

基于加速度信号分解和正则化的宽频位移重构方法*

陈信君, 吕中荣, 汪利

中山大学航空航天学院, 广东 深圳 518107

摘要: 实际工程应用中, 位移测量通常需要设置参考点, 导致大型结构的位移难以直接测量。为此, 本文提出了一种基于加速度信号分解和正则化的位移重构新方法, 直接利用易获取(无需参考点)、精度高的加速度数据来恢复结构的位移信息。首先, 建立位移与加速度的离散线性方程, 直接求解该方程得出, 位移是加速度的二重积分。但由于直接积分对低频噪声十分敏感, 导致出现低频漂移现象。因此在离散线性方程的基础上引入 Tikhonov 正则化, 克服求解中的病态性, 解决低频漂移问题。为了提高位移重构精度, 还发展了基于重叠窗的位移重构方案, 每个窗的区间长度应取信号主频周期的 3 倍左右。研究发现, 该方法适合于单一主频(或窄频)加速度的位移重构, 对宽频位移重构通常效果较差。为了提高宽频位移重构精度, 本文进一步提出有限带宽信号分解方法, 将宽频加速度信号分解为若干窄频信号, 然后, 利用正则化方法对每个窄频信号进行高精度的位移重构。最后, 数值和实验算例结果表明, 所提方法确实能从宽频加速度信号中准确重构出结构的位移响应。

关键词: 宽频位移重构; 低频漂移; 有限带宽信号分解; 正则化

中图分类号: O329 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137(2023)05-0128-08

Broadband displacement reconstruction method based on acceleration signal decomposition and regularization

CHEN Xinjun, LU Zhongrong, WANG Li

School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Shenzhen 518107, China

Abstract: In practical engineering application, the displacement measurement usually needs to set reference points, which makes it difficult to directly measure the displacement of large structures. Therefore, this paper proposes a new method which directly uses easily accessible (no reference point needed) and highly precise acceleration data to recover the displacement of the structure. Firstly, the discrete linear equation between displacement and acceleration is established. Displacement is the double integral of acceleration by directly solving the equation. However, direct integration is very sensitive to low frequency noise, resulting in "low-frequency drift" phenomenon. Secondly, Tikhonov regularization is introduced on the basis of discrete linear equations to overcome the ill-posed problem and solve the "low-frequency drift" problem. In addition, in order to improve the accuracy of displacement reconstruction, a displacement reconstruction scheme based on overlapping windows is developed, and the interval length of each window should be about 3 times of the main frequency period of the signal. It is found that this method is suitable for the displacement reconstruction of acceleration at single main frequency (or narrow frequency), but it is usually poor for broadband displacement reconstruction. In order to improve the accuracy of broadband displacement reconstruction, this paper

* 收稿日期: 2022-11-05

录用日期: 2023-04-07

网络首发日期: 2023-06-19

基金项目: 国家自然科学基金(11972380); 广东省重点领域研发计划项目(2022B0101080001)

作者简介: 陈信君(1998年生), 男; 研究方向: 系统模态分析与参数识别; E-mail: chenxj259@mail2.sysu.edu.cn

通信作者: 汪利(1989年生), 男; 研究方向: 结构健康监测和计算力学; E-mail: wangli75@mail.sysu.edu.cn

给定初始位移和速度条件,直接求解式(3)可得,位移是加速度的二重积分。但由于存在噪声,即使初始条件是准确的,直接积分所得结果仍然会发生“低频漂移”,即随着时间推移,位移误差越来越大。记测量的加速度为 $\bar{a}(t)$,真实加速度为 $a(t)$,可建立目标函数使以下误差平方函数 Π_E 取最小值

$$\min_{u(t)} \Pi_E = \frac{1}{2} \int_{t_1}^{t_N} (a(u(t)) - \bar{a})^2 dt. \quad (4)$$

将其写成离散形式,并考虑式(3),可得

$$\begin{aligned} \min_u \Pi_E(u) &= \frac{1}{2} \left\| D \left(\frac{1}{(\Delta t)^2} Bu - \bar{a} \right) \right\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2(\Delta t)^3} \left\| DBu - (\Delta t)^2 D\bar{a} \right\|_2^2, \end{aligned} \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned} \bar{a} &= [\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_N]^T, \\ D &= \text{diag} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 1, 1, \dots, 1, 1, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \end{aligned}$$

