

具有间断解的 PTT 型黏弹性流体热对流数值模拟*

张栏¹, 蒋子超¹, 陈玉惠¹, 张仪², 杨耿超¹, 姚清河¹

1. 中山大学航空航天学院, 广东 深圳 518107

2. *Robotics and Mechatronics, University of Twente, Enschede 7522 NB, the Netherlands*

摘要: 从间断解充分发展的黏弹性流体 Rayleigh-Bénard (RB) 热对流具备不同流态的时间信息和发展过程的流态变换, 研究该问题对阐明 Phan-Thien-Tanner (PTT) 型黏弹性流体 RB 热对流的流动机理具有重要意义。本文首次采用二阶迎风型总变差不增差分格式对 PTT 型黏弹性流体的 RB 热对流进行了数值模拟, 并基于与解析解的对比论证了该数值方法在空间离散上的收敛性与二阶精度。数值结果表明, 本文的数值方法可模拟自间断初始场演化的 PTT 型黏弹性流体 RB 热对流, 此外, 本文还对该流动发展到稳态周期解的瞬态流动现象作了基本阐释, 流动现象与从先验速度场发展的流动现象一致。

关键词: 间断解; 总变差不增格式; 黏弹性流体; Phan-Thien-Tanner 模型; Rayleigh-Bénard 对流

中图分类号: O373 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137 (2023) 05-0136-09

Numerical simulation of thermal convection of PTT viscoelastic fluid with discontinuous solution

ZHANG Lan¹, JIANG Zichao¹, CHEN Yuhui¹, ZHANG Yi², YANG Gengchao¹, YAO Qinghe¹

1. *School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Shenzhen 518107, China*

2. *Robotics and Mechatronics, University of Twente, Enschede 7522 NB, the Netherlands*

Abstract: The study of the time information and transitional behavior of flow states in the development of intermittent solutions in Rayleigh-Bénard (RB) convection of viscoelastic fluids has great significance in understanding the flow mechanics of Phan-Thien-Tanner (PTT) viscoelastic fluid RB convection. In this paper, we first use a second-order upwind-type total variation diminishing (TVD) scheme to numerically simulate PTT viscoelastic fluid RB convection, and demonstrate the convergence and second-order accuracy of the numerical method in spatial discretization based on the comparison between the numerical and analytical solutions. The numerical results indicate that the numerical method employed in this paper can simulate the evolution of PTT viscoelastic fluid RB thermal convection with discontinuity initial field, and provide a fundamental explanation for the transient flow phenomena of this flow up to the development of steady periodic solutions, which are consistent with the flow phenomena developed from the a priori velocity field.

Key words: discontinuous solution; total variation diminishing scheme; viscoelastic fluid; Phan-Thien-Tanner model; Rayleigh-Bénard convection

* 收稿日期: 2023-02-22

录用日期: 2023-03-28

网络首发日期: 2023-06-19

基金项目: 国家重点研发计划(2018YFE9103900); 国家自然科学基金(11972384); 广东省基础与应用基础研究基金(2021B1515310001, 2022B1515120009)

作者简介: 张栏(1998年生), 男; 研究方向: 计算流体力学; E-mail: zhanglan26@mail2.sysu.edu.cn

通信作者: 姚清河(1980年生), 男; 研究方向: 计算流体力学、大规模并行算法; E-mail: yaoqhe@mail.sysu.edu.cn

热对流是由温度差驱动的流体运动, 是自然界中普遍而重要的现象, 广泛存在于海洋、大气、地核以及恒星和行星的内部。Rayleigh-Bénard (RB)热对流是最常见、最典型的热对流模型之一。近年来, 国内外学者针对牛顿流体的RB热对流进行了广泛研究(Bodenschatz et al., 2000; 石峯等, 2008; 周全等, 2012; 贺啸秋等, 2022), 但对黏弹性流体的RB热对流研究仍较少。事实上, 研究黏弹性流体的RB热对流对于化学工业和地质研究都有重要意义(Hayat et al., 2008; Ogawa, 2008)。相对牛顿流体而言, 黏弹性流体包含了复杂的流变动力学特性, 其实验模拟和解析求解都存在较大困难。近年来, 随着计算机性能和计算流体力学数值方法的发展, 黏弹性流体数值模拟的精度与分辨率都取得了突破性提升, 对其进行直接数值模拟也逐渐成为了该领域重要的研究手段(Abu-Ramadan et al., 2003; Goswami et al., 2021; Kuron et al., 2021; Tseng, 2021)。

黏弹性流体的本构模型选择对于其仿真有着关键影响, 当前被广泛采用的本构模型主要有Oldroyd-B模型(Oldroyd, 1950; 李勇等, 2019)、FENE-P模型(Bird et al., 1995)、Phan-Thien-Tanner(PTT)模型(Chen et al., 2021, 2022)等。其中, PTT模型由Phan-Thien和Tanner根据Lodge-Yamamoto聚合物网络理论推导得到(Thien et al., 1977; Phan-Thien, 1978), 相较于Oldroyd-B模型, PTT本构模型更适合描述聚合物熔体和浓缩溶液的流变特性。通过调整模型材料参数, PTT模型可模拟多种高分子聚合物的流变性质(Quinzani et al., 1994; Azaiez et al., 1996; Schoonen et al., 1998; Shin et al., 2007)。对于挤出胀大等黏弹性流体效应, 基于PTT模型的仿真结果具有较好的预测能力(Edeleva et al., 2021)。

