体内部的点源测量数据唯一确定。然后, 用分裂法的思想来反演未知散射体的边界及其形状。最后, 给出了 2 个数值例子来验证该方法的可行性和有效性。

**关键词:** 内部反散射; Neumann 边界条件; 分裂法

**中图分类号:** O175 **文献标志码:** A **文章编号:** 0529-6579 (2021) 04-0170-07

## The decomposition method for an interior inverse scattering problem with a Neumann boundary condition

ZHANG Huan, LIU Lihan

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China

**Abstract:** An internal acoustic inverse scattering problem with a Neumann boundary condition is studied by using the decomposition method. First, it is proved that the position and shape of a scatterer can be uniquely determined by the measurement data of the point source inside the cavity with the Neumann boundary condition. Then, the boundary of the unknown scatterer and its shape is reconstructed by using the idea of the decomposition method. Finally, two numerical examples are given to verify the feasibility and effectiveness of the method.

**Key words:** interior inverse scattering problem; Neumann boundary condition; the decomposition method

反散射问题是数学物理中一个重要的研究领域, 其主要是利用声波或电磁波的散射数据来确定未知散射体的位置、形状及其物理性质。反散射问题的研究成果已在声纳雷达探测、地球物理探测、医学成像、生命科学、遥感技术等其他学科的研究领域中得到广泛应用。在现有的研究中, 更多的是考虑入射波和散射波都在散射体的外部, 称之为外部反散射问题 (见文献 [1]), 但是正如文献 [2-3] 中所述, 为了解决一些实际问题, 内部反散射问题也逐渐得到关注, 相比于外部反散射问题, 其入射波和散射波都在散射体的内部, 且散射波在散射体内部会不断地进行反射, 所以内部反散射问题更为复杂。而内部反散射问题是一个非线性不适定问题, 为了解决其在求解过程中的困难, 目前已有一些解决方法, 对于不可穿透散射体, 文献 [3] 通过线性采样法反演在 Dirichlet 边界条件下的散射体的位置和形状; 文献 [4] 考虑在 Maxwell 方程及其 Dirichlet 边界条件下, 利用同样的方法反演散射体的位置及其形状; 文献 [5] 将线性采样法延拓到阻尼边界条件的情况, 通过该方法反演散射体的位置、形状及其物理性质; 文献

\* 收稿日期: 2020-05-02 录用日期: 2020-06-09 网络首发日期: 2020-11-05

**基金项目:** 国家自然科学基金 (12001075); 重庆市自然科学基金 (cstc2020jcyj-msxmX0167); 重庆市教委科学技术研究项目 (KJQN201900544); 重庆市留学人员回国创新类项目 (cx2019022); 重庆师范大学青年拔尖人才培养计划 (02030307/0052); 重庆市巴渝学者计划 (BYQNCS2020002); 重庆市高校创新研究群体项目 (CXQT20014)

**作者简介:** 张欢 (1995年生), 女; 研究方向: 偏微分方程反问题; E-mail: 1954501796@qq.com

**通信作者:** 刘立汉 (1987年生), 男; 研究方向: 偏微分方程反问题; E-mail: mathsedu2013@163.com

[6] 利用交互间隙法来重构阻抗边界条件下散射体的位置、形状及其物理性质; 文献 [7] 将表示边界值问题的偏微分方程转化为一个等价的非线性积分方程组, 并通过正则的Newton迭代法求解这个非线性积分方程组, 从而解得散射体的未知边界; 文献 [8] 则将线性采样法进一步延拓到混合边界条件下来重构散射体的位置、形状及其物理性质。对于可穿透散射体, 文献 [9] 利用线性采样法进行数值反演传输边界条件下散射体的位置及其形状; 文献 [10–11] 分别通过分解法和正则的Newton迭代法求解了同样的反散射问题。对于更一般的混合边界条件, 文献 [12] 基于外部传输特征值问题的谱性质分析, 证明了可穿透散射体的位置、形状及其物理性质可由腔体内部多个点源的测量数据来唯一确定, 再利用线性采样法的想法, 构造适应于点源的奇异性的指示函数, 进而重构散射体的位置、形状及其物理性质。

