DOI：10. 11714/acta. snus. ZR20260016

一类Emden-Fowler方程的完全可积性*

李昕倩[1]，陈玉艳[1]，姜文安[2]，刘畅[1]

1. 辽宁大学物理学院，辽宁 沈阳 110036
2. 江苏大学土木工程与力学学院，江苏 镇江 212013

摘　要：为准确预测系统在长时间尺度下的动力学演化规律，并为复杂非线性系统的数值算法及其解提供可靠判据，探索非线性系统动力学方程的解析解具有重要意义．本文以一类具有广泛物理背景的Emden-Fowler方程为研究对象，该方程常见于天体结构、等离子物理和热传导等实际问题中．针对该方程在特定参数下的一类情形，基于Lie对称性分析方法，通过深入分析其数学结构与动力学特性，获得了系统的3个两两相互独立的首次积分．根据Liouville完全可积性理论，该系统的通解可通过求积法获得；同时，在微分方程意义下，该系统亦具有完全可积性，存在3个两两相互独立的首次积分，因此可通过其中任意两个构造出系统的通解．研究结果不仅能够精确刻画该类方程的长时间动力学行为，还为其它Emden-Fowler型非线性系统提供了数值算法可靠性的判断依据，为工程实际中的系统分析和仿真验证提供了理论支持．

关键词：非线性微分方程；对称性；首次积分；完全可积性；解析解

中图分类号：O175.1　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**2097－0137（XXXX）XX－0001－08

The complete integrability of a class of Emden-Fowler equation

Li Xinqian[1], *Chen Yuyan*[1], *Jiang Wenan*[2], *Liu Chang*[1]

1. College of physics, Liaoning University, Shenyang 110036, China
2. Faculty of Civil Engineering and Mechanics, Jiangsu University, Zhenjiang 212013, China

Abstract: Investigating analytical solutions for dynamical equations is of considerable importance, as it enables accurate prediction of long-term evolutionary behaviors of systems and provides reliable criteria for evaluating numerical algorithms and their solutions in complex nonlinear contexts. This paper focuses on the Emden-Fowler equation, which possesses broad physical relevance and frequently arises in practical applications including stellar structure, plasma physics, and thermal conduction phenomena. For a specific parameter set of this equation, we employ Lie symmetry analysis methods and conduct an in-depth investigation of its mathematical structure and dynamical characteristics. Through this approach, three pairwise independent first integrals of the system are successfully derived. According to the complete integrability theory, the system demonstrates complete integrability in the Liouville sense, guaranteeing that its general solution can be obtained through the method of quadrature. Within the framework of differential equations, the system also exhibits complete integrability with three pairwise independent first integrals, thus allowing the general solution to be constructed using any two ofthem. The research outcomes not only provide a precise characterization of long-term dynamical behavior for this specific class of Emden-Fowler equations but also establish a

* **收稿日期：**2026－01－13　　**录用日期：**2026－06－25　　**网络首发日期：**XXXX－XX－XX
基金项目：国家自然科学基金（12472001）
作者简介：李昕倩（2002年生），女；**研究方向：**分析力学；E-mail：lixq9483@163.com
通信作者：刘畅（1981年生），男；**研究方向：**分析力学；E-mail：changliu@lnu.edu.cn

全文阅读
ZR20260016

theoretical basis for assessing the reliability of numerical algorithms applied to other Emden-Fowler-type nonlinear systems. Furthermore, this study offers substantial theoretical support for system analysis and simulation verification in various engineering practices.

Key words: nonlinear differential equation; symmetry; first integral; complete integrability; analytic solution