近年来已有基于PTT模型的黏弹性流体的热对流及其他流动仿真, 特别是低Rayleigh数下RB热对流的数值模拟研究。例如Park et al.(2004, 2009, 2018)使用基于逐格反演方法(grid-by-grid inversion method)的有限体积法, Zheng et al.(2022)使用基于高阶迎风中心格式的有限差分法(FDM, finite difference method)均实现了PTT型黏弹性流体RB热对流的数值模拟, 对其流动特性进行了详细探讨。目前研究所采用的数值方法普遍难以处理间断现象, 需要考虑高数值稳定性的新

型离散格式。

方程非线性项引发的间断解问题一直是计算流体力学中的关键问题, 围绕方程非线性项的离散, 已有许多重要研究方法, 总变差不增(TVD, total variation diminishing)格式为其中的关键成果之一。TVD格式最早由Harten(1983)提出并被应用于可压缩流动的FDM求解, 由于其能够准确地捕捉激波的位置、在高分辨率下仍可以维持对间断解的数值稳定性, 从而逐渐成为了主流离散格式。近年来TVD格式被广泛应用于磁流体动力学(Yuan, 2019)、地热储层工程(Oldenburg et al., 2000)和溃坝水力学(刘玉玲等, 2010)等领域内, 在其基础上构造的其他高精度无波动格式也取得了诸多应用成果(Čada et al., 2009; Kemm, 2011; Dubey, 2013)。但是, 将TVD格式应用于黏弹性流体RB热对流数值模拟的研究仍较少。

从间断解充分发展的黏弹性流体RB热对流具备不同流态的时间信息和发展过程的流态变换, 研究该问题对阐明PTT型黏弹性流体RB热对流的流动机理具有重要意义。为解决PTT本构模型在RB对流中可能会引起间断和数值振荡问题, 本研究将基于TVD离散格式和PTT本构模型, 开发一种黏弹性流体RB热对流FDM模拟方法。该方法能够应用间断初始条件进行长时间模拟, 并通过与稳定周期解的对比验证其有效性。

1 数值模型及算法实现

1.1 控制方程

采取布辛涅司克近似模拟该对流问题, 控制方程(Zheng et al., 2022)为

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \rho_0 \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) &= -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] g \mathbf{e}_j, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T &= \frac{k}{\rho_0 C_p} \Delta T, \end{aligned}$$

其中 \mathbf{u} , p , T , $\boldsymbol{\tau}$ 分别为黏弹性流体的速度、压力、温度和偏应力张量。基准温度 $T_0 = (T_1 + T_2)/2$, T_1 为上边界温度, T_2 为下边界温度, ρ_0 为 $T = T_0$ 时黏弹性流体的密度。常数 α 为热膨胀系数, g 为重力加速度, k 为热传导系数, C_p 为比热容, \mathbf{e}_j 为重力加速度方向上的单位向量。

偏应力张量 $\boldsymbol{\tau}$ 为二阶对称张量, 通常可以分解

为牛顿溶剂贡献和聚合物贡献

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_s + \boldsymbol{\tau}_p,$$

其中 $\boldsymbol{\tau}_s = 2\mu_s \mathbf{D}$ 为黏性偏应力张量, μ_s 为溶剂黏度, 应变率张量 $\mathbf{D} = [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] / 2$. $\boldsymbol{\tau}_p$ 为弹性偏应力张量, 对于 PTT 本构模型有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_p}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\tau}_p - \nabla \mathbf{u}^T \cdot \boldsymbol{\tau}_p - \boldsymbol{\tau}_p \cdot \nabla \mathbf{u} \\ &= -\frac{1}{\lambda} \boldsymbol{\tau}_p + 2 \frac{\mu_p}{\lambda} \mathbf{D} \\ &+ a \left[-\frac{\epsilon}{\mu_p} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}_p) \boldsymbol{\tau}_p - \xi (\mathbf{D} \boldsymbol{\tau}_p + \boldsymbol{\tau}_p \mathbf{D}) \right], \end{aligned}$$

其中 λ 为弛豫时间, μ_p 为聚合物黏度, ϵ 为分子应变率, ξ 为分子滑移率。

将控制方程中各量进行无量纲化,

$$\begin{aligned} \frac{x}{H} &\rightarrow x, \quad t \frac{U_c}{H} \rightarrow t, \quad \frac{\mathbf{u}}{U_c} \rightarrow \mathbf{u}, \quad \frac{T - T_0}{T_2 - T_1} \rightarrow T, \\ \frac{p}{\rho_0 U_c^2} &\rightarrow p, \quad \frac{\boldsymbol{\tau}_p}{\rho_0 U_c^2} \rightarrow \boldsymbol{\tau}_p, \end{aligned}$$

其中 H 为特征尺度, ΔT 为最大(边界)温差, $U_c = \sqrt{\alpha g H \Delta T \kappa / \nu}$ 为特征速度, κ 为热扩散系数, ν 为运动学黏度。

无量纲化的控制方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} \\ &= -\nabla p + \beta \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \Delta \mathbf{u} + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}_p + Pr Te_j, \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \boldsymbol{\tau}_p + \frac{\boldsymbol{\tau}_p}{We \sqrt{Ra}} - 2 \frac{1 - \beta}{Ma^2} \mathbf{D} \\ &= A \left[-\epsilon \frac{\sqrt{Ra}}{(1 - \beta) Pr} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}_p) \boldsymbol{\tau}_p - \xi (\mathbf{D} \boldsymbol{\tau}_p + \boldsymbol{\tau}_p \mathbf{D}) \right], \quad (3) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \frac{1}{\sqrt{Ra}} \Delta T, \quad (4)$$