本文考虑采用由Kress和Kirsch提出的分裂法来求解Neumann边界的内部反散射问题, 这个方法最初是为了解决外部反散射问题。针对内部反散射问题的非线性和不适定性, 分裂法将其原问题的这两大难点拆分成两步来解决<sup>[2, 13]</sup>, 首先通过测量的数据来构造散射场从而解决原问题的不适定性, 然后由边界条件, 利用入射波及散射场将原问题转化为一个优化问题, 从而达到解决非线性的目的。

## 1 反散射问题

设 $D$ 是 $\mathbf{R}^2$ 中的一个单连通区域,  $D$ 的边界 $\partial D$ 具有二阶连续偏导数, 波数 $k > 0$ ,  $z$ 为散射体 $D$ 内部的一点。正散射问题是找到散射场 $u^s$ , 使得

$$\Delta u^s + k^2 u^s = 0, \quad x \in D, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u^s}{\partial v} = -\frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial v}, \quad x \in \partial D, \quad (2)$$

其中Helmholtz方程的基本解 $\Phi$ 满足

$$\Phi(x, d) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|x-d|),$$

其中 $H_0^{(1)}$ 为第一类零阶的Hankel函数。这里假设 $k^2 > 0$ 不是 $-\Delta$ 在 $D$ 内部的Neumann特征值, 由散射问题的适定性知, 内部Neumann边值问题的解 $u^s$ 是唯一的。设在 $D$ 内部有一条光滑曲线 $C$ , 对定点 $d \in C$ ,  $\forall x \in C$ , 有

$$u^s|_C = u^s(x, d).$$

对于边界 $\partial D$ , 本文将根据曲线 $C$ 上的点源及其测量的数据 $u^s$ 来确定。

**定理1** 如果 $k^2 > 0$ 不是 $-\Delta$ 在 $C$ 内部的Neumann特征值, 则对 $\forall x, z \in C$ , 边界 $\partial D$ 由 $u^s(x, z)$ 唯一确定。

**证明** 假设 $D_1, D_2$ 是两个有界的单连通区域, 且 $D_1 \neq D_2$ ,  $u_1^s, u_2^s$ 分别满足方程(1)和(2), 假设对 $\forall z \in C$ ,  $u_1^s(x, z) = u_2^s(x, z)$ , 令 $w = u_1^s - u_2^s$ , 则有

$$\Delta w + k^2 w = 0, \quad x \in \dot{C}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial v} = 0, \quad x \in C, \quad (4)$$

这里 $\dot{C}$ 表示 $C$ 的内部, 因为 $k^2 > 0$ 不是 $-\Delta$ 在 $C$ 内部的Neumann特征值, 所以有 $w = 0, x \in \dot{C}$ , 由唯一性延拓定理知 $w = 0, x \in \dot{C} \cup C$ . 现令 $D_0 = D_1 \cap D_2$ , 且 $\dot{C} \subset D_0$ , 由唯一性延拓定理知 $w = 0, x \in \overline{D_0}$ , 即

$$u_1^s(x, z) = u_2^s(x, z), \quad x \in \overline{D_0}, \quad z \in C.$$

根据互反关系, 有

$$u_1^s(z, x) = u_2^s(z, x), \quad z \in \overline{D_0}, \quad x \in C.$$

再利用唯一性延拓定理, 有

$$u_1^s(x, z) = u_2^s(x, z), \quad x, z \in \overline{D_0}.$$

故存在一点 $x^* \in \partial D_0$ , 且 $x^* \in \partial D_1$ ,  $x^* \notin \partial D_2$ 不失一般性, 设

$$z_n = x^* - \frac{1}{n} v(x^*) \in D_0,$$

其中 $v$ 表示在 $x^* \in \partial D_1$ 处的单位向量, 这里的 $n$ 充分大。一方面, 对于 $D_2$ 来说, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 由散射问题的适定性知,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_2^s(x^*, z_n)}{\partial v} = \frac{\partial u_2^s(x^*, x^*)}{\partial v}.$$

