

基于时域最小残值法求解含间隙非线性气动弹性系统的半解析解*

秦英泉^{1,2}, 刘祚秋¹, 刘济科¹, 刘广^{1,2}

1. 中山大学航空航天学院, 广东 深圳 518107
2. 深圳市智能微小卫星星座技术与应用重点实验室, 广东 深圳 518107

摘要: 采用时域最小残值法求解了含间隙非线性气动弹性系统的半解析周期解。首先, 将气动弹性系统的周期解展开为傅里叶级数, 并截断前 N 项作为系统的近似解析解; 通过对近似解求导, 获得系统的速度和加速度函数; 并将位移、速度和加速度函数回代到原始的气动弹性系统, 将半解析解求解问题转化为一个非线性最小二乘优化问题。最后, 通过增强响应灵敏度方法来迭代求解该最小值问题。在迭代过程中, Tikhonov 正则化和“置信域限制”被用来增强算法的收敛性。数值算例表明, 时域最小残值法可以快速获得高精度的半解析解。

关键词: 间隙非线性; 时域最小残值法; 周期解; Tikhonov 正则化

中图分类号: V21 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137(2023)06-0098-09

Semi-analytical solution of nonlinear aeroelastic systems with freeplay based on the time-domain minimum residual method

QIN Yingquan^{1,2}, LIU Zuoqiu¹, LIU Jike¹, LIU Guang^{1,2}

1. School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Shenzhen 518107, China
2. Shenzhen Key Laboratory of Intelligent Microsatellite Constellation, Shenzhen 518107, China

Abstract: The semi-analytical periodic solution of a nonlinear aeroelastic system with freeplay was solved by the time-domain minimum residual method. First, the periodic solution of the aeroelastic system is expanded into the Fourier series, and the first N term is truncated as the approximate analytical solution. Then, the velocity and acceleration of the system are obtained by taking the derivative of the approximate solution in the time. And the displacement, velocity and acceleration functions are substituted back into the original aeroelastic system. Then, the problem of solving the semi-analytical solution is transformed into a nonlinear least-square optimization problem. Finally, such minimum value optimization problem is iteratively solved by the enhanced response sensitivity approach. In the above iteration, the Tikhonov regularization and “trust-region constraint” are used to enhance the algorithm’s convergence. Numerical examples show that the time-domain minimum residual method can quickly obtain high-precision semi-analytical solutions.

Key words: freeplay nonlinearity; the time-domain minimum residual method; periodic solution; Tikhonov regularization

* 收稿日期: 2023-05-27 录用日期: 2023-06-29 网络首发日期: 2023-09-21
基金项目: 国家自然科学基金(12172387); 广东省基础与应用基础研究基金(2021A1515110750, 2023A1515010028); 深圳市科技计划(ZDSYS20210623091808026)
作者简介: 秦英泉(1999年生), 男; 研究方向: 非线性振动; E-mail: qinyq5@mail2.sysu.edu.cn
通信作者: 刘广(1992年生), 男; 研究方向: 非线性振动、参数识别; E-mail: liug36@mail.sysu.edu.cn

近几十年中, 对含非线性因素的机翼气动弹性响应进行了大量的研究(杨超等, 2018; 杨智春等, 2016)。机翼系统中的非线性因素通常可以分为气动力和结构非线性, 气动力非线性来自于空气来流(Gupta et al., 2019), 结构非线性来自于结构的大变形(齐念等, 2013)或者是材料的非线性本构关系(Darabi et al., 2019)等。此外, 机翼在加工和安装过程中的容限误差, 或者是控制面铰链的松动都会引入间隙非线性(Shi et al., 2023)。理论分析以及风洞试验都表明, 系统存在上述非线性因素时, 若来流速度超过临界速度机翼就会产生极限环振荡(Liu et al., 2018)。

分析非线性气动弹性系统周期解的方法主要有数值法和解析法。因数值方法的局限性, 学者更加关注解析或半解析法。常见的解析或半解析方法, 如谐波平衡法(Miguel et al., 2020)、同伦分析法(Liao et al., 2004)和增量谐波平衡法(Liu et al., 2018)等, 都能够成功获得非线性系统的周期解。但是由于间隙非线性的非光滑性, 上述半解析方法在实施之前都需要先对间隙非线性进行光滑化处理(Liu et al., 2012)。此类光滑化处理或多或少会引入一些额外的模型误差。且含间隙非线性的气动弹性系统还属于自激系统, 这意味着对于处于周期振动状态的机翼系统, 其振动的频率是未知的(Liu et al., 2012; Liu et al., 2018)。这些进一步增大了求解含间隙非线性的气动弹性系统半解析周期解的难度。

本文提出了一种新的求解非线性系统的半解析方法, 即时域最小残值法(Liu et al., 2021a; Liu et al., 2021b; Liu et al., 2022)。该方法通过将含间隙非线性的气动弹性系统的半解析解求解问题转化为最小值优化问题, 然后在时域节点上展开迭代求解。由于该方法属于时频混合方法, 并且是直接对含间隙非线性的气动弹性系统的控制方程进行求解, 因此无需对非光滑区域进行光滑处理, 得到的半解析解具有更高的精度。

1 二元机翼模型的运动方程

图1为大展弦比的机翼模型, 仅考虑模型在俯仰和沉浮方向的运动(Liu et al., 2012)。图中, b 为机翼半跨的长度; h 为机翼在沉浮方向的位移, 取向下为正; α 为机翼俯仰角度, 取抬头为正; E 为机翼的弹性轴。 $a_h b$ 为弹性轴 E 到机翼中心的距离, $x_\alpha b$ 为机翼质心位置 G 到弹性轴 E 的距离。