其中 $Ra = \sqrt{(\alpha g \Delta T H^3) / \nu \kappa}$ 为瑞利数, $We = \kappa \lambda / H^2$ 为魏森贝格数, $Pr = (\mu_0 C_p) / k$ 为普朗特数, 均为黏弹性流体 RB 热对流问题中重要无量纲参数。 $\beta = \mu_s / \mu_0$ 为比黏度, 即溶剂黏度与总黏度的比值, 总黏度 $\mu_0 = \mu_s + \mu_p$, $Ma = \sqrt{Ra We / Pr}$ 为马赫数, 表示横波速度与流体特征速度的比值。

本文采用有限差分法对上述方程进行数值模拟, 其中温度场由显格式求解, 压力场基于 SIMPLE 算法求解。

1.2 适用于间断解的离散方法

首先将方程(2)~(3)分离源项拟线性化并转化

成守恒形式得到

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial L_i}{\partial x_i} = S_{ql}, \quad (5)$$

其中 $\mathbf{W} = [u, v, \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}]^T$, u 和 v 分别为 x 和 y 方向上的速度分量, $\tau_{ij} (i, j = 1, 2)$ 为弹性偏应力的应力分量, 流量矢量定义为

$$L_1 = \begin{bmatrix} u^2 - \tau_{11} \\ uv - \tau_{12} \\ \frac{2\beta - 2}{Ma^2} u + \tau_{11} u \\ \frac{\beta - 1}{Ma^2} v + \tau_{12} u \\ \tau_{22} u \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} uv - \tau_{12} \\ v^2 - \tau_{22} \\ \tau_{22} v \\ \frac{\beta - 1}{Ma^2} v + \tau_{12} v \\ \frac{2\beta - 2}{Ma^2} v + \tau_{22} v \end{bmatrix}.$$

相应地, 源项

$$S_{ql} = \begin{bmatrix} -\nabla p + \beta \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} \Delta \mathbf{u} + Pr Te_j \\ \frac{-\boldsymbol{\tau}_p}{We \sqrt{Ra}} - A \left[\frac{\epsilon \sqrt{Ra}}{(1 - \beta) Pr} \text{tr}(\boldsymbol{\tau}_p) \boldsymbol{\tau}_p + \xi (\mathbf{D} \boldsymbol{\tau}_p + \boldsymbol{\tau}_p \mathbf{D}) \right] \end{bmatrix}.$$

应用局部特征方法, 方程(5)可以表示为

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 A_i \frac{\partial \mathbf{W}}{\partial x_i} = S_{ql},$$

其中雅可比矩阵

$$A_1 = \begin{bmatrix} u & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & u & 0 & -1 & 0 \\ -2 \left(\frac{1 - \beta}{Ma^2} + \tau_{11} \right) & 0 & u & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1 - \beta}{Ma^2} - \tau_{11} & 0 & u & 0 \\ 0 & -2\tau_{12} & 0 & 0 & u \end{bmatrix},$$

A_2 具有类似的形式。

时间上对时间的偏导数项采取一阶向前差分格式离散, 其他项均显式处理。方程(1)~(4)在时间上的半离散格式为

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1} = 0, \\ \frac{\mathbf{W}^{n+1} - \mathbf{W}^n}{\Delta t} + \left(\sum_{i=1}^2 \frac{\partial L_i}{\partial x_i} \right)^{n+1} = S_{ql}^{n+1}, \\ \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} + [(\mathbf{u} \cdot \nabla) T]^{n+1} = \frac{1}{\sqrt{Ra}} \Delta T^{n+1}. \end{cases}$$

空间上的离散采用均匀网格, 使用二阶中心差分格式离散黏性项、能量方程的扩散项, 使用二阶迎风 TVD 差分格式(Harten, 1983)离散拟线性项

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{i,j}^{n+1} &= \mathbf{W}_{i,j}^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(L_{1_{i+\frac{1}{2},j}}^{n+1} - L_{1_{i-\frac{1}{2},j}}^{n+1} \right) \\ &\quad - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left(L_{2_{i,j+\frac{1}{2}}}^{n+1} - L_{2_{i,j-\frac{1}{2}}}^{n+1} \right) + S_{ql_{i,j}}^{n+1} \Delta t. \end{aligned}$$

流量 $L_{1_{i+\frac{1}{2},j}}$ 定义为

$$L_{i+\frac{1}{2},j} = \frac{1}{2} \left(F_{i,j} + F_{i+1,j} + R_{i+\frac{1}{2},j} \Phi_{i+\frac{1}{2},j} \right),$$

式中 $R_{i+\frac{1}{2},j}$ 为 A_1 的右特征向量。同理, 流量 $L_{i,j+\frac{1}{2}}$ 具有类似的形式。向量 Φ 在第 l 个特征方向上的分量

$$\Phi_{i+\frac{1}{2},j}^l = g_{i,j}^l + g_{i+1,j}^l - Q \left(\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l + \gamma_{i+\frac{1}{2},j}^l \right) \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l,$$

式中 $\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l$ 为 A_1 的特征值, $\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l$ 为当地特征变量的差分, $g_{i,j}^l$ 为限制器, 用于保证单调性及 TVD 性质, 因此在间断解时不会有导致发散的震荡。

函数 $\gamma_{i+\frac{1}{2},j}^l$ 定义为

$$\gamma_{i+\frac{1}{2},j}^l = \begin{cases} \frac{g_{i+1,j}^l - g_{i,j}^l}{\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l}, & \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \neq 0; \\ 0, & \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l = 0. \end{cases}$$

格式黏性函数 $Q(z)$ 定义为

$$Q(z) = \begin{cases} |z|, & |z| \geq \zeta; \\ \frac{1}{2} \left(\frac{z^2}{\zeta} + \zeta \right), & |z| \leq \zeta, \end{cases}$$