所以  $\frac{\partial u_2^s(x^*, z_n)}{\partial v}$  是有界的; 另一方面, 对于  $\partial D_1$  来说, 当  $n \rightarrow \infty$  时, 由边界条件可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial u_1^s(x^*, z_n)}{\partial v} = -\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\partial \Phi(x^*, z_n)}{\partial v} = \infty.$$

故矛盾, 定理得证。

## 2 分裂法

假设散射体内部的曲线  $C$  上有一个点源  $z$ , 对  $\forall x \in C$ , 其散射场为  $u^s(x, z)$ , 记为  $u_c^s$ . 假设  $\Gamma$  是  $D$  外部的一条曲线, 定义如下算子

$$\begin{aligned} S: L^2(\Gamma) &\mapsto L^2(C), \\ K: L^2(\Gamma) &\mapsto L^2(C), \end{aligned}$$

其中

$$(S\phi)(x) := \int_{\Gamma} \phi(y) \Phi(x, y) ds(y), \quad x \notin \Gamma, \quad (5)$$

$$(K\phi)(x) := 2 \int_{\Gamma} \phi(y) \frac{\partial \Phi(x, y)}{\partial v(x)} ds(y), \quad x \notin \Gamma. \quad (6)$$

**定理 2** 假设  $k^2 > 0$  不是  $-\Delta$  在  $\Gamma$  或  $C$  内部的 Neumann 特征值, 则  $S$  是紧算子且是单射, 此外,  $S$  在  $L^2(C)$  上有稠密值域。

**证明** 首先证明紧性, 因为  $L^2(\Gamma)$  为有界集, 且  $L^2(C)$  是有限维的赋范空间, 而有限维的赋范空间的任意有界序列都包含一个收敛序列, 所以  $L^2(C)$  是相对紧集, 故算子  $S$  是紧的。

然后证明  $S$  是单射的, 设

$$(Sg)(x) = \int_{\Gamma} g(z) \Phi(x, z) ds(z) = 0, \quad x \in C,$$

并定义

$$w(x) = \int_{\Gamma} g(z) \Phi(x, z) ds(z), \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus \Gamma.$$

则  $w(x)$  满足方程组

$$\begin{cases} \Delta w + k^2 w = 0, & x \in C, \\ \frac{\partial w}{\partial v} = 0, & x \in C. \end{cases} \quad (7)$$

因为  $k^2$  不是  $-\Delta$  在  $C$  内部的 Neumann 特征值, 则  $w = 0, x \in \dot{C}$ . 因为外部 Neumann 问题的解的唯一性和单层势能还满足

$$\begin{aligned} \Delta w + k^2 w &= 0, \quad x \in \mathbf{R}^2 \setminus (\dot{\Gamma} \cup \Gamma), \\ \frac{\partial w}{\partial v} &= 0, \quad x \in \Gamma, \end{aligned}$$

以及辐射条件

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left( \frac{\partial w}{\partial v} - ikw \right) = 0,$$

其中  $r = |x|$ , 所以  $w = 0, x \in \mathbf{R}^2 \setminus (\dot{\Gamma} \cup \Gamma)$ . 由单层势能的跳跃关系知

$$\frac{\partial w_+}{\partial v} - \frac{\partial w_-}{\partial v} = -g = 0.$$

所以算子  $S$  是单射。

最后证明  $S$  有稠密值域, 对  $\varphi \in L^2(C)$ , 我们假设  $(Sg, \varphi) = 0$ , 即对所有的  $g \in L^2(\Gamma)$ , 有