在工程技术和自然科学领域中，从物理学、应用数学、地球科学到机器人与航空航天等研究领域中的科学与工程问题大多是非线性的，并且非线性问题一般都是通过非线性微分方程进行准确描述. 因此，非线性方程的求解问题一直是力学（梅凤翔等，1991，2012；梅凤翔，1999，2004）、数学（丁同仁等，1991；Babelon et al.，2003；蒋耀林等，2021）、物理学（Barut，1978；Lam，1997）的重要研究课题. 解析解能够准确揭示系统随时间的动态演化过程，反映运动特性与参数之间的依赖关系，并验证数值算法的可靠性. 通过解析解可以揭示非线性系统的本质特征，兼具理论与应用价值. 由于非线性方程的复杂性，绝大多数系统难以直接获得解析解，且通常不存在初等函数解. 因此，近些年国内外学者通常研究非线性系统的数值解或近似解析解，比如 Adomian 分解法（Barut，1978；Adomian，1994；Boichuk et al.，2024）将方程的解表示为无穷级数的形式，用特殊的多项式替代方程中的非线性项，利用逆算符方法，由低阶分量进行迭代得出高阶分量，进而求得近似解. 摄动法（Nayfeh，2000）通过小参数的引入，在平衡态附近进行渐近展开，进行近似求解. 变分迭代法（He，1999；Amir et al.，2024）通过构造含有拉格朗日乘子的修正泛函，迭代逼近非线性微分方程的解析解. 同伦分析法（He，2003；Liao，2009）通过构造可调参数的连续同伦变换，将复杂非线性问题逐步转化为可解形式. 能量平衡法（Durmaz et al.，2012；Ismail et al.，2025）利用能量守恒原理建立非线性系统的近似解析关系. Hamilton 方法（He，2010；Yildirim et al.，2011）基于哈密顿量形式从能量和相空间结构出发求得系统的近似解析解. 尽管近似解可以解决一部分系统无法精确求解问题，但近似解难以完全反应系统的本质特性，也无法准确预测系统的长时间动力学演化规律和动力学行为，更无法验证数值算法和数值解的有效性. 因此，寻求非线性系统的精确解析解具有十分重要的研究意义.

目前，国内外学者已发展出多种求解非线性系统解析解的方法，变换理论通过变量代换与函数变换将复杂方程转化为可解形式（Liu et al.，2023；姜文安等，2025；刘畅等，2025）；构造法基于对方程结构的分析技巧性地构造解函数（Jones et al.，1993a，1993b）；Prelle-Singer（PS）算法从微分代数的角度通过积分因子构建解析解（Prelle et al.，1983）；Lie 对称法（Liu et al.，2024；Shan et al.，2025）则通过对称变换寻找解析解，可借助对称性构造首次积分，或利用 Lie 对称化为可解形式. Emden-Fowler 方程起源于 19 世纪末的天体物理学，1870 年，美国物理学家 Lane 在研究恒星内部结构时首次提出该方程（Lane，1870），后由德国学者 R. Emden 在 1907 年出版的《气体球理论》中系统发展，因此得名 Lane-Emden 方程（Emden，1907）. 1930 年，英国数学家进一步将方程推广为 Emden-Fowler 方程（Fowler，1914），该方程是天体物理中建模恒星、星云等天体内部结构的重要基础（Chandrasekhar，1939），并被广泛应用于热传导、反应扩散系统、等离子体物理及自相似爆炸过程等领域（Deng，2015；Christianen et al.，2023；Kumar et al.，2024）. 本文针对一类 Emden-Fowler 方程，根据 Lie 对称性方法和完全可积性理论，研究了系统的对称性和完全可积性，构造出了系统的三个两两相互独立的首次积分，并基于完全可积性推导出系统的通解形式. 该结果不仅可以准确反映该类非线性系统在长时间尺度下的动力学演化行为，而且为其他 Emden-Fowler 型非线性系统的数值算法可靠性提供了判断依据.

1 一类 Emden-Fowler 方程

Emden-Fowler 方程的一般形式为

$$\ddot{u}(t)+\frac{k}{t}\dot{u}(t)+\alpha t^{m}u^{n}(t)=0. \tag{1}$$

取 $k=0,\alpha=-1,m=0,n=-3$ 得

$$\ddot{u} = \frac{1}{u^3}. \tag{2}$$

在 Hamilton 框架下，令 $q = u, p = \frac{\partial L}{\partial \dot{u}} = \dot{u}$，则 Hamilton 方程为

$$\dot{q} = p, \quad \dot{p} = \frac{1}{q^3}. \tag{3}$$

相应的 Hamilton 函数为

$$H(t,q,p) = \frac{1}{2}\left(p^2 + \frac{1}{q^2}\right). \tag{4}$$

引入时间，广义坐标和广义动量的无限小群变换

$$t^* = t + \varepsilon\xi_0(t,q,p), \quad q^* = q + \varepsilon\xi_s(t,q,p), \quad p^* = p + \varepsilon\eta_s(t,q,p), \tag{5}$$

其中 ε 为无限小参数；ξ_o、ξ_s、η_s 为无限小变换的生成元. 引入无限小生成元向量

$$X = \xi_0\frac{\partial}{\partial t} + \xi_s\frac{\partial}{\partial q} + \eta_s\frac{\partial}{\partial p}. \tag{6}$$

设 $\dot{q} = g, \dot{p} = h$，李对称性是微分方程在由李群生成的无穷小连续变换作用下保持形式不变的性质. 即变换后系统满足 $\dot{q}^* = g^*, \dot{p}^* = h^*$，将式(5)~(6)代入该变换关系后得到 Lie 对称性确定方程(梅凤翔，1999)

$$\dot{\xi}_s - \dot{\xi}_0 g = X(g), \quad \dot{\eta}_s - \dot{\xi}_0 h = X(h). \tag{7}$$