本文取 $\zeta = [0.05, 0.5]$ 。

定义

$$\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l = (R^{-1})_{i+\frac{1}{2},j}^l \Delta W_{i+\frac{1}{2},j}^l.$$

$$\left\{ \begin{aligned} f_u &= \eta\omega \exp\left(-4\omega^2\beta \frac{Pr}{\sqrt{Ra}}t\right) (-\eta \cos \omega x + \cos \omega y) \sin \omega x, \\ f_v &= \eta\omega \exp\left(-4\omega^2\beta \frac{Pr}{\sqrt{Ra}}t\right) (\cos \omega x - \eta \cos \omega y) \sin \omega y - \eta Pr \exp\left(-2\omega^2 \frac{1}{\sqrt{Ra}}t\right) \cos \omega x \cos \omega y, \\ f_{\tau_{11}} &= \frac{1}{2} \eta\omega \exp\left[-\left(2\omega^2\beta \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} + \frac{1}{We\sqrt{Ra}}\right)t\right] \\ &\quad \cdot \left[\eta \cos 2\omega x + 3\eta \cos 2\omega y - 8 \frac{1-\beta}{Ma^2} \exp\left(\frac{1}{We\sqrt{Ra}}t\right) \sin \omega x \sin \omega y \right], \\ f_{\tau_{22}} &= -\frac{1}{2} \eta\omega \exp\left[-\left(2\omega^2\beta \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} + \frac{1}{We\sqrt{Ra}}\right)t\right] \\ &\quad \cdot \left[3\eta \cos 2\omega x + \eta \cos 2\omega y - 8 \frac{1-\beta}{Ma^2} \exp\left(\frac{1}{We\sqrt{Ra}}t\right) \sin \omega x \sin \omega y \right], \\ f_{\tau_{12}} &= 0, \\ f_T &= 0. \end{aligned} \right. \tag{9}$$

可证明, 在宽高比为 1:1 的方腔内, 方程(6)~(8)的解析解

本文采用 minmod 函数作为限制器

$$g_{i,j}^l = \min\text{mod} \left(\sigma_{i+\frac{1}{2},j}^l \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l, \sigma_{i-\frac{1}{2},j}^l \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l \right) = \begin{cases} 0, & \sigma_{i+\frac{1}{2},j}^l \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \sigma_{i-\frac{1}{2},j}^l \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l \leq 0 \\ \sigma_{i+\frac{1}{2},j}^l \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l, & \left| \sigma_{i+\frac{1}{2},j}^l \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \right| < \left| \sigma_{i-\frac{1}{2},j}^l \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l \right|, \\ \sigma_{i-\frac{1}{2},j}^l \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l, & \left| \sigma_{i+\frac{1}{2},j}^l \alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \right| > \left| \sigma_{i-\frac{1}{2},j}^l \alpha_{i-\frac{1}{2},j}^l \right| \end{cases}$$

其中

$$\sigma_{i+\frac{1}{2},j}^l = \frac{1}{2} \left[Q \left(\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \right) - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\alpha_{i+\frac{1}{2},j}^l \right)^2 \right].$$

2 数值验证

为了验证本文的数值方法的离散精度与收敛性, 本文将基于理论解析解对数值结果进行精度校验, 考虑具有额外源项 f_1, f_2 的控制方程

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \sum_{i=1}^2 \frac{\partial L_i}{\partial x_i} = S_{ql} + f_1, \tag{7}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \frac{1}{\sqrt{Ra}} \Delta T + f_2, \tag{8}$$

其中额外源项 $f_1 = [f_u, f_v, f_{\tau_{11}}, f_{\tau_{12}}, f_{\tau_{22}}]^T, f_2 = f_T$,

且

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u} = \begin{bmatrix} -\eta \exp\left(-2\omega^2 \beta \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} t\right) \cos \omega x \sin \omega y \\ \eta \exp\left(-2\omega^2 \beta \frac{Pr}{\sqrt{Ra}} t\right) \sin \omega x \cos \omega y \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\tau}_p = \begin{bmatrix} \eta \exp\left(-\frac{1}{We \sqrt{Ra}} t\right) \sin \omega x \sin \omega y & \eta \exp\left(-\frac{1}{We \sqrt{Ra}} t\right) \cos \omega x \cos \omega y \\ \eta \exp\left(-\frac{1}{We \sqrt{Ra}} t\right) \cos \omega x \cos \omega y & \eta \exp\left(-\frac{1}{We \sqrt{Ra}} t\right) \sin \omega x \sin \omega y \end{bmatrix}, \\ T = \eta \exp\left(-\frac{2\omega^2}{\sqrt{Ra}} t\right) \cos \omega x \cos \omega y, \\ p = -\eta \exp\left(-\frac{4\omega^2 \beta Pr}{\sqrt{Ra}} t\right) \cos \omega x \cos \omega y, \end{array} \right.$$

其中 $\omega = k\pi/L$, $\eta=10^{-5}$. 选取参数 $\beta = 0.2$, $We = 0.1$, $Ra = 1480$, $Pr = 0.7$, $\epsilon = 0.1$, $\xi = 0.05$, 取时间步长 $\Delta t = 10^{-5}$, 在不同空间步长 Δx 下, 本文所采用的求解算法所得的数值解与式(9)的解析解间 2 范数误差(L2-error)如图 1 所示。

图 1 中, Δx 选取了 $1/1024 \sim 1/32$ 间对数坐标上的等距点, 其对应的 2 范数误差与 Δx 近似成幂函数关系, 其指数约为 1.71. 由此论证了本文所采用的 TVD 格式在空间上的收敛性与近似 2 阶精度。