$$\int_C \int_{\Gamma} \Phi(x, z) g(z) ds(z) \overline{\varphi(x)} ds(x) = 0,$$

即

$$\int_C \int_{\Gamma} \Phi(x, z) g(z) \overline{\varphi(x)} ds(z) ds(x) = 0.$$

从而

$$\int_{\Gamma} \int_C \Phi(x, z) g(z) \overline{\varphi(x)} ds(x) ds(z) = 0.$$

于是对  $g \in L^2(\Gamma)$ , 有

$$\int_{\Gamma} \int_C \Phi(x, z) \overline{\varphi(x)} ds(x) g(z) ds(z) = 0.$$

所以对  $z \in \Gamma$ , 可得

$$\int_C \Phi(x, z) \overline{\varphi(x)} ds(x) = 0.$$

令

$$w(z) = \int_C \Phi(x, z) \overline{\varphi(x)} ds(x), \quad z \in \mathbf{R}^2 \setminus C.$$

则  $\Delta w + k^2 w = 0, x \in \dot{\Gamma}$  且  $\frac{\partial w}{\partial v} = 0, x \in \Gamma$ . 因为  $k^2$  不是  $-\Delta$  在  $\dot{\Gamma}$  内部的 Neumann 特征值, 所以  $w = 0, x \in \Gamma$ , 而  $\dot{C} \subset \dot{\Gamma}$ , 再一次用单层势能的跳跃关系知  $\varphi = 0$ , 因此  $S$  在  $L^2(C)$  内有稠密值域。

根据文献 [14] 可知,  $S$  和  $K$  具有相同的紧性和映射属性, 所以紧算子  $K$  为单射, 且在  $L^2(C)$  内有稠密的值域。

给定的散射场  $u_c^s$ , 建立不适定积分方程

$$S\phi = u_c^s. \quad (9)$$

利用 Tikhonov 正则化求解积分方程 (9), 通过求解方程

$$\alpha\phi_\alpha + S^* S\phi_\alpha = S^* u_c^s. \quad (10)$$

来得到近似解  $\phi_\alpha$ , 其中  $\alpha$  是正则化参数,  $S^*: L^2(C) \mapsto L^2(\Gamma)$  为  $S$  的伴随算子。要求解 (10) 等价于求解最小化 Tikhonov 泛函

$$\|S\phi - u_c^s\|_{L^2(C)}^2 + \alpha \|\phi_\alpha\|_{L^2(\Gamma)}^2. \quad (11)$$

设

$$\frac{\partial u}{\partial v} := \frac{1}{2} \phi_\alpha + \frac{1}{2} K\phi_\alpha.$$

则一旦找到近似解  $\phi_\alpha$ , 就可近似地求得  $\frac{\partial u}{\partial v}$ , 只要使得  $\frac{\partial u}{\partial v}$  近似满足声硬边界条件, 就可以确定边界  $\partial D$ , 即

$$\frac{\partial u}{\partial v} \approx 0$$

等价于

$$\phi_\alpha + K\phi_\alpha \approx 0. \quad (12)$$

令

$$U(x) := |\phi_\alpha + K\phi_\alpha|. \quad (13)$$

若在  $C$  和  $\Gamma$  之间存在一条曲线使得  $U(x)$  的值最小, 则此曲线就为散射体的边界  $\partial D$  的重构。

对于散射体内部多个点源的情况, 假设测量值  $u_{c,j}^s$  是通过点源  $z_j, j = 1, 2, \dots$  得到的, 要重构边界  $\partial D$ , 则需对每个  $u_{c,j}^s$ , 通过 Tikhonov 正则化计算相应的正则化解  $\phi_{\alpha,j}$ , 这里假设噪声等级相同, 即使用固定的正则化参数  $\alpha$ , 于是

$$U(x) = \sum_{j=1}^N |\phi_{\alpha,j} + K\phi_{\alpha,j}|. \quad (14)$$

同样地, 若在  $C$  和  $\Gamma$  之间存在一条曲线使得  $U(x)$  的值最小, 则这条曲线就是散射体边界  $\partial D$  的重构。