是 N 阶权量矩阵, $\|\cdot\|_2$ 表示向量的2范数。

为了克服不适定性,避免出现低频漂移,采用Tikhonov正则化方法,为上述最小化问题增加一个罚函数项,可得

$$\min_u \left\| DBu - (\Delta t)^2 D\bar{a} \right\|_2^2 + \lambda^2 \|u\|_2^2, \quad (6)$$

其中 λ 正则化因子,式(5)中的系数 $1/(2(\Delta t)^3)$ 因不影响结果而被省略。求解式(6)可得

$$u = ((DB)^T(DB) + \lambda^2 I)^{-1} (DB)^T D\bar{a} (\Delta t)^2, \quad (7)$$

其中 I 表示单位矩阵。以上求解中,正则化因子 λ 的取值对位移重构的精度起着关键性的作用。如果 λ 趋近于0,正则化无法带来稳定效益;反之,如果 λ 的值很大,方程的解将趋近于0。

通常可以使用L曲线法和交叉验证法确定上述反问题的最佳正则化因子,但它们的计算成本是十分巨大的。基于单自由度自由振动, Lee et al. (2010)提供了一个经验选取法则,将正则化因子作为时间窗口 $[t_1, t_N]$ 内点数量的函数来确认最优正则化因子,即

$$\lambda = 46.81N^{-1.95}.$$

此外,为了进一步降低噪声的影响,所取时间窗口长度 $t_N - t_1$ 一般取主频周期的3倍(Lee et al., 2010)。为了减少边界附近位移估计不准确性的影响,使用重叠时间窗口技术。重叠时间窗口以时间增量而非时间窗口大小为单位向前移动,位移重构在每个时间窗口中依次进行,但每次只取该时

间窗中心的重构位移作为时间窗中点的解。重叠窗的计算示例见图1,它针对每个点的位移重构引入不同的时间窗。比如,假设时间窗长度为 $N=2k+1$,为了重构 t_i 时刻的位移,需要在时间窗 $[t_{i-k}, t_{i+k}]$ 内求解式(7),并取 u_i 作为 t_i 点的重构位移解,而舍弃其他点的结果。

重叠时间窗和正则化方法确实能准确重构低频主导的位移响应。但实际工程中,结构可能出现宽频响应,即其包含多阶频率信息,且多个频率分布十分广泛。此时,该方法难以得到满意的位移恢复结果。接下来,将在已有方法的基础上,进一步提出宽频加速度信号的有限带宽分解方法,解决宽频位移重构问题。

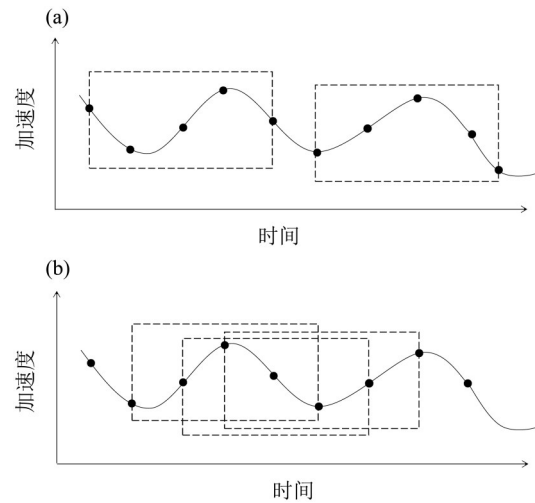


图1 非重叠窗(a)与重叠窗(b)技术对比

Fig. 1 Difference between non-overlapping window technology (a) and overlapping window technology (b)

2 面向宽频位移重构的有限带宽信号分解

基于加速度积分与正则化的位移重构方法克服了低频漂移现象,但其时间窗长度的选取与结构的主频周期有关,理论上适用于处理低频主导或窄频加速度信号。对于宽频加速度信号,这里拟引入有限带宽信号分解,将宽频加速度信号分解为若干窄频信号,进而使用已有方法对每个窄频信号进行高精度位移重构,最终实现宽频位移的准确重构。