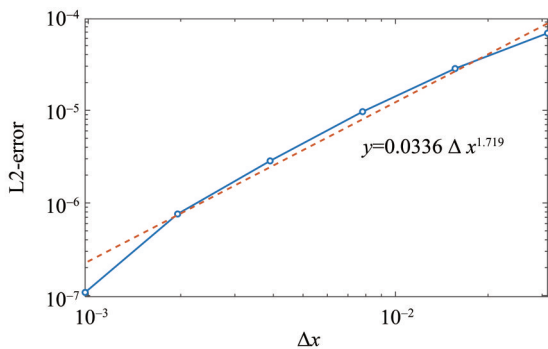


图 1 在第 100 步空间步长(Δx)与 L2-error 的关系
Fig. 1 The relationship between the spatial step size and L2-norm of error at the 100th time step

3 结果分析

本文 RB 热对流几何模型采用宽高比为 2:1 的充满黏弹性流体的方腔(见图 2)。

无量纲化后该 PTT 型黏弹性流体 RB 热对流的计算域为 $(x, y): [0, 2] \times [0, 1]$. 速度边界条件为四壁均为无滑移边界条件; 应力边界条件为诺伊曼边界条件; 温度边界条件为上下壁面为等温边界条件, 左右壁面为绝热边界条件, 即

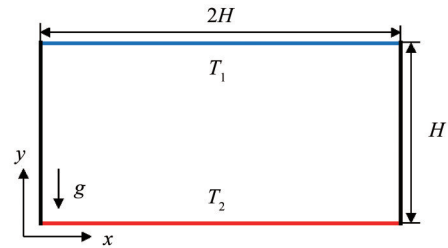


图 2 RB 热对流几何模型与温度边界设置
Fig. 2 Geometric model of RB convection

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 0: u = v = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad T = T_1 = \frac{1}{2}; \\ y = 1: u = v = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad T = T_2 = -\frac{1}{2}; \\ x = 0, 2: u = v = 0, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\tau}}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0. \end{array} \right.$$

速度、应力初始条件均为 0, 初始温度场为间断场: 上边界和下边界分别为 0.5 和 -0.5, 除边界外均为 T_0 .

各个常数取值分别为 $\beta = 0.2$, $We = 0.1$, $Ra = 1480$, $Pr = 0.7$, $\epsilon = 0.1$, $\xi = 0.05$. 构建空间步长为 $1/64$ 的均匀网格, 取 $\Delta t = 10^{-3}$, 对该模型进行时长 550 的数值模拟, 其动能(E_k)发展如图 3 所示。

由图 3 可见, PTT 黏弹性流体的 RB 热对流在充分发展后呈现出周期性流动的特性, 动能随着时间的波动周期为 10.4, 与 Zheng et al.(2022) 中由稳定周期解作为初始场的计算结果 10.2 接近一致。由动能的量级估计, 流动开始发展的时间为 232.3 且 358.7 后达到稳定周期解。为进一步阐释单周期内流动的性质, 取相邻动能最大值点内的 5 个代表性时间步, 其温度与速度场分布如图 4 所示。

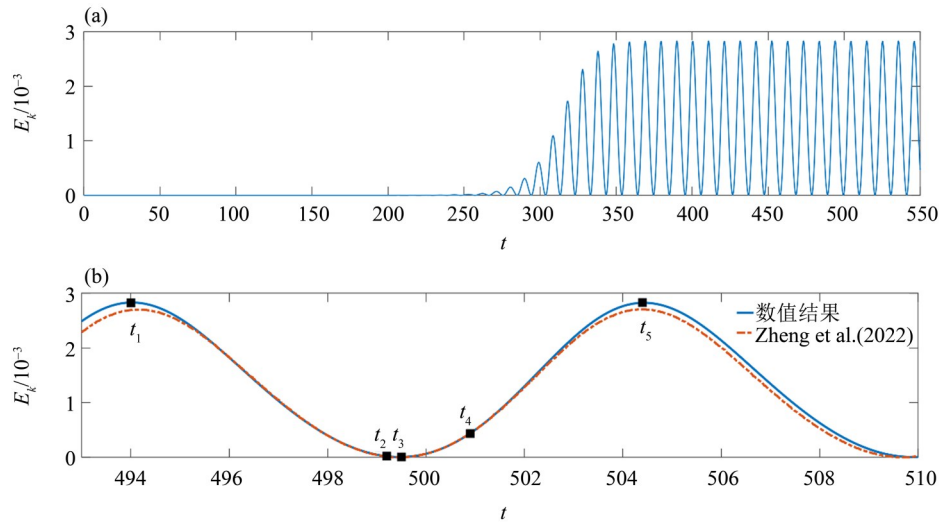


图 3 (a)全局动能随时间的变化情况; (b)动能波动周期对比及单个周期内的 5 个代表性时间步($t_1 \sim t_5$)

Fig. 3 (a) Time evolution of global kinetic energy,

(b) Comparison of kinetic energy fluctuation periods and five representative time steps ($t_1 \sim t_5$) within a single period