分裂法可将式 (12) 看作一个优化问题, 选择一簇曲线作为  $D$  的边界  $\partial D$  的允许集, 显然  $\partial D$  在  $C$  和  $\Gamma$  之间, 定义

$$V := \{r \in C^{1,\beta}(\Omega) | 0 < r_1 < r < r_2\}, \quad (15)$$

其中  $\Omega = \{\hat{x} \in \mathbf{R}^2 | |\hat{x}| = 1\}$  且  $C^{1,\beta}(\Omega), 0 \leq \beta \leq 1$  表示函数的微分一致 Hölder 连续。定义

$$A := \{r(\hat{x})\hat{x} | \hat{x} \in \Omega\}, \quad r \in V. \quad (16)$$

分裂法就是求解下面的极小化问题

$$\min_{r \in V} \int_{\Omega} |(\phi_{\alpha} + K\phi_{\alpha}) \circ r|^2 ds. \quad (17)$$

来寻找  $D$  的近似边界。所以, 将反散射问题转化为优化问题, 给定测量值  $u_c^s \in L^2(C)$  及正则化参数  $\alpha$ , 定义函数  $\mu: L^2(\Gamma) \times L^2(\Omega) \mapsto \mathbf{R}$ , 其中

$$\mu(\phi, r; u_c^s, \alpha) = \|S\phi - u_c^s\|_{L^2(C)}^2 + \alpha \|\phi\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \gamma \|(\phi + K\phi) \circ r\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad (18)$$

这里的  $\gamma$  是耦合参数。本文选取  $\gamma = 1$  使得式 (18) 中的第一项和第三项相等。因此内部反散射问题就是  $\mu$  的极小化问题, 即寻找  $(\phi, r) \in L^2(\Gamma) \times V$  满足

$$\mu(\phi, r; u_c^s, \alpha) = M(u_c^s, \alpha) = \inf \{ \mu(\phi, q; u_c^s, \alpha) : \phi \in L^2(\Gamma), q \in V \}. \quad (19)$$

**定理 3** 内部反散射问题的优化问题 (19) 存在一个解。

**证明** 设序列  $\{(\phi_n, r_n)\} \subset L^2(\Gamma) \times V$  满足

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\phi_n, r_n) = M(u_c^s, \alpha). \quad (20)$$

由于  $V$  是紧集, 当  $n \rightarrow \infty$  时, 存在  $r \in V$  有  $r_n \rightarrow r$ 。由式 (18) ~ (19) 知

$$\alpha \|\phi_n\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq \mu(\phi_n, r_n) \rightarrow M(u_c^s, \alpha).$$

则  $\phi_n$  有界, 且是弱收敛的。又因为  $S, K$  都是紧算子, 所以

$$S\phi_n \rightarrow S\phi, \quad K\phi_n \rightarrow K\phi, \quad n \rightarrow \infty.$$

则

$$(\phi_n + K\phi_n) \circ r_n \rightarrow (\phi + K\phi) \circ r, \quad n \rightarrow \infty.$$

由式 (18) 和式 (20) 知, 当  $n \rightarrow \infty$  时,  $\|\phi_n\|^2 \rightarrow \|\phi\|^2$ , 所以  $\phi_n \rightarrow \phi, n \rightarrow \infty$ , 又因为连续, 所以存在极限, 即

$$\mu(\phi, r) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\phi_n, r_n) = M(u_c^s, \alpha).$$

**定理 4** 在散射体内部的曲线  $C$  上有一个点源, 其散射场为  $u_c^s$ , 如果  $r \in V$  表示边界, 则

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} M(u_c^s, \alpha) = 0. \quad (21)$$