宽频信号加速度 $a(t)$ 包含多个主频峰值段,可按照频率分布特征,分解为若干窄频(或有限带宽)的信号

$$a(t) = a_1(t) + a_2(t) + \dots + a_m(t), \quad (8)$$

其中 $a_1(t), a_2(t), \dots, a_m(t)$ 为有限带宽信号, 它们的频率被限制在不同的频域范围内。具体而言, 引入 $m-1$ 个频率分割点 $0 < \sigma_1 < \dots < \sigma_{m-1} < \infty$, 将原始信号分解成 m 个有限带宽信号, 第一个信号 $a_1(t)$ 为限定在频域 $|\omega| \leq \sigma_1$ 上的信号, 第 k 个信号 $a_k(t)$ 限制在频域 $\sigma_{k-1} < |\omega| \leq \sigma_k$, $k = 2, \dots, m-1$ 上, 第 m 个信号 $a_m(t)$ 限制在频域 $|\omega| > \sigma_m$ 上。 $a_1(t), a_2(t), \dots, a_m(t)$ 在频域上的表现形式如图2所示。

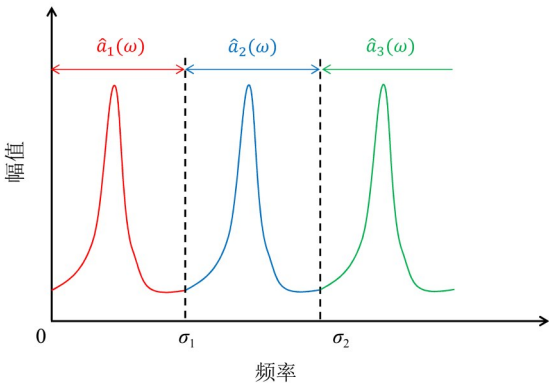


图2 频域上的有限带宽信号分解示意图

Fig. 2 Schematic diagram of finite bandwidth signal decomposition in frequency domain

如何快速实现有限带宽信号分解是一个关键问题。记 $\hat{\mathbf{a}}(\omega)$ 表示任意时域信号 $\mathbf{a}(t)$ 的频域上的 Fourier 变换。此时, 理论上

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{a}}_1(\omega) = \hat{I}_{\sigma_1}(\omega) \hat{\mathbf{a}}(\omega), \\ \hat{\mathbf{a}}_k(\omega) = (\hat{I}_{\sigma_k}(\omega) - \hat{I}_{\sigma_{k-1}}(\omega)) \hat{\mathbf{a}}(\omega), \end{cases} \quad (9)$$

其中 $\hat{I}_{\sigma}(\omega)$ 在 $|\omega| \leq \sigma$ 上取值为 1, 其余为 0, 对应的时域信号为 $I_{\sigma}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\sigma}^{\sigma} e^{i\omega t} d\omega = \frac{\sin(\sigma t)}{\pi t}$. 根据式(9), 可得时域分解信号计算式为

$$\begin{cases} a_1(t) = \int_0^T I_{\sigma_1}(t-\tau) a(\tau) d\tau, \\ a_k(t) = \int_0^T I_{\sigma_k}(t-\tau) a(\tau) d\tau - \int_0^T I_{\sigma_{k-1}}(t-\tau) a(\tau) d\tau, \\ a_m(t) = a(t) - \int_0^T I_{\sigma_{m-1}}(t-\tau) a(\tau) d\tau, \end{cases} \quad (10)$$

其中 T 表示整个时间信号的长度。式(10)的关键在于计算卷积

$$x(t) = \int_0^T I_{\sigma}(t-\tau) a(\tau) d\tau, \quad \sigma \in \{\sigma_1, \dots, \sigma_{m-1}\},$$

其离散表达为

$$x(j\Delta t) = \sum_{k=0}^{N_T-1} a(k\Delta t) I_{\sigma}((j-k)\Delta t) \Delta t, \quad j = 0, 1, \dots, N_T - 1. \quad (11)$$

式(11)为循环卷积式, 直接根据该式进行计算效率不高。这里使用一种快速的循环卷积算法, 能极大地提高计算效率。

循环卷积算法 (Brandt, 2019) 基于 Fourier 变换和卷积原理, 通过对每个序列进行快速 Fourier 变换、逐点相乘, 然后执行逆 Fourier 变换, 从而得到两个有限长度序列的循环卷积。该方法能将计算时间复杂度从 $O(N_T^2)$ 降低到 $O(N_T \log N_T)$, 具体计算公式如下

$$\mathbf{x} = \text{IFFT}(\text{FFT}(\tilde{\mathbf{a}}) \cdot \text{FFT}(\tilde{\mathbf{I}}_{\sigma})) \Delta t, \quad (12)$$