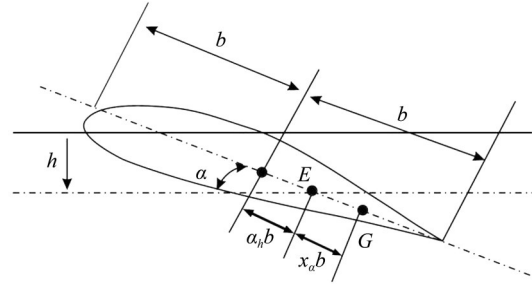


图1 二元机翼模型

Fig. 1 Sketch of the two-dimensional airfoil

假设机翼在亚音速的不可压缩流中运动, 根据第二类 Lagrange 方程, 建立如下的气动弹性系统运动方程(Liu et al., 2018)

$$\begin{cases} \ddot{h} + x_\alpha \ddot{\alpha} + 2\zeta_h \frac{\bar{\omega}}{U} \dot{h} + \left(\frac{\bar{\omega}}{U}\right)^2 h = -\frac{1}{\mu} C_L(t) + \frac{P(t)b}{mU^2}, \\ \frac{x_\alpha}{r_\alpha^2} \ddot{h} + \ddot{\alpha} + 2\zeta_\alpha \frac{1}{U} \dot{\alpha} + \left(\frac{1}{U}\right)^2 M(\alpha) \\ = \frac{2}{\mu r_\alpha^2} C_M(t) + \frac{Q(t)}{mU^2 r_\alpha^2}, \end{cases} \quad (1)$$

式中 h , α 上的点代表对无量纲时间 t' 的导数, $t' = Vt/b$, V 为来流速度, t 为真实运动时间。无量纲沉浮位移 $h_1 = h/b$; r_α 为机翼绕弹性轴 E 的回转半径; ζ_h 和 ζ_α 为机翼在沉浮和俯仰方向的阻尼比。无量纲频率比 $\bar{\omega} = \omega_h/\omega_\alpha$, ω_h 和 ω_α 为机翼沉浮和俯仰方向的固有频率。 $U = V/b\omega_\alpha$ 为无量纲来流速度; μ 为单位长度的机翼与空气密度的比值; m 是单位长度的机翼质量。考虑俯仰方向存在间隙非线性, 俯仰方向的非线性刚度 $M(\alpha)$ 为

$$M(\alpha) = \begin{cases} M_0 + \alpha - \alpha_f, & \alpha < \alpha_f; \\ M_0 + M_f(\alpha - \alpha_f), & \alpha_f \leq \alpha \leq \alpha_f + \delta; \\ M_0 + \alpha - \alpha_f + \delta(M_f - 1), & \alpha > \alpha_f + \delta. \end{cases} \quad (2)$$

$M(\alpha)$ 与 α 的关系如图2所示。图中 δ 为间隙大小, M_f 为图中间隙对应的斜率。

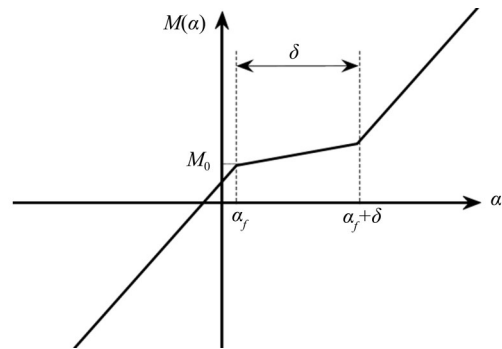


图2 $M(\alpha)$ 与 α 的关系

Fig. 2 Sketch of $M(\alpha)$ versus α

根据 Theodorsen 气动理论(Theodorsen, 1949), 方程(1)中的升力 $C_L(t)$ 为

$$C_L(t) = (\ddot{h} - a_h \ddot{\alpha} + \dot{\alpha}) + 2 \left(\alpha(0) + \dot{h}(0) + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \dot{\alpha}(0) \right) \phi(t) + 2 \int_0^t \phi(t-\sigma) \left(\dot{\alpha}(\sigma) + \ddot{h}(\sigma) + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \ddot{\alpha}(\sigma) \right) d\sigma, \quad (3)$$

对应的力矩 $C_M(t)$ 为

$$C_M(t) = \left(\frac{1}{2} + a_h \right) \left(\alpha(0) + \dot{h}(0) + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \dot{\alpha}(0) \right) \phi(t) + \left(\frac{1}{2} + a_h \right) \int_0^t \phi(t-\sigma) \left(\dot{\alpha}(\sigma) + \ddot{h}(\sigma) + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \ddot{\alpha}(\sigma) \right) d\sigma + \frac{a_h}{2} (\ddot{h} - a_h \ddot{\alpha}) - \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \frac{1}{2} \dot{\alpha} - \frac{1}{16} \ddot{\alpha}, \quad (4)$$

式中 $\phi(t)$ 是 Wagner 函数。根据 Jone 近似可得 $\phi(t) = 1 - \varphi_1 e^{-\epsilon_1 t} - \varphi_2 e^{-\epsilon_2 t}$, 其中 $\varphi_1 = 0.165$, $\epsilon_1 = 0.0455$, $\varphi_2 = 0.335$, $\epsilon_2 = 0.3$ 。式(3)中 $\int_0^t \phi(t-\sigma) \left(\dot{\alpha}(\sigma) + \ddot{h}(\sigma) + \left(\frac{1}{2} - a_h \right) \ddot{\alpha}(\sigma) \right) d\sigma$ 项同时存在微分与积分, 无法直接通过传统的数值积分方法进行求解。Trickey(2000)和 Liu et al.(2020)通过拉普拉斯变换引入一个辅助变量, 成功将同时包含微分项与积分项的方程(3)降阶为一个三自由度的微分方程

$$\begin{cases} e_0 \ddot{h} + e_1 \ddot{\alpha} + e_2 \dot{h} + e_3 \dot{\alpha} + e_4 \dot{y} + e_5 \alpha + e_6 y + e_7 h = 0, \\ f_0 \ddot{h} + f_1 \ddot{\alpha} + f_2 \dot{h} + f_3 \dot{\alpha} + f_4 \dot{y} + f_5 \alpha + f_6 y + f_7 M(\alpha) = 0, \\ g_0 \ddot{y} + g_1 \dot{h} + g_2 \dot{\alpha} + g_3 \dot{y} + g_4 \alpha + g_5 y = 0, \end{cases} \quad (5)$$