**证明** 由于  $k^2$  不是  $\Gamma$  内部  $-\Delta$  的 Neumann 特征值, 则  $\phi = 0, x \in \dot{\Gamma}$ , 又因为  $\partial D$  在  $\Gamma$  内部, 所以  $\phi = 0, x \in \partial D$ , 从而  $\{(\phi + K\phi)|_{\partial D} : \phi \in L^2(\Gamma)\}$  在  $L^2(\partial D)$  上是稠密的, 因此存在  $\phi \in L^2(\Gamma)$ , 使得对  $\forall \varepsilon > 0$ , 有

$$\|(\phi + K\phi) \circ r\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon.$$

因为 Helmholtz 方程的解连续依赖于边值数据, 则存在常数  $c$ , 使得

$$\|S\phi - u_c^s\|_{L^2(C)} \leq c \|(\phi + K\phi) \circ r\|_{L^2(\Omega)}. \quad (22)$$

于是

$$\begin{aligned} \mu(\phi, r; u_c^s, \alpha) &= \|S\phi - u_c^s\|_{L^2(C)}^2 + \alpha \|\phi\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|(\phi + K\phi) \circ r\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq \left( c \|(\phi + K\phi) \circ r\|_{L^2(\Omega)} \right)^2 + \alpha \|\phi\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|(\phi + K\phi) \circ r\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\leq c^2 \varepsilon^2 + \alpha \|\phi\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \varepsilon^2 \\ &= (1 + c^2) \varepsilon^2 + \alpha \|\phi\|_{L^2(\Gamma)}^2 \rightarrow (1 + c^2) \varepsilon^2, \quad (\alpha \rightarrow 0). \end{aligned}$$

由  $\varepsilon$  任意性, 所以

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} M(u_c^s, \alpha) = 0.$$

**定理 5** 设  $u_c^s$  为  $D$  内在曲线  $C$  上的散射场, 假设  $\partial D$  由某些  $r \in V$  表示, 令  $\{\phi_n\}$  为一个空序列, 且令  $(\phi_n, r_n)$  为正则化参数为  $\alpha_n$  时的极小化问题的解, 则存在  $\{r_n\}$  的收敛序列只有有限个极限点, 每个极限点都表示  $\frac{\partial u^s}{\partial v} + \frac{\partial u^i}{\partial v} = 0$  的曲线。

**证明** 由  $V$  是紧集, 则存在  $\{r_n\}$  的一个收敛子列, 仍记为  $\{r_n\}$ , 使得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r^*.$$

令  $u^*$  为边界由  $r^*$  表示  $\Lambda^*$  的区域内正散射问题唯一的解, 则有

$$\left(\frac{\partial u^*}{\partial v} + \frac{\partial \Phi(\cdot, z)}{\partial v}\right) \circ r^* = 0 \quad (x \in \Omega).$$

从而

$$(\phi + K\phi) \circ r^* = 0 \quad (x \in \Omega). \tag{23}$$

用  $\frac{\partial u_n}{\partial v}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) 表示  $\frac{\partial(S\phi_n)}{\partial v}$ , 其表示  $r_n$  描述的在  $\Lambda_n$  上具有边界值  $\frac{\partial(S\phi)}{\partial v} \Big|_{\Lambda_n}$  的内部散射问题的

解, 而  $\frac{\partial(S\phi_n)}{\partial v} + \frac{\partial \Phi(\cdot, z)}{\partial v} = \frac{1}{2}\phi_n + \frac{1}{2}K\phi_n$ , 所以

$$\left\| \left(\frac{1}{2}\phi_n + \frac{1}{2}K\phi_n\right) \circ r_n \right\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

即有

$$\left\| (\phi_n + K\phi_n) \circ r_n \right\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \tag{24}$$

因为当  $n \rightarrow \infty$  时,  $r_n \rightarrow r^*$ , 有

$$\left\| \frac{\partial u_n}{\partial v} - \frac{\partial u^*}{\partial v} \right\|_{L^2(\Lambda)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