其中

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{a}} &= [a(0), \dots, a((N_T-1)\Delta t), 0, \dots, 0], \\ \tilde{\mathbf{I}}_{\sigma} &= [I_{\sigma}(0), \dots, I_{\sigma}((N_T-1)\Delta t), 0, \\ & I_{\sigma}((1-N_T)\Delta t), \dots, I_{\sigma}(-\Delta t)] \end{aligned}$$

均为长度为 $2N_T$ 的向量, FFT 和 IFFT 分别表示快速 Fourier 变换和逆变换算法, \mathbf{x} 的前 N_T 项表示为

$$x(j\Delta t), \quad j = 0, 1, \dots, N_T - 1.$$

结合循环卷积算法和有限带宽信号分解式(10), 可快速得到分解后的有限带宽信号 $a_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, m$. 由于每个信号 $a_k(t)$ 为窄频或只有单个主频率, 可应用第1节的正则化方法准确重构得到相应位移响应 $u_k(t)$, 最后, 根据信号叠加原则, 可得重构的宽频位移响应为

$$u(t) = u_1(t) + u_2(t) + \dots + u_m(t). \quad (13)$$

综上所述, 本文所提宽频位移重构的具体流程如图3所示。

3 数值算例

3.1 加速度信号验证

为了验证所提出方法的可行性, 构造一个具有两个频率分量的位移信号, 两个频率成分分别为 $\sqrt{3}$ 和 $\sqrt{7}$, 即

$$u(t) = \left[e^{-0.1t} \sin(\sqrt{3}t) + 2 \cos(\sqrt{7}t) \right], \quad t \in [0, 50].$$

对上述信号进行二次微分, 即得到加速度信号。对加速度信号按 200 Hz 频率采样, 可得到加速度数据。为了尽可能真实地模拟实测的加速度信号, 对模拟信号施加高斯白噪声

$$\tilde{a}(t) = a(t) + n_t \sigma_a \epsilon, \quad (14)$$

其中 $\tilde{a}(t)$, $a(t)$ 分别表示施加噪声和未施加噪声的

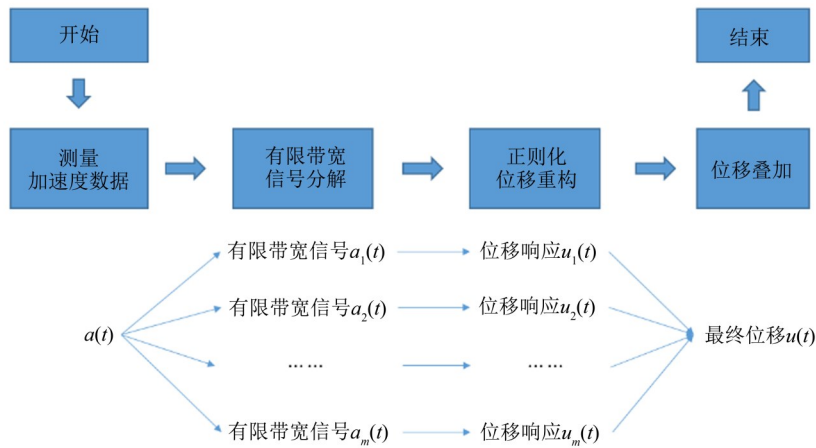


图3 宽频位移重构方法分析流程

Fig. 3 Analysis flow of broadband displacement reconstruction method

加速度信号, n_r 表示噪声水平, ϵ 为满足标准高斯分布的随机数, σ_a 为原始信号的标准差。

将执行两种不同的位移重构方案并将位移重构结果进行对比: 方案一使用基于加速度积分与正则化的位移重构方法(见第1节), 方案二则使用本文提出的基于有限带宽信号分解的位移重构新方法(见第2节)。

首先, 分别考虑无噪声和 $n_r=10\%$ 高斯噪声的情形, 位移重构结果如图4和图5所示。可以看出, 方案一给出的位移重构结果在一定程度上也能接近真实位移, 但方案二的位移重构误差明显更小。尤其在信号两端, 方案一存在较大的扰动, 而方案二仍能给出准确的位移重构结果。其次, 为了量化两种方法的精度, 引入重构位移与准确位移的相对误差 RE 和互相关系数 COR 分别为

$$RE = \frac{\|\mathbf{u}_R - \mathbf{u}_E\|_2}{\|\mathbf{u}_R\|_2}, \quad COR = \frac{\mathbf{u}_R \cdot \mathbf{u}_E}{\|\mathbf{u}_R\|_2 \|\mathbf{u}_E\|_2}, \quad (15)$$