式中 e_i , f_i ($i = 0 \sim 7$) 及 g_i ($i = 0 \sim 5$) 的表达式在附录中给出。引入 $\mathbf{x} = [h, \alpha, y]^T$, 将方程(5)化为

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{F}(\mathbf{x}) = 0, \quad (6)$$

式中非线性向量 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = [0, f_7 M(\alpha), 0]^T$, 系统质量矩阵为

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} e_0 & e_1 & 0 \\ f_0 & f_1 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 \end{pmatrix},$$

阻尼矩阵为

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} e_2 & e_3 & e_4 \\ f_2 & f_3 & f_4 \\ g_1 & g_2 & g_3 \end{pmatrix},$$

刚度矩阵为

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} e_7 & e_5 & e_6 \\ 0 & f_5 & f_6 \\ 0 & g_4 & g_5 \end{pmatrix}.$$

2 时域最小残值法

2.1 最小值优化问题

时域最小残值法最早是由刘广等提出, 是一种针对强非线性系统的半数值半解析方法(Liu et al., 2021a; Liu et al., 2021b; Liu et al., 2022)。本文也将采用时域最小残值法来求解方程(5)所示的含间隙非线性气动弹性系统的周期解。对于方程(5)所示的周期解, 可以展开为傅里叶级数

$$x_j(t) = a_{j0} + [c_{jk} \cos k\omega t + s_{jk} \sin k\omega t], \quad j = 1, 2, 3, \quad (7)$$

其中 $x_j(t)$ 表示第 j 个自由度的位移, a_{j0} 是常数, c_{jk} 与 s_{jk} 是待定的正余弦谐波系数, ω 是和来流速度相关的未知频率。而求解方程(6)的半解析周期解, 本质为求解未知参数

$$\mathbf{a} = [\omega, a_{j0}, c_{j1}, c_{j2}, \dots, s_{j1}, s_{j2}], \quad j = 1, 2, 3.$$

当确定参数 \mathbf{a} 后, 代入方程(7)中, 即获得了系统的半解析周期解。需要注意的是, 在实际求解过程中, 方程(7)中的级数是不可能取无穷项的, 因此截取方程(7)的前 N 项作为系统的近似解, 即

$$x_j(t) \approx x_j^N(t) = a_{j0} + \sum_{k=1}^N [c_{jk} \cos k\omega t + s_{jk} \sin k\omega t]. \quad (8)$$

对方程(8)的位移函数求导, 得到系统的近似速度函数和加速度函数

$$\begin{cases} \dot{x}_j(t) \approx \dot{x}_j^N(t) = \sum_{k=1}^N [-k\omega c_{jk} \sin k\omega t + k\omega s_{jk} \cos k\omega t], \\ \ddot{x}_j(t) \approx \ddot{x}_j^N(t) = \sum_{k=1}^N [-(k\omega)^2 c_{jk} \cos k\omega t - (k\omega)^2 s_{jk} \sin k\omega t]. \end{cases} \quad (9)$$

方程(8)和(9)的近似级数解代入系统(6)所获得的残差, 显然不能在整个时域上恒等于0。此时的系统残差为

$$\mathbf{R} = \mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}^N + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}^N + \mathbf{K}\mathbf{x}^N + \mathbf{F}(\mathbf{x}^N). \quad (10)$$

虽然不能使残差 \mathbf{R} 在整个时域内都为0, 但仍可以通过选取合适的参数 \mathbf{a} 使得残差 \mathbf{R} 在一个周期 $t \in [0, T]$ 内尽可能小。自此, 关于含间隙非线性气动弹性系统的半解析周期解求解问题被转化为最小值优化问题, 即

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^* &= \arg \min_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \hat{h}(\mathbf{a}, t) \\ &= \min_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \int_0^{2\pi} \mathbf{R}(\mathbf{a}, t)^T \mathbf{R}(\mathbf{a}, t) dt, \end{aligned} \quad (11)$$

式中 $\hat{h}(\mathbf{a}, t)$ 为非线性目标函数, \mathcal{A} 是未知参数 \mathbf{a} 的可行域。

2.2 增强的响应灵敏度法

对于方程(11)的最小值优化问题, 可以通过增强响应灵敏度法来迭代求解。即选定一个合适的迭代初值 $\mathbf{a}^{(0)}$, 令

$$\mathbf{a}^{(j)} = \mathbf{a}^{(j-1)} + \delta \mathbf{a}^{(j)}, \quad j = 1, 2, \dots \quad (12)$$

进行迭代, 直到满足设定的收敛条件为止。迭代过程的核心问题是如何基于当前的参数 $\bar{\mathbf{a}}$ 来获得合适的迭代更新量 $\delta \mathbf{a}^{(j)}$ 。对于方程(11)的非线性目标函数 $\hat{h}(\mathbf{a}, t)$, 一种常用的求解方法是在离散的时间节点 $t_k \in [0, T]$, $k = 1, 2, \dots, l$ 上对其进行线性化, 对线性化后的近似函数 $\hat{h}(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$ 进行求解

$$\min_{\mathbf{a} \in \mathcal{A}} \hat{h}(\bar{\mathbf{a}} + \delta \mathbf{a}, t), \quad (13)$$

其中

$$\begin{aligned} \hat{h}(\bar{\mathbf{a}} + \delta \mathbf{a}, t) &= \left\| \delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t) - \mathbf{S}(\bar{\mathbf{a}}, t) \delta \mathbf{a} \right\|^2, \\ \delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t) &= \mathbf{0} - \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t), \end{aligned}$$

式中 $\|\cdot\|^2$ 表示对 \cdot 的内容取 l^2 范数。系统关于未知参数 $a_i \in \mathbf{a}$, $i = 1, 2, \dots, m$ 的一阶响应灵敏度矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\bar{\mathbf{a}}, t) &= \nabla_{\bar{\mathbf{a}}} \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t) \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t_1)}{\partial a_1} & \frac{\partial \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t_1)}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t_1)}{\partial a_m} \\ \frac{\partial \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t_2)}{\partial a_1} & \frac{\partial \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t_2)}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t_2)}{\partial a_m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t_l)}{\partial a_1} & \frac{\partial \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t_l)}{\partial a_2} & \dots & \frac{\partial \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t_l)}{\partial a_m} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (14)$$