这表明  $\frac{1}{2}\phi_n + \frac{1}{2}K\phi_n$  一致收敛到  $\frac{\partial u^*}{\partial v} + \frac{\partial \Phi(\cdot, z)}{\partial v}$ , 定理4表明对任意的  $\varepsilon$ , 有

$$\left\| S\phi_n - u_c^s \right\|_{L^2(C)} \leq c \left\| (\phi_n + K\phi_n) \circ r \right\|_{L^2(\Omega)} < \varepsilon, \quad \varepsilon \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

假设  $k^2$  不是  $\dot{C}$  的 Neumann 特征值, 则  $S\phi_n$  在  $\dot{C}$  内一致收敛到  $u^s$ , 因此

$$\frac{\partial u^s}{\partial v} + \frac{\partial \Phi(\cdot, z)}{\partial v} = \frac{\partial u^*}{\partial v} + \frac{\partial \Phi(\cdot, z)}{\partial v}.$$

由解析延拓以及式 (23) 知  $\frac{\partial u^s}{\partial v} + \frac{\partial u^i}{\partial v}$  在  $\Lambda^*$  上的值为零。

如果这里有无穷多个不同的极限点, 则  $\frac{\partial u^s}{\partial v} + \frac{\partial u^i}{\partial v}$  在无穷多个曲面上都不会为零, 即散射体没有边界, 这是矛盾的。

对于多点源来说, 假设有  $n$  个点源  $z_1, z_2, \dots, z_n$ , 其对应于散射体内部的曲线  $C$  上的散射场为  $u_c^{s,1}, u_c^{s,2}, \dots, u_c^{s,n}$ , 所以对于多点源的内部反散射问题, 就是要找到  $(\phi_1, \dots, \phi_n, \gamma)$ , 使得函数

$$\mu(\phi_1, \dots, \phi_n, r; u_c^{s,1}, \dots, u_c^{s,n}, \alpha)$$

有极小值, 其极小形式为

$$\sum_{i=1}^n \left\{ \left\| S\phi_i - u_c^s \right\|_{L^2(C)}^2 + \alpha \left\| \phi_i \right\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \left\| (S\phi_i + \Phi(\cdot, z)) \circ r \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\}.$$

### 3 数值例子

本节通过2个数值例子来验证分裂法的可行性和有效性。以下是分裂法求解反散射问题的边界的3个步骤。

第一步: 给定散射场  $u_c^s$ , 建立不适定积分方程 (9), 利用 Tikhonov 正则化方法求解不适定方程, 求得近似解  $\phi_\alpha$ ;

第二步: 由第一步求得的  $\phi_\alpha$ , 从而可近似计算  $\phi_\alpha + K\phi_\alpha$ ;

第三步: 定义散射体  $D$  的边界  $\partial D$  的允许集  $V := \{r \in C^{1,\beta}(\Omega) | 0 < r_1 < r < r_2\}$ , 其中  $\Omega = \{\hat{x} \in \mathbf{R}^2 | |\hat{x}| = 1\}$ , 且  $C^{1,\beta}(\Omega)$ ,  $0 \leq \beta \leq 1$  表示函数的微分一致 Hölder 连续。只要找到一条曲线  $r$ , 使得  $|\phi_\alpha + K\phi_\alpha|$  在这条曲线上的值最小, 则这条曲线就是散射体的边界  $\partial D$  的重构, 即通过求解极小化问题 (17) 来寻找近似边界  $\partial D$ 。