其中 \mathbf{u}_E 表示离散时间点上的重构位移, \mathbf{u}_R 为真实位移。显然, RE 越小, COR 越接近 1, 位移重构精度越高。根据式(15), 可以定量计算方案一和方案二的相对误差和互相关系数, 结果见表1。结果指出, 方案二的相对误差小于方案一相对误差的一半, 且互相关系数也越接近 1。显然, 有限带宽信号分解确实能够显著提高宽频位移重构的精度。

上述结果验证了基于有限带宽信号分解的位移重构方法能准确重构宽频位移, 但该结构频率分布较为稀疏。为了进一步讨论中高阻尼、近频下该方法的有效性, 考虑重构如下位移信号

$$u(t) = \left[e^{-0.1t} (\sin(0.98t) + \sin(t)) + 2 \cos(\sqrt{6}t) \right],$$

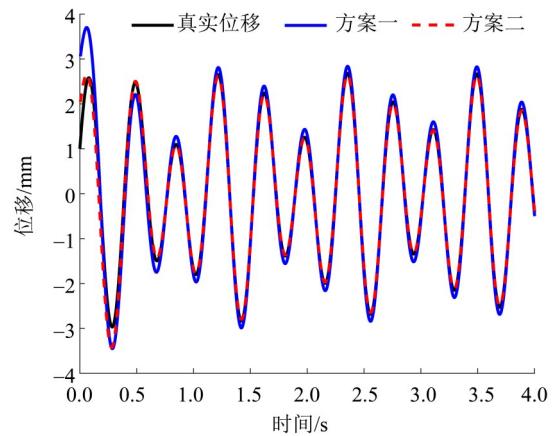


图4 无噪声时两种位移重构方案的结果图

Fig. 4 Estimated displacement by scheme I and scheme II for acceleration signal without noise

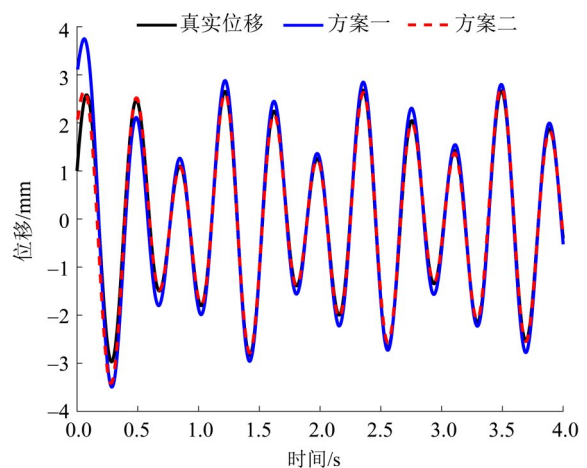


图5 $n_r = 10\%$ 的噪声下两种位移重构方案的结果图

Fig. 5 Estimated displacement by scheme I and scheme II for acceleration signal with $n_r = 10\%$ noise

$$t \in [0, 50].$$

其阻尼比接近 10%, 加速度数据通过位移微

表 1 不同噪声下两种位移重构方案的误差
Table 1 Errors of scheme I and scheme II under different noises

$n_r / \%$	误差指标	方案一	方案二
0	RE	0.098 5	0.037 9
	COR	0.998 8	0.999 3
10	RE	0.111 2	0.049 3
	COR	0.997 6	0.998 9

分和施加 5% 噪声得到。位移重构过程中, 该信号的近频成分 0.98 rad/s 和 1 rad/s 限制在一个频域范围, 频率成分 $\sqrt{6}$ rad/s 限制在另一个频域范围, 通过分割频率 $\sigma_1 = 1.8$ rad/s 将信号分解成两个有限带宽信号。基于有限带宽信号分解的位移重构效果如图 6 所示, 可以看到, 得到的位移与真实位移十分吻合, 且识别误差 RE = 0.143 4, COR = 0.989 8。显然, 本文方法也适用于中高阻尼和近频信号。