式中 $\frac{\partial \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t_j)}{\partial a_i}$ 表示残差函数对未知参数 $a_i \in \mathbf{a}$ 的灵敏度。方程(13)中, 有原目标函数 $\hat{h}(\mathbf{a}, t) = 0$, 因此有 $\delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t) = \mathbf{0} - \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t)$ 。需要注意的是, 在迭代求解的过程中, 响应灵敏度矩阵 $\mathbf{S}(\bar{\mathbf{a}}, t)$ 很有可能由于条件数过大而陷入病态, 因此在方程(13)中引入 Tikhonov 正则化, 则原问题转化为

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{a}_\lambda &= \arg \min_{\delta \mathbf{a} \in \mathcal{A} - \bar{\mathbf{a}}} \left\| \delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t) - \mathbf{S}(\bar{\mathbf{a}}, t) \delta \mathbf{a} \right\|^2 + \lambda \|\delta \mathbf{a}\|^2 \\ &= \left[\mathbf{S}^T(\bar{\mathbf{a}}, t) \mathbf{S}(\bar{\mathbf{a}}, t) + \lambda \mathbf{I} \right]^{-1} \mathbf{S}^T(\bar{\mathbf{a}}, t) \delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t), \end{aligned} \quad (15)$$

式中 \mathbf{I} 表示单位矩阵, λ 为正则化参数且有 $\lambda \geq 0$ 。Tikhonov 正则化本质是通过参数 λ 来调节迭代步长 $\|\delta \mathbf{a}\|^2$ 和残差 $\left\| \delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t) - \mathbf{S}(\bar{\mathbf{a}}, t) \delta \mathbf{a} \right\|^2$ 之间的比例。从方程(15)可以看出, 不同的 λ 会得到不同的迭代步长。参考文献(Hassen, 1992), 通过 L-curve 法确定正则化参数并标记为 $\lambda_l(\bar{\mathbf{a}})$ 。

上述的正则化操作是对近似的线性目标函数 $\hat{h}(\delta \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}}, t)$ 进行的, 因此只适用于求解弱非线性系统。对于强非线性系统, 应当引入“置信域限制”到迭代过程中。在方程(13)的线性化近似中, 显然只有当迭代更新量 $\delta \mathbf{a}$ 足够小, 才能保证近似的线性目标函数 $\hat{h}(\delta \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}}, t)$ 和原非线性目标函数 $\hat{h}(\bar{\mathbf{a}}, t)$ 足够接近。引入一致性指标来衡量两者的近似程度, 即

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}) &= \frac{\hat{h}(\bar{\mathbf{a}}) - \hat{h}(\delta \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}})}{\hat{h}(0, \bar{\mathbf{a}}) - \hat{h}(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})} \\ &= \frac{\left\| \delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t) \right\|^2 - \left\| \delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}} + \delta \mathbf{a}, t) \right\|^2}{\left\| \delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t) \right\|^2 - \left\| \delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}, t) - \mathbf{S}(\bar{\mathbf{a}}, t) \delta \mathbf{a} \right\|^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

方程(16)中, 有 $\hat{h}(0, \bar{\mathbf{a}}) - \hat{h}(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}) > 0$ 。如果能保证 $\tilde{\omega}(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}) > 0$, 则 $\hat{h}(\bar{\mathbf{a}}) - \hat{h}(\delta \mathbf{a} + \bar{\mathbf{a}}) > 0$ 。这意味着迭代更新量 $\delta \mathbf{a}$ 可以使 $\hat{h}(\bar{\mathbf{a}} + \delta \mathbf{a})$ 小于 $\hat{h}(\bar{\mathbf{a}})$, 也就是说目标函数开始收敛。根据我们的经验, 当一致性指标处于以下区间时, 可以使得迭代具有最快的收敛速度。此时,

$$\tilde{\omega}(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}) \geq \tilde{\omega}_{cr} \in [0.25, 0.75]. \quad (17)$$

置信域限制可以保证 $\hat{h}(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}})$ 足够接近 $\hat{h}(\mathbf{a}, t)$, 或者说只要 λ 足够大, 一致性指标就必定被满足。因此存在一个临界正则化参数值 λ_{cr} , 只要 $\lambda > \lambda_{cr}$, 一致性指标就刚好被满足。此外, $\left\| \mathbf{S}^T(\bar{\mathbf{a}}) \delta \mathbf{R}(\bar{\mathbf{a}}) \right\| \neq 0$ 时, 有

$$\begin{cases} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \tilde{\omega}(\delta \mathbf{a}, \bar{\mathbf{a}}) = 1 > \tilde{\omega}_{cr}, \\ \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \|\delta \mathbf{a}_\lambda\| = 0. \end{cases} \quad (18)$$

上述正则化也叫增强的正则化, 该响应灵敏

度法也被称为增强的响应灵敏度法。

3 数值算例

对于方程(6)所描述的系统, 根据Hopf分岔理论 (Marsden, 1976; Hassard et al., 1981), 当来流速度 U 超过临界颤振速度 $U_f = 6.285 1$ 时, 系统将会失去稳定性。本算例首先考虑 $U = 0.8U_f$ 的情况, 此时系统将会产生稳定的极限环, 其近似周期解可被展开为如方程(8)的傅里叶级数, 以第一个自由度为例, 有

$$\begin{aligned} x_1(t) &\approx x_1^N(t) \\ &= a_{10} + \sum_{k=1}^N [c_{1k} \cos k\omega t + s_{1k} \sin k\omega t]. \end{aligned} \quad (19)$$

对上述近似解析解求导, 得到速度和加速度分别为

$$\begin{cases} \dot{x}_1^N(t) = \sum_{k=1}^N [-k\omega c_{1k} \sin k\omega t + k\omega s_{1k} \cos k\omega t], \\ \ddot{x}_1^N(t) = \sum_{k=1}^N [-(k\omega)^2 c_{1k} \cos k\omega t - (k\omega)^2 s_{1k} \sin k\omega t]. \end{cases} \quad (20)$$