第一个例子, 考虑重构一个边界为心形线的散射体, 结果见图1。第二个例子, 考虑重构一个边界为

正六边形的散射体, 结果见图 2。

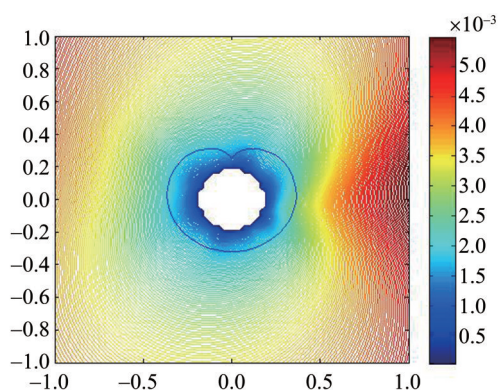


图 1 重构边界为心形线

Fig. 1 Reconstruct a boundary of cardioid

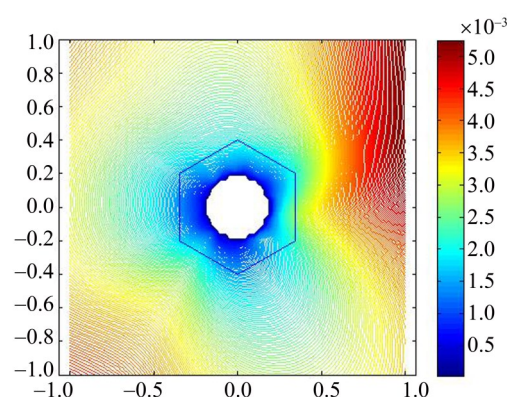


图 2 重构边界为正六边形

Fig. 2 Reconstruct a boundary of hexagon

### 参考文献:

- [1] COLTON D, KRESS R. Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory [M]. Berlin: Springer, 1998.
- [2] JAKUBIK P, POTTHAST R. Testing the integrity of some cavity - the Cauchy problem and the range test [J]. Applied Numerical Mathematics, 2008, 58(6): 899-914.
- [3] QIN H, COLTON D. The inverse scattering problem for cavities [J]. Applied Numerical Mathematics, 2012, 62(6): 699-708.
- [4] ZENG F, CAKONI F, SUN J. An inverse electromagnetic scattering problems for a cavity [J]. Inverse Problems, 2011, 27: 125002.
- [5] QIN H, COLTON D. The inverse scattering problem for cavities with impedance boundary condition [J]. Advances in Computational Mathematics, 2012, 36(2): 157-174.
- [6] 刘立汉, 崔晓英, 蔡静秋. 基于交互间隙法的内部 Neumann 反散射问题[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2019, 58(1): 149-155.  
LIU L H, CUI X Y, CAI J Q. Reciprocity gap method for an interior inverse scattering problem with a Neumann boundary condition [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2019, 58(1): 149-155.
- [7] 刘立汉, 蔡静秋, 崔晓英. 基于正则的 Newton 迭代法的内部 Neumann 反散射问题[J]. 中山大学学报(自然科学版), 2019, 58(2): 135-141.  
LIU L H, CAI J Q, CUI X Y. Regularized Newton iteration method for an interior inverse scattering problem with a Neumann boundary condition [J]. Acta Scientiarum Naturalium Universitatis Sunyatseni, 2019, 58(2): 135-141.
- [8] HU Y, CAKONI F, LIU J. The inverse scattering problem for a partially coated cavity with interior measurements [J]. Applicable Analysis, 2014, 93(5): 936-956.
- [9] CAKONI F, COLTON D, MENG S. The inverse scattering problem for a penetrable cavity with internal measurements [J]. Communications in Contemporary Mathematics, 2014, 615: 71-88.
- [10] MENG S, HADDAR H, CAKONI F. The factorization method for a cavity in an inhomogeneous medium [J]. Inverse Problems, 2014, 30(4): 045008.
- [11] LIU L, CAI J, XU Y. Regularized Newton iteration method for a penetrable cavity with internal measurements in inverse scattering problem [J]. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 2020, 43(5): 2665-2678.
- [12] LIU L. The inverse scattering problem for a partially coated penetrable cavity with interior measurements [J]. Applicable Analysis, 2017, 96(5): 844-868.
- [13] ZENG F, SUAREZ P, SUN J. A decomposition method for an interior inverse scattering problem [J]. Inverse Problems and Imaging, 2013, 7(1): 291-303.
- [14] COLTON D, KRESS R. Integral equation methods in scattering theory [M]. New York: Wiley, 1983.

(责任编辑 冯兆永)