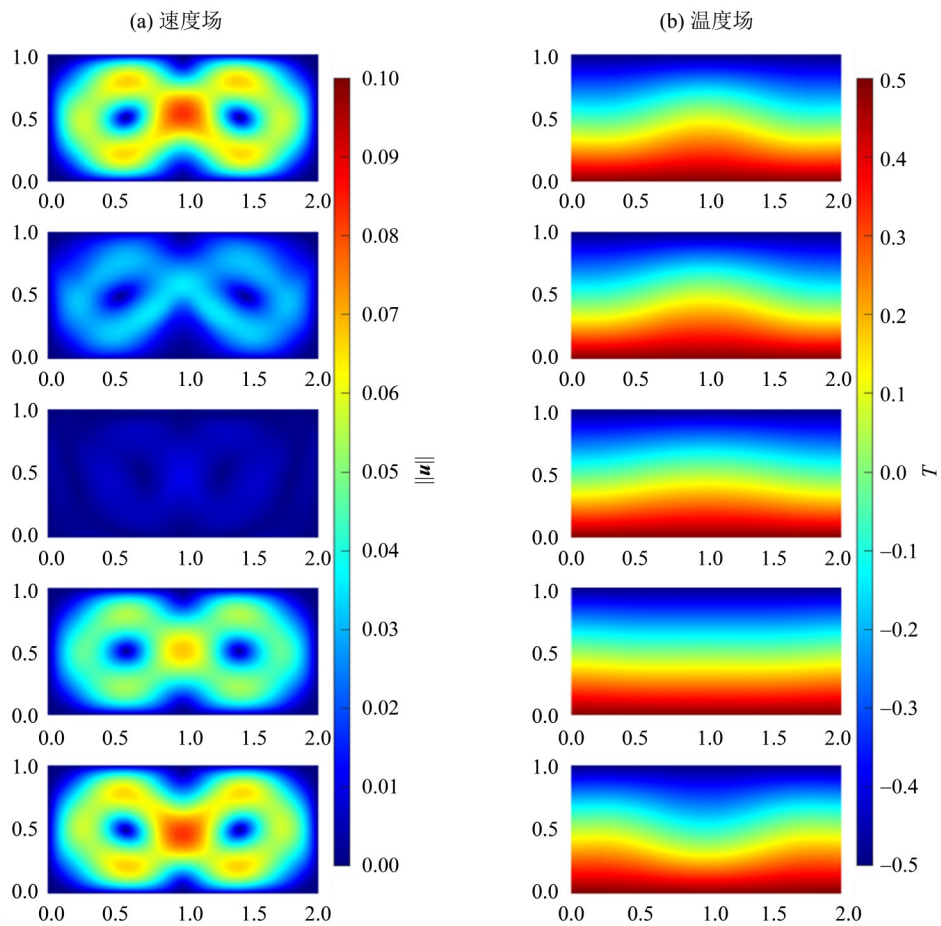


图 4 一个周期内的温度场和速度场分布(由上至下分别对应 t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)

Fig. 4 The distribution of velocity (a) and temperature (b) at the five time points(t_1 to t_5 from top to bottom) in one period

图 4 中, $t_1 = 494$, $t_5 = 504.4$ 时, 全局动能最大; $t_2 = 499.2$ 时, 方腔中心线底壁附近有新涡出现; $t_3 = 499.5$ 时, 全局动能最小; $t_4 = 500.9$ 时, 温度场分布近似纯热传导。由图 4(a) 可见, 在达到全局动能最大值 ($t = t_1$) 后, 流动沿着方腔中心线向上流动; 至 $t = t_2$ 时, 在方腔垂直中心线附近的底壁附近开始出现 2 个小涡, 然后迅速发展至 t_3 时形成的四涡结构; 时间在 t_3 到 t_4 之间涡逐渐合并, 并在 t_4 时再次过渡为两涡结构。从方腔垂直中心线附近底壁出现小涡开始, 流场的流向沿着方腔中心线向上流动, 到 t_3 时四涡结构形成, 整个流场转变到沿着方腔中心线向下流动。由图 4(b) 可见, 在 t_1 到 t_3 之间, 温度场基本没有发生变化, 但速度场却在持续减弱, 最大速度从 t_1 的 0.08 变化到 t_3 的 0.006。在 $t_3 \sim t_4$ 时间内, 温度场发生明显变化。在 t_4 时温度分布几乎可以近似在 y 方向上呈线性分布,

接近于无对流的纯热传导的稳态温度分布。从 t_4 到 t_5 , 全场速度逐渐增大并在 t_5 处达到极值, 温度场也随之偏离 $t = t_3$ 时的分布。

区别于牛顿流体, 黏弹性流体热对流除温差驱动力外还存在着非均匀分布的内应力。在该数值模拟中, 应力场的仿真结果如图 5 所示。

由图 5 可知, 在 $t = t_1$ 后, 速度梯度极值不断增大, 同时弹性偏应力分量随之增大。在 t_2 时, τ_{11} 和 τ_{22} 的最大值出现在 $(x, y) = (1, 0.9)$ 和 $(x, y) = (1, 0.3)$ 附近, 而从 t_1 向 t_2 的过程中, τ_{ij} 的散度增大, 使得 u 和 v 由于 $\partial\tau_{11}/\partial x$ 和 $\partial\tau_{22}/\partial y$ 而增大。从 t_2 到 t_3 阶段 τ_{ij} 达到极大值后向减小开始变化, 但减小的幅度很轻微; 在 t_3 到 t_4 阶段 τ_{ij} 减小幅度很大, 并于 t_4 时 τ_{ij} 达到极小值。此阶段速度场的增大加剧了 τ_{ij} 的衰减。从 t_3 到 t_4 阶段, τ_{11} 和 τ_{22} 的正负沿垂直中心线变化。在 t_3 时, τ_{11} 在 $(x, y) = (1, 0.9)$ 处为