对第二和第三个自由度进行类似的操作, 并将所得位移、速度和加速度函数代入方程(6), 则含间隙非线性的气动弹性系统半解析解求解问题就被转化为方程(11)所示的最小值优化问题。即, 寻找一组未知参数

$\mathbf{a} = [\omega, a_{j0}, c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{jN}, s_{j1}, s_{j2}, \dots, s_{jN}]$, 使得目标函数 $\mathfrak{h}(\mathbf{a}, t)$ 尽可能接近于 0。对于此非线性最小值优化问题, 用增强的响应灵敏度法来迭代求解。未知参数 $a_i \in \mathbf{a}$ 的响应灵敏度为

$$a_i \sim \frac{\partial \mathbf{x}^N}{\partial a_i}, \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}^N}{\partial a_i}, \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}^N}{\partial a_i}, \quad i = 1, 2, \dots, 6N + 4. \quad (21)$$

以第一个自由度的位移函数 $x_1^N(t)$ 为例, 其关于系统的未知频率 ω 、常数项 a_{10} 以及谐波系数 c_{1k} 和 s_{1k} 的灵敏度为

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1^N}{\partial \omega} = \sum_{k=1}^N [-k t c_{1k} \sin k\omega t + k t s_{1k} \cos k\omega t], \\ \frac{\partial x_1^N}{\partial a_{10}} = 1, \\ \frac{\partial x_1^N}{\partial c_{1k}} = \cos k\omega t, \\ \frac{\partial x_1^N}{\partial s_{1k}} = \sin k\omega t. \end{cases} \quad (22)$$

最终可以得到系统残差 $\mathbf{R}(\mathbf{a}, t)$ 关于未知参数 $a_i \in \mathbf{a}, i = 1, 2, \dots, 6N + 4$ 的灵敏方程, 有

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial a_i} = \mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{x}}^N}{\partial a_i} + \mathbf{C} \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}^N}{\partial a_i} + \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{x}^N}{\partial a_i} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}^N} \frac{\partial \mathbf{x}^N}{\partial a_i}. \quad (23)$$

此外, 系统(6)的参数设定值为 $\mu = 100, r_\alpha = 0.5, a_h = -0.5, \zeta_h = 0, \zeta_\alpha = 0, x_\alpha = 0.25, \bar{\omega} = 0.2$, 图 2 中和间隙有关的参数设定值为 $M_0 = 0, \alpha_f = 0.25\pi/180, M_f = 0, \delta = 0.5\pi/180$ (Liu et al., 2012)。时域最小残值法属于迭代型算法, 在求解之前还需给出未知参数 a_i 的初始迭代值。系统频率初值设定为 $\omega^0 = 0.087$, 常数项 $a_{10}^0 = 0, a_{20}^0 = 0, a_{30}^0 = 0$ 。一阶谐波系数的初始值设定为 $c_{11}^0 = 0.043, s_{11}^0 = 0, c_{21}^0 = 0.0167, s_{21}^0 = 0.0033, c_{31}^0 = 0.0171, s_{31}^0 = 0.0532$ 。除一阶谐波系数之外, 其余谐波系数的初始值全部设为 0。需要注意的是, 在方程(12)的迭代中, 系统第一个自由度的正弦系数不参与迭代, 也即在每次迭代中均有 $\Delta s_{11} = 0$ 。

图 3 给出了 $N = 30, U/U_f = 0.8$ 时系统的相图。图 3 中, (a) 为沉浮方向的相图, (b) 为俯仰方向的相图; 黑点表示 4 阶龙格-库塔法获得的数值解,

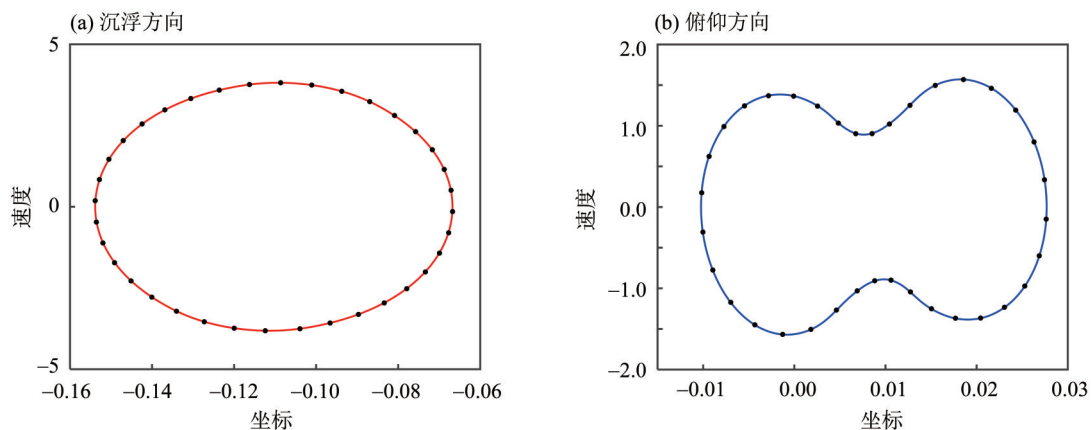


图 3 $U/U_f = 0.8$ 时系统的相图

Fig. 3 The phase of the system at $U/U_f = 0.8$

红线和蓝线为时域最小残值法获得的半解析解。从图中可以看出, 数值解和时域最小残值法获得的半解析解吻合非常好, 这意味着时域最小残值法获得的结果有着较高的精度。此外, 当 $UIU_f = 0.8$ 时, 系统两个方向的相图均不关于原点对称, 这表明方程(8)的半解析周期解同时存在奇次谐波和偶次谐波。表1给出了 $N = 30$ 、 $UIU_f = 0.8$ 时该

半解析周期解的谐波系数及振动频率。图4给出了含间隙的气动弹性系统的时程图。和图3类似, 红线和蓝线分别为时域最小残值法获得的沉浮方向和俯仰方向的半解析解。时程图进一步验证了时域最小残值法获得的半解析解和龙格-库塔法的结果吻合得非常好。