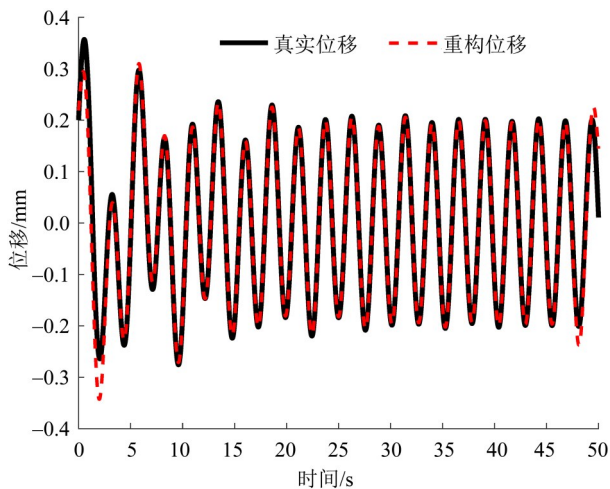


图 6 中高阻尼和近频下的位移重构结果图
Fig. 6 Estimated displacement at medium and high damping and near frequency

3.2 剪切层模型验证

考虑一个 10 层剪切层模型 (Wang et al., 2020), 所有楼层具有相同的质量和刚度参数

$$m_1 = m_2 = \dots = m_{10} = 3\,500 \text{ kg},$$

$$k_1 = k_2 = \dots = k_{10} = 1\,500 \text{ kN/m}.$$

阻尼假设为瑞利阻尼

$$C = \alpha M + \beta K,$$

其中 $\alpha = 0.0463 \text{ s}^{-1}$, $\beta = 1.625 \times 10^{-3} \text{ s}$, M , K 分别为质量和刚度矩阵。在第一层施加随机荷载 $p(t)$, 其功率谱 $S_p(\omega)$ 为

$$S_p(\omega) = \frac{\omega^2}{|\omega|(1\,000 + 4\omega^2)^{4/3}} \times 10^6,$$

并按照如下形式生成

$$p(t) = \sum_{j=1}^{N_s} \sqrt{4S_p(j\Delta\omega)\Delta\omega} \cos(j\Delta\omega t + \epsilon_j),$$

其中 ϵ_j 表示 $[0, 2\pi]$ 均匀分布的随机数。结构初始处于静止状态, 根据 Newmark 法, 可以计算其位移和加速度响应, 其中, 第 1 层的加速度频谱见图 7。将第 1 层的加速度仿真数据 (采样频率为 200 Hz, 采样时长为 50 s) 用作位移重构, 而第 1 层的位移仿真数据作为真实位移, 用于验证位移重构精度。同样, 也考虑 3.1 节中的两种位移重构方案, 其结果见图 8。

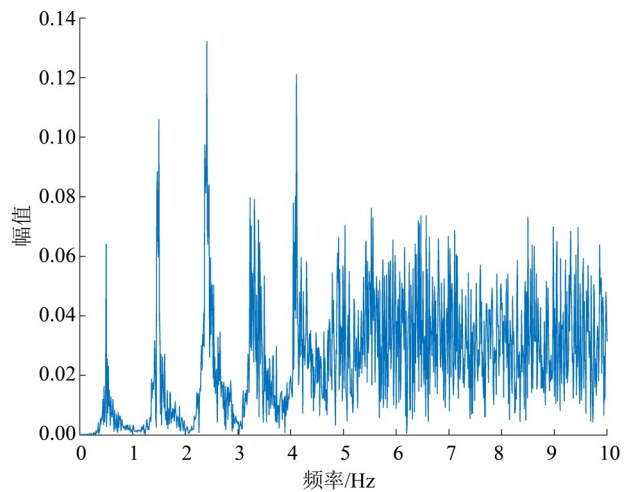


图 7 剪切模型第 1 层加速度信号频谱图
Fig. 7 Spectrum diagram of the acceleration for the first layer of shear model

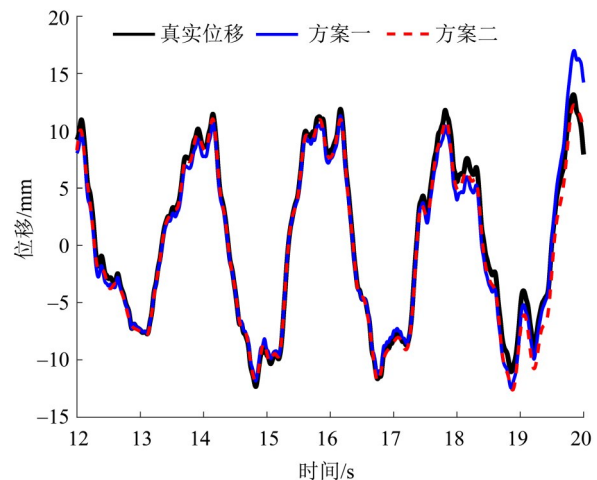


图 8 不同方案的第 1 层位移重构结果
Fig. 8 Estimated displacement by scheme I and scheme II for the first layer of shear model