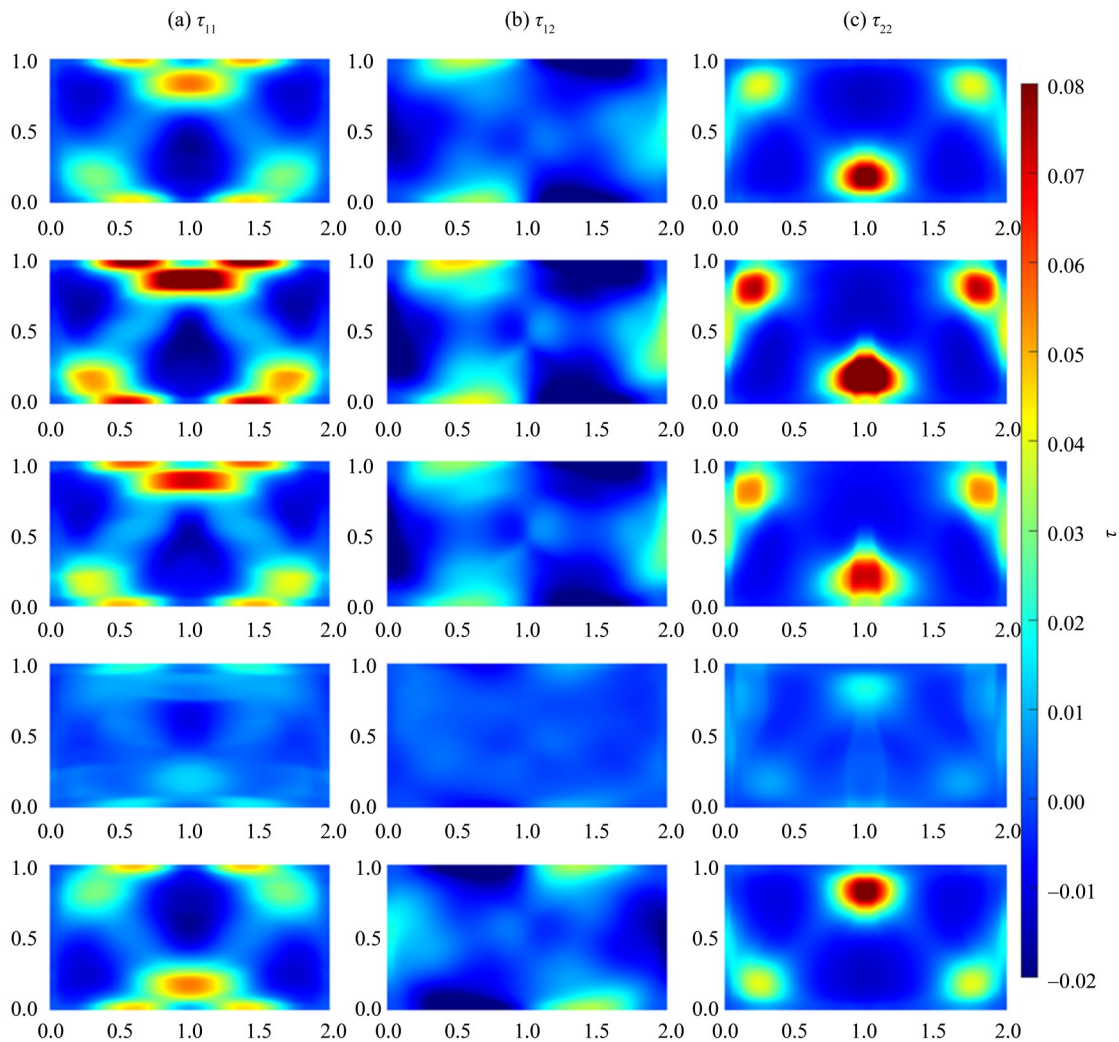


图 5 一个周期内的弹性偏应力场分布(由上至下分别对应 t_1, t_2, t_3, t_4, t_5)

Fig. 5 The distribution of extra-stress τ_{11}, τ_{12} and τ_{22} at the five time points (t_1 to t_5 from top to bottom) in one period

正,在 $(x, y) = (1, 0.3)$ 处为负,而在 t_5 时, τ_{11} 在相同位置改变正负,在 $(x, y) = (1, 0.9)$ 处为负,在 $(x, y) = (1, 0.3)$ 处为正。

在下一个全局动能周期,也是速度场的下半周期,速度梯度由零开始逐渐向极值增大,速度梯度的增大使 τ_{ij} 增大,全局动能最小时在垂直中心线附近的顶壁附近出现小涡,迅速扩大并侵入腔体快速转化成四涡结构,流动方向发生逆转,温度场的对流分布转变为近似在 y 方向上呈线性分布; τ_{ij} 继续衰减, τ_{11} 和 τ_{22} 沿方腔垂直中心线变化,速度再次放大达到极值,温度场再次变为对流分布。

上述流动现象表明,速度场的减弱-放大循环与弹性偏应力场的衰减-增大循环之间存在相位差,相位差的存在导致了PTT型黏弹性流体RB热对流随时间变化的流动状态,并且在速度场的完

整周期里出现反面对流现象。

4 结 论

本文采用了基于TVD差分格式的FDM模拟了基于PTT型黏弹性流体的RB热对流问题,对非线性黏弹性流体在封闭方腔内部的对流过程进行了研究,得到如下结论:

1) 本文的数值结果与解析解与文献相符,且具有二阶空间精度。

2) 数值模拟结果表明,基于TVD格式的求解方法能够有效地模拟黏弹性流体RB热对流问题,并得到流动从间断初始条件开始发展到稳定周期解的完整过程的瞬态信息。

3) PTT型黏弹性流体RB热对流的基本流动现象显示,在充分发展后会呈现出随时间变化的振荡对流特征,并具有特定流动模式以及流动反转的流动特性。

参考文献:

- 贺啸秋,熊永亮,彭泽瑞等,2022.旋转肥皂泡热对流能量耗散与边界层特性的数值模拟[J].物理学报,71(20):168-186.
- 李勇,卓琦又,何录武,2019.粘弹流体轴对称流动的格子Boltzmann方法[J].力学季刊,40(1):106-114.
- 刘玉玲,王玲玲,周孝德等,2010.二维溃坝洪水波传播的高精度数值模拟[J].自然灾害学报,19(5):164-169.
- 石峯,宁利中,王芳等,2008.矩形腔体中Rayleigh-Bénard对流结构的分析[J].西安理工大学学报,24(4):484-489.
- 周全,夏克青,2012. Rayleigh-Bénard湍流热对流研究的进展、现状及展望[J].力学进展,(3):231-251.
- ABU-RAMADAN E, HAY J M, KHAYAT R E, 2003. Characterization of chaotic thermal convection of viscoelastic fluids[J]. J Non Newton Fluid Mech, 115(2/3): 79-113.
- AZAIEZ J, GUÉNETTE R, AIT-KADI A, 1996. Entry flow calculations using multi-mode models[J]. J Non Newton Fluid Mech, 66(2/3): 271-281.
- BIRD R B, WIEST J M, 1995. Constitutive equations for polymeric liquids[J]. Annu Rev Fluid Mech, 27: 169-193.
- BODENSCHATZ E, PESCH W, AHLERS G, 2000. Recent developments in Rayleigh-Bénard convection[J]. Annu Rev Fluid Mech, 32: 709-778.
- ČADA M, TORRILHON M, 2009. Compact third-order limiter functions for finite volume methods[J]. J Comput Phys, 228(11): 4118-4145.
- CHEN Y, LI M, YAO Q, et al, 2021. Global well-posedness for the three-dimensional generalized Phan-Thien-Tanner model in critical Besov spaces[J]. J Math Fluid Mech, 23(3): 55.
- CHEN Y, LI M, YAO Q, et al, 2022. The sharp time decay rates and stability of large solutions to the two-dimensional Phan-Thien-Tanner system with magnetic field[J]. Asymptot Anal, 129(3/4): 451-484.
- DUBEY R K, 2013. Flux limited schemes: Their classification and accuracy based on total variation stability regions[J]. Appl Math Comput, 224: 325-336.
- EDELEVA M, TANG D, van WAELEGHEM T, et al, 2021. Testing the PTT rheological model for extrusion of virgin and composite materials in view of enhanced conductivity and mechanical recycling potential[J]. Processes, 9(11): 1969.
- GOSWAMI S, HEMMATI A, 2021. Response of viscoelastic turbulent pipeflow past square bar roughness: The effect on mean flow[J]. Computation, 9(8): 85.
- HARTEN A, 1983. High resolution schemes for hyperbolic conservation laws[J]. J Comput Phys, 49(3): 357-393.
- HAYAT T, ABBAS Z, ALI N, 2008. MHD flow and mass transfer of a upper-convected Maxwell fluid past a porous shrinking sheet with chemical reaction species[J]. Phys

- Lett A, 372(26): 4698–4704.
- KEMM F, 2011. A comparative study of TVD–limiters—Well-known limiters and an introduction of new ones[J]. *Int J Numer Methods Fluids*, 67(4): 404–440.
- KURON M, STEWART C, de GRAAF J, et al, 2021. An extensible lattice Boltzmann method for viscoelastic flows: Complex and moving boundaries in Oldroyd–B fluids[J]. *Eur Phys J E Soft Matter*, 44(1): 1.
- OGAWA M, 2008. Mantle convection: A review[J]. *Fluid Dyn Res*, 40(6): 379–398.
- OLDENBURG C M, PRUESS K, 2000. Simulation of propagating fronts in geothermal reservoirs with the implicit Leonard total variation diminishing scheme[J]. *Geothermics*, 29(1): 1–25.
- OLDROYD G J, 1950. On the formulation of rheological equations of state[J]. *Proc R Soc Lond A*, 200(1063): 523–541.
- PARK H M, 2018. Peculiarity in the Rayleigh–Bénard convection of viscoelastic fluids[J]. *Int J Therm Sci*, 132: 34–41.
- PARK H M, PARK K S, 2004. Rayleigh–Bénard convection of viscoelastic fluids in arbitrary finite domains[J]. *Int J Heat Mass Transf*, 47(10/11): 2251–2259.
- PARK H M, SHIN K S, SOHN H S, 2009. Numerical simulation of thermal convection of viscoelastic fluids using the grid–by–grid inversion method[J]. *Int J Heat Mass Transf*, 52(21/22): 4851–4861.
- PHAN–THIEN N, 1978. A nonlinear network viscoelastic model[J]. *J Rheol*, 22(3): 259–283.
- QUINZANI L M, ARMSTRONG R C, BROWN R A, 1994. Birefringence and laser–Doppler velocimetry (LDV) studies of viscoelastic flow through a planar contraction[J]. *J Non Newton Fluid Mech*, 52(1): 1–36.
- SCHOONEN J F M, SWARTJES F H M, PETERS G W M, et al, 1998. A 3D numerical/experimental study on a stagnation flow of a polyisobutylene solution[J]. *J Non Newton Fluid Mech*, 79(2/3): 529–561.
- SHIN D M, LEE J S, KIM J M, et al, 2007. Transient and steady–state solutions of 2D viscoelastic nonisothermal simulation model of film casting process via finite element method[J]. *J Rheol*, 51(3): 393–407.
- THIEN N P, TANNER R I, 1977. A new constitutive equation derived from network theory[J]. *J Non Newton Fluid Mech*, 2(4): 353–365.
- TSENG H C, 2021. A revisit of white–metzner viscoelastic fluids[J]. *Phys Fluids*, 33(5): 057115.
- YUAN M, 2019. A predictor–corrector symmetric TVD scheme for magnetogasdynamic flow[J]. *Comput Phys Commun*, 237: 86–97.
- ZHENG X, HAGANI F, BOUTAOUS M, et al, 2022. Pattern selection in Rayleigh–Bénard convection with nonlinear viscoelastic fluids[J]. *Phys Rev Fluids*, 7(2): 023301.

(责任编辑 秦社彩)