表1 $N = 30, UIU_f = 0.8$ 时的谐波系数与振动频率Table 1 The Harmonic coefficient and vibration frequency at $N = 30, UIU_f = 0.8$

阶数	h 的余弦系数	h 的正弦系数	α 的余弦系数	α 的正弦系数	频率
常数项	-0.110 312 107		0.008 726 677		
第1阶	0.043 483 195	0	0.016 762 311	0.003 319 774	
第2阶	-2.94×10^{-8}	-1.62×10^{-7}	1.88×10^{-7}	-6.10×10^{-7}	
第3阶	-4.83×10^{-5}	-9.38×10^{-5}	0.001 882 884	0.000 762 292	
第4阶	-6.77×10^{-9}	5.07×10^{-9}	1.80×10^{-8}	-4.18×10^{-8}	
第5阶	1.18×10^{-5}	3.01×10^{-5}	-8.64×10^{-5}	$-0.000 150 181$	
第6阶	3.64×10^{-9}	-9.69×10^{-10}	-1.66×10^{-8}	8.40×10^{-9}	
第7阶	1.03×10^{-6}	-3.36×10^{-6}	-3.07×10^{-6}	1.56×10^{-5}	
第8阶	-1.62×10^{-9}	-3.92×10^{-10}	6.30×10^{-9}	5.34×10^{-10}	
第9阶	2.47×10^{-7}	-1.85×10^{-6}	-3.89×10^{-7}	7.94×10^{-6}	
第10阶	3.50×10^{-10}	3.90×10^{-10}	-2.07×10^{-9}	-1.41×10^{-9}	
第11阶	-1.22×10^{-6}	1.38×10^{-6}	4.64×10^{-6}	-6.06×10^{-6}	
第12阶	9.15×10^{-11}	-2.39×10^{-11}	-7.24×10^{-10}	1.47×10^{-10}	
第13阶	9.17×10^{-7}	-3.45×10^{-7}	-3.67×10^{-6}	1.63×10^{-6}	
第14阶	-1.00×10^{-10}	-2.11×10^{-10}	2.38×10^{-10}	8.37×10^{-10}	
第15阶	-2.76×10^{-7}	-5.44×10^{-8}	1.13×10^{-6}	1.63×10^{-7}	0.087 12
第16阶	-4.76×10^{-11}	2.06×10^{-10}	-5.00×10^{-11}	-8.30×10^{-10}	
第17阶	-9.73×10^{-8}	-9.77×10^{-9}	3.92×10^{-7}	2.02×10^{-8}	
第18阶	6.90×10^{-11}	-7.78×10^{-11}	-4.14×10^{-10}	3.33×10^{-10}	
第19阶	1.37×10^{-7}	1.39×10^{-7}	-5.74×10^{-7}	-5.36×10^{-7}	
第20阶	-2.75×10^{-11}	-1.30×10^{-11}	-8.20×10^{-12}	5.32×10^{-11}	
第21阶	-4.29×10^{-8}	-1.45×10^{-7}	1.94×10^{-7}	5.75×10^{-7}	
第22阶	-5.27×10^{-11}	2.14×10^{-11}	1.03×10^{-10}	-9.03×10^{-11}	
第23阶	-1.48×10^{-8}	6.09×10^{-8}	5.08×10^{-8}	-2.46×10^{-7}	
第24阶	5.36×10^{-11}	1.39×10^{-11}	-3.02×10^{-10}	-4.41×10^{-11}	
第25阶	5.77×10^{-10}	1.28×10^{-8}	-4.59×10^{-9}	-5.03×10^{-8}	
第26阶	-3.25×10^{-11}	-2.90×10^{-11}	6.02×10^{-11}	1.15×10^{-10}	
第27阶	3.41×10^{-8}	-2.87×10^{-8}	-1.32×10^{-7}	1.18×10^{-7}	
第28阶	-7.33×10^{-12}	1.15×10^{-11}	-3.59×10^{-11}	-4.64×10^{-11}	
第29阶	-4.18×10^{-8}	8.65×10^{-9}	1.65×10^{-7}	-3.90×10^{-8}	
第30阶	3.70×10^{-12}	1.61×10^{-11}	-7.10×10^{-11}	-5.98×10^{-11}	

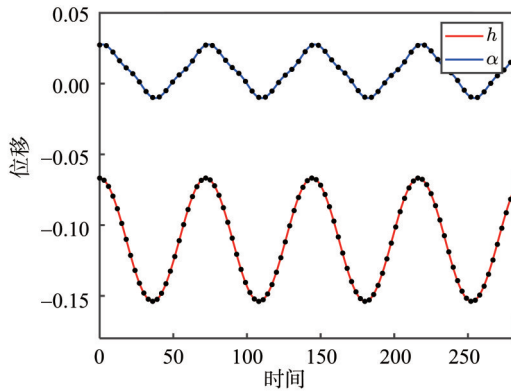


图4 $U = 0.8U_f$ 时系统的时程图

Fig. 4 The time histories of the system at $U = 0.8U_f$

图5给出了不同谐波数的俯仰方向相图。图中红点为截取项数 $N=1$ 时对应的极限环，虚线、绿色实线和蓝色实线分别表示 $N=5, 20, 30$ 时俯仰方向的相图，而黑点则表示4阶龙格-库塔法的结果。从图中可以看出，当仅保留1阶谐波时，时域最小残值法虽然能够收敛，但结果误差非常大。随着保留的谐波数逐渐增加，半解析解的精度也逐渐升高。在图5的局部放大图中，当保留5阶谐波时，时域最小残值法获得的半解析解已经可以收敛到正确解上，但和精确解仍有区别。当保留20或30阶谐波时，半解析解和数值解完全重合。这意味着当保留的谐波数增加到一定数量时，谐波数的增加对精度的提升已经不大，但更多的谐波数会显著影响求解的效率。