可以看出, 方案二比方案一的重构位移更接近真实位移。此外, 还计算了两种方案的位移重构的 RE 和 COR, 结果见表 2。尽管两种方案的位移重构精度均较高, 方案二的相对误差不到方案一的 1/10。因此, 有限带宽信号分解确实能提高如图 5 具有多个主频峰值(或宽频)信号的位移重构精度。

表 2 剪切层模型两种位移重构方案的误差

Table 2 Errors of scheme I and scheme II for shear model

误差	方案一	方案二
RE	0.059 5	0.004 4
COR	0.999 5	0.999 8

4 实验测试

为了进一步验证所提方法的实用性, 设计了一个 4 层框架实验。该 4 层框架由钢制成, 柱与楼板之间通过焊接连接。4 个加速度传感器分别装在 4 层框架的每 1 层以测量加速度数据, 一个位移传感器用以获得第 4 层框架的位移数据。实验布置如图 9 所示。

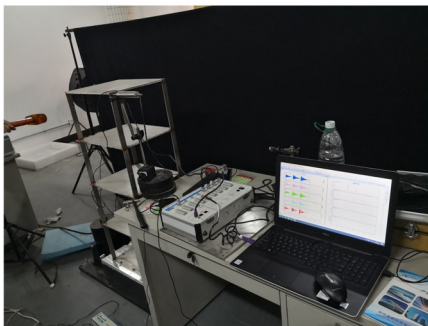


图 9 4 层框架实验装置图

Fig. 9 Diagram of experimental setup of four-layer frame

实验过程中采用晶明动态信号测试系统对 4 层框架结构的振动信息进行采集, 通过使用橡胶锤锤击第 4 层框架来产生一次性的冲击激励, 采集系统自动记录过程中的加速度与位移信息, 采样频率为 200 Hz, 采样时长约为 127 s。

考虑使用第 4 层的加速度数据重构位移, 并与位移计的测量数据对比。第 4 层的加速度频域特征如图 10 所示, 具有多个主频峰值, 属于宽频信号。采用本文提出的有限带宽位移重构方法(即 3.1 节的

方案二), 可得到如图 11 的位移重构结果。显然, 重构位移与位移计的测量结果十分吻合, 表明本文所提方法确实能用于实际结构的宽频位移重构。

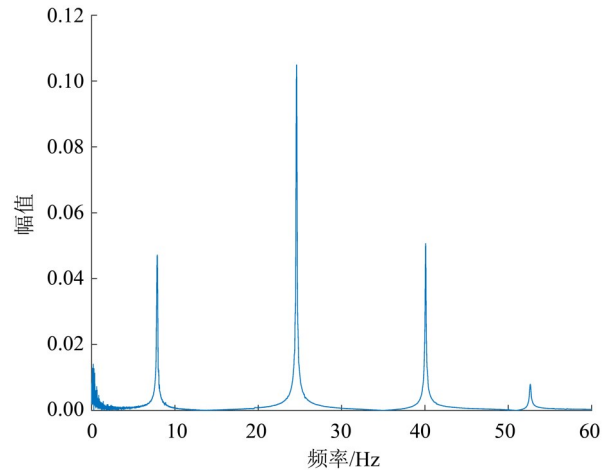


图 10 框架结构第 4 层加速度信号频谱图

Fig. 10 Spectrum diagram of the acceleration signal in the fourth layer of the frame

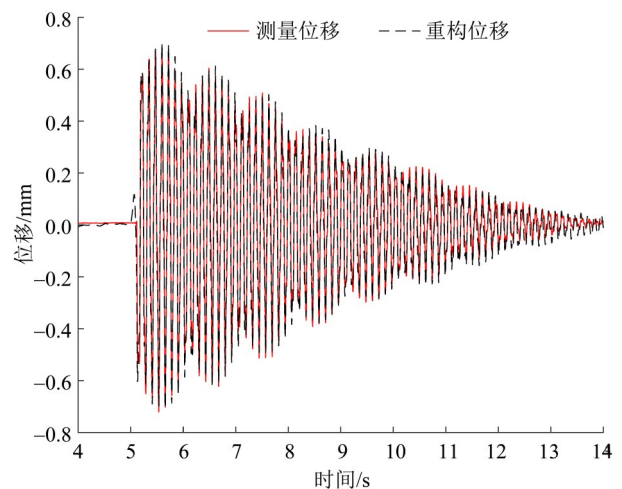


图 11 框架结构第 4 层位移重构结果

Fig. 11 Displacement reconstruction results of the fourth layer of the frame

5 结论

基于加速度积分和正则化的位移重构方法很好地克服“低频漂移”现象, 但难以处理宽频信号。本文通过进一步引入有限带宽信号分解, 提出了一种新的时域宽频位移重构方法。数值和实验算例研究表明, 该方法确实能够从宽频加速度信号中准确重构结构的位移信息。