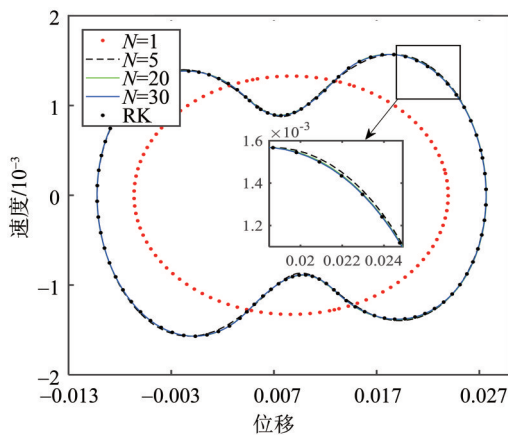


图5 保留不同数目的谐波获得的俯仰方向相图

Fig. 5 The phase of the system with different order of harmonics

为了定量分析截断的谐波阶次对精度的影响，将获得的半解析解代到控制方程，绘制系统的残差曲线。图6为 $N=5, 20, 30$ 时两个自由度的残

差曲线。其中，红线和黑线分别为沉浮方向和俯仰方向的残差曲线。从图中可以看到， $N=5$ 时系统的残差为 10^{-5} 的量级； $N=20$ 时，系统残差约为 $N=5$ 时的一半量级； $N=30$ 时，残差减小到 10^{-6} 的量级。这说明保留的谐波越多，对应的半解析解有更高的精度；但当保留的谐波数达到一定的数值之后，谐波阶次对精度的提升有限。

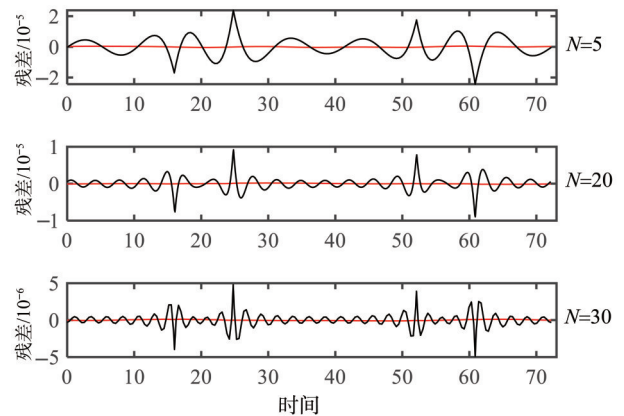
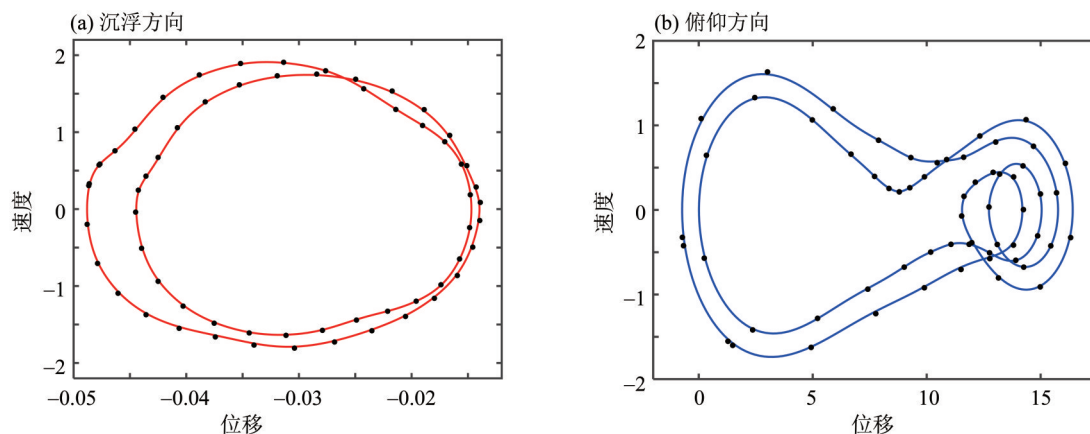


图6 不同谐波数目对应的残差曲线

Fig. 6 The residual curves with different order of harmonics

此外，俯仰方向的残差曲线中有几个尖峰，这是由于方程(8)所示的半解析解采用傅里叶级数作为基函数。对于系统(6)而言， $M(\alpha)$ 存在与 α 有关的不光滑区域。当采用截断的傅里叶级数作为系统的近似解析解时，将会在非光滑区域的转折点附近出现无法避免的Gibbs现象。Gibbs现象的存在意味着，以增加截断谐波的阶次来提升近似解析解的精度，需要付出巨大的计算代价。即必须保留足够多的谐波，才能微量地提升半解析解的精度。这一性质是由系统的非光滑属性本身决定的，和本文采用的时域最小残值法无关。

继续研究 $U/U_f = 0.39$ 时的结果，以验证时域最小残值法的有效性。此时，系统的半解析解仍采用方程(19)的形式。但未知参数 a_i 的初始值设定为 $\omega^0 = 0.053$ ，常数项 $a_{10}^0 = 0, a_{20}^0 = 0, a_{30}^0 = 0$ 。一阶谐波系数 $c_{11}^0 = -0.0085, s_{11}^0 = 0, c_{21}^0 = 0.0056, s_{21}^0 = -0.0054, c_{31}^0 = 0.023, s_{31}^0 = -0.0062$ 。除一阶谐波系数之外，其余谐波系数的初始值均设为0。图7给出了 $U/U_f = 0.39$ 时两个自由度的相图。和 $U/U_f = 0.8$ 时系统出现的是周期为1的周期解不同， $U/U_f = 0.39$ 时系统出现了周期为2的周期解，如图7所示。虽然两种风速下系统出现了不同性质的周期解，但是时域最小残值法仍能获得和数值法一致的半解析周期解。

图7 $U = 0.39U_f$ 时系统的相图Fig. 7 The phase of the system at $U = 0.39U_f$

对于来流速度 $U/U_f = 0.39$ 时的含间隙的气动弹性系统(6), 当系统的未知参数 a_i 取不同的初始迭代值时, 时域最小残值法可能会获得不同的结果。图8给出了以另一组迭代初值获得的俯仰方向的相图。对比图8和图7可以看到, 两者的相图是

反对称的。这意味着系统的振动形态和系统的初始状态相关, 不同的初始状态将会导致系统进入不同的稳定极限环, 从另一方面体现了含间隙的气动弹性系统具有丰富的非线性性质。

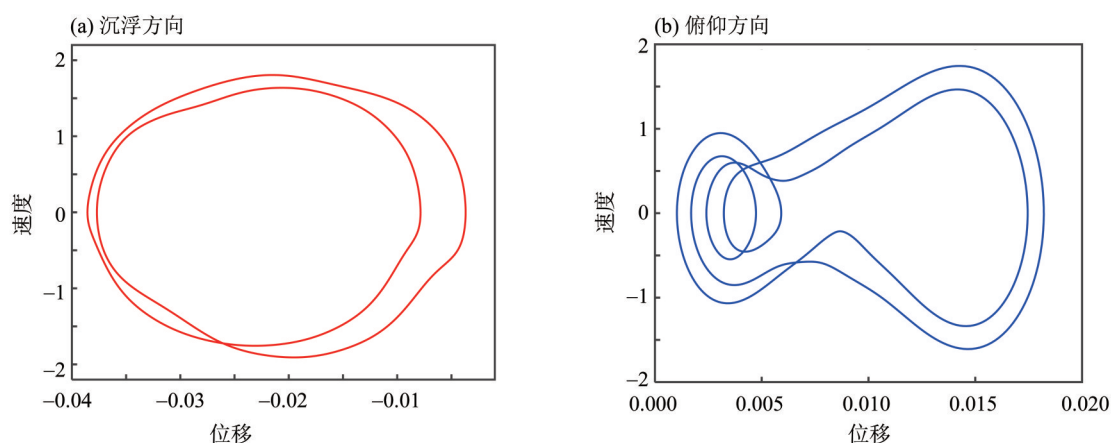


图8 不同初始迭代值时系统的相图

Fig. 8 The phase of the system with different initial iteration values

4 结论

本文提出了一种新的求解含间隙非线性气动弹性系统的半解析方法, 即时域最小残值法。通过该方法获得了来流速度为 $U/U_f = 0.8$ 和 $U/U_f = 0.39$ 时系统的半解析解, 并和数值法获得的结果进行了对比, 得到以下结论:

(1) 时域最小残值法获得的半解析解和数值法的结果吻合的非常好;

(2) 即便只考虑1阶谐波, 时域最小残值法的迭代也可以收敛。此外保留的谐波越多, 获得的结果精度越高;

(3) 时域最小残值法从不同的初始迭代值出发, 可能收敛到系统不同的极限环。

参考文献:

齐念, 叶继红, 2013. 基于离散元法的杆系结构几何非线性大变形分析[J]. 东南大学学报: 自然科学版, 43(5): 917-922.

杨超, 杨澜, 谢长川, 2018. 大展弦比柔性机翼气动弹性分析中的气动力方法研究进展[J]. 空气动力学学报, 36(6): 1009-1018+983.

- 杨智春, 田玮, 谷迎松, 等, 2016. 带集中非线性的机翼气动弹性问题研究进展[J]. 航空学报, 37(7): 2013–2044.
- DARABI M K, HUANG C W, BAZZAZ M, et al, 2019. Characterization and validation of the nonlinear viscoelastic-viscoplastic with hardening-relaxation constitutive relationship for asphalt mixtures [J]. Constr Build Mater, 216: 648–660.
- GUPTA R, ANSELL P J, 2019. Unsteady flow physics of airfoil dynamic stall[J]. AIAA Journal, 57(1): 165–175.
- HANSEN P C, 1992. Analysis of discrete ill-posed problems by means of the L-curve [J]. SIAM Rev, 34(4): 561–580.
- HASSARD B D, KAZARINOFF N D, WAN Y H, et al, 1981. Theory and applications of Hopf bifurcation [M]. New York: Cambridge University Press.
- LIAO S J, SHERIF S A, 2004. Beyond perturbation: Introduction to the homotopy analysis method [J]. Appl Mech Rev, 57(5): B25–B26.
- LIU G, LV Z R, LIU J K, et al, 2018. Quasi-periodic aeroelastic response analysis of an airfoil with external store by incremental harmonic balance method [J]. Int J Non Linear Mech, 100: 10–19.
- LIU G, LU Z R, LIU J K, et al, 2021a. A New semi-analytical technique for nonlinear systems based on response sensitivity analysis[J]. Nonlinear Dyn, 103(2): 1529–1551.
- LIU G, WANG L, LIU J K, et al, 2021b. A new semi-analytical approach for quasi-periodic vibrations of nonlinear systems[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simul, 103: 105999.
- LIU G, WANG L, LIU J K, et al, 2020. Parameter identification of nonlinear aeroelastic system with time-delayed feedback control[J]. AIAA Journal, 57(1): 165–175.
- LIU G, LIU J K, WANG L, et al, 2022. Time-domain minimum residual method combined with energy balance for nonlinear conservative systems[J]. Mech Syst Signal Process, 170: 108818.
- LIU J K, CHEN F X, CHEN Y M, 2012. Bifurcation analysis of aeroelastic systems with hysteresis by incremental harmonic balance method[J]. Appl Math Comput, 219(5): 2398–2411.
- MARSDEN J E, McCracken M, 1976. The Hopf bifurcation and its applications [M]. New York, NY: Springer Science & Business Media.
- MIGUEL L P, de OLIVEIRA TELOLI R, da SILVA S, 2020. Some practical regards on the application of the harmonic balance method for hysteresis models[J]. Mech Syst Signal Process, 143: 106842.
- SHI Y, HE S, CUI G, et al, 2023. Oscillation quenching and physical explanation on freeplay-based aeroelastic airfoil in transonic viscous flow[J]. Chin J Aeronaut. <https://doi.org/10.1016/j.cja.2023.05.016>.
- THEODORSEN T, 1949. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter[R]. California: NASA Ames Research Center.
- TRICKEY S T, 2000. Global and local dynamics of an aeroelastic system with a control surface freeplay nonlinearity [M]. Durham: Duke University.

(责任编辑 王海蓉)