参考文献:

- 陈培永,王彤,2011.动态加速度信号的时频域积分方法[J].江苏航空,(S1):73-76.
- 郝春冬,昌飞,石兴,2021.基于滤波器技术的加速度传感器测量位移的分析与设计[J].电子技术,50(2):16-18.
- 李智勇,2009.基于频域积分的振动信号处理方法[J].汽车科技,(5):28-30.
- 谭颖轩,陈衍茂,汪利,等,2022.基于模态修正策略和稀疏正则化的损伤识别[J].中山大学学报(自然科学版)(中英文),61(3):116-122.
- 杨达豪,吕中荣,汪利,2021.基于快速稀疏正则化的旋转梁损伤识别[J].中山大学学报(自然科学版),60(6):142-149.
- BARDELLA L, CARINI A, GENNA F, 2003. Time integration errors and some new functionals for the dynamics of a free mass - ScienceDirect[J]. Comput Struct, 81(24/25): 2361-2372.
- BOORE D M, BOMMER J J, 2005. Processing of strong-motion accelerograms: Needs, options and consequences [J]. Soil Dyn Earthq Eng, 25(2): 93-115.
- BRANDT A, 2019. A signal processing framework for operational modal analysis in time and frequency domain [J]. Mech Syst Signal Process, 115: 380-393.
- HSIEH S Y, LEE C T, 2011. Empirical estimation of the Newmark displacement from the Arias intensity and critical acceleration[J]. Eng Geol, 122(1/2): 34-42.
- LEE H S, HONG Y H, PARK H W, 2010. Design of an FIR filter for the displacement reconstruction using measured acceleration in low-frequency dominant structures[J]. Int J Numer Meth Engng, 82(4): 403-434.
- MA L, ZHOU H, 2011. Study acceleration spectrum replication on an electrohydraulic servo test rig with displacement control[J]. Procedia Eng, 16: 204-210.
- MA Z, CHOI J, YANG L, et al, 2023. Structural displacement estimation using accelerometer and FMCW millimeter wave radar [J]. Mech Syst Signal Process, 182: 109582.
- NASSIF H H, GINDY M, DAVIS J, 2005. Comparison of laser Doppler vibrometer with contact sensors for monitoring bridge deflection and vibration[J]. NDT E Int, 38(3): 213-218.
- PARK H S, PARK K, KIM Y, et al, 2015. Deformation monitoring of a building structure using a motion capture system[J]. IEEE/ASME Trans Mechatron, 20(5): 2276-2284.
- PARK J W, SIM S H, JUNG H J, et al, 2013. Development of a wireless displacement measurement system using acceleration responses [J]. Sensors (Basel), 13(7): 8377-8392.
- PARK S K, PARK H W, SHIN S, et al, 2008. Detection of abrupt structural damage induced by an earthquake using a moving time window technique[J]. Comput Struct, 86(11/12): 1253 - 1265.
- SOHN H, DUTTA D, YANG J Y, et al, 2011. Automated detection of delamination and disbond from wavefield images obtained using a scanning laser vibrometer [J]. Smart Mater Struct, 20(4): 045017.
- TOMITA F, KIDO M, OSADA Y, et al, 2015. First measurement of the displacement rate of the Pacific Plate near the Japan Trench after the 2011 Tohoku-Oki earthquake using GPS/acoustic technique[J]. Geophys Res Lett, 42(20): 8391-8397.
- WANG L, LIU J, LU Z R, 2020. Bandlimited force identification based on sinc-dictionaries and Tikhonov regularization[J]. J Sound Vib, 464: 114988.
- XU Y, BROWNJOHN J M W, HESTER D, et al, 2017. Long-span bridges: Enhanced data fusion of GPS displacement and deck accelerations [J]. Eng Struct, 147: 639-651.

(责任编辑 张冰)