对于满足式(7)的生成元 ξ_o、ξ_s、η_s，如果存在规范函数 $G(t,q,p)$ 满足结构方程

$$-H\dot{\xi}_o + \frac{\partial H}{\partial p}\eta_s + p\dot{\xi}_s - X(H) + \dot{G} = 0, \tag{8}$$

则该 Hamilton 系统存在首次积分

$$I = -H\xi_o + p\xi_s + G = \text{const}. \tag{9}$$

将该非线性系统的 Hamilton 方程代入式(7)得

$$\dot{\xi}_s - \dot{\xi}_0 p = \eta_s, \quad \dot{\eta}_s - \dot{\xi}_0\frac{1}{q^3} = -3\frac{\xi_s}{q^4}. \tag{10}$$

解得三组生成元：

$$\xi_o = -1, \quad \xi_s = 0, \quad \eta_s = 0; \tag{11}$$

$$\xi_o = 2t, \quad \xi_s = q, \quad \eta_s = -p; \tag{12}$$

$$\xi_o = t^2, \quad \xi_s = tq, \quad \eta_s = q - tp. \tag{13}$$

代入结构方程(8)可以得到对应的三组规范函数 $G_1 = 0$；$G_2 = 0$；$G_3 = -\frac{1}{2}q^2$. 这三个规范函数分别对应三组生成元(11)~(13). 将这三组规范函数及其对应的生成元代入式(9)可以得到相对应的三个首次积分：

$$I_1 = H = \frac{1}{2}\left(p^2 + \frac{1}{q^2}\right), \tag{14}$$

$$I_2 = pq - t\left(p^2 + \frac{1}{q^2}\right), \tag{15}$$

$$I_3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{q^2} + (q - tp)^2\right). \tag{16}$$

2　首次积分独立的证明

根据 Jacobi 行列式，三个首次积分 I_1, I_2, I_3 相互独立的充要条件为：

$$\frac{\partial(I_i, I_j)}{\partial(q,p)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial I_i}{\partial q} & \frac{\partial I_i}{\partial p} \\ \frac{\partial I_j}{\partial q} & \frac{\partial I_j}{\partial p} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (i,j = 1,2,3). \tag{17}$$

（i）I_1与I_2：$\dfrac{\partial(I_1,I_2)}{\partial(q,p)}=-2I_1\neq 0$，故$I_1,I_2$独立.

（ii）I_2与I_3：$\dfrac{\partial(I_2,I_3)}{\partial(q,p)}=-2I_3\neq 0$，故$I_2,I_3$独立.

（iii）I_1与I_3：$\dfrac{\partial(I_1,I_3)}{\partial(q,p)}=I_2$.

当$t\neq\dfrac{pq}{p^2+q^{-2}}$时，$I_2\neq 0$，故$I_1,I_3$独立；

当$t=\dfrac{pq}{p^2+q^{-2}}$时，$I_2=0$，I_1,I_3不独立，此时系统处于高度不稳定的退化流形.

（iv）I_1,I_2,I_3：$\dfrac{\partial(I_1,I_2,I_3)}{\partial(t,q,p)}=0$，$I_1,I_2,I_3$三者不独立.

3 完全可积性与通解

3.1 Liouville完全可积性

定理1（Liouville定理）（Babelon et al.，2003） 若Hamilton系统(M^{2n},ω,H)存在n个相互独立的首次积分$F_i(i=1,\cdots,n)$，且满足$\{H,F_j\}=0$，$\{F_i,F_j\}=0$，则称该系统为Liouville完全可积. Liouville完全可积系统的运动方程可通过积分求解.

Emden-Fowler方程$\ddot{u}=\dfrac{1}{u^3}$有首次积分$I_1=H$；满足$\{H,I_1\}=0$和$\{I_1,I_1\}=0$，故为Liouville完全可积. Liouville完全可积系统的运动方程可通过积分求解.

由$I_1=\dfrac{1}{2}\left(p^2+\dfrac{1}{q^2}\right)$分离变量得

$$\mathrm{d}t=\pm\frac{\mathrm{d}q}{\sqrt{2I_1-1/q^2}},\tag{18}$$

积分得通解

$$\begin{cases}q=\sqrt{\dfrac{4I_1{}^2(t+C)^2+1}{2I_1}},\\[2ex] p=\dfrac{2I_1(t+C)}{\sqrt{2I_1(t+C)^2+\dfrac{1}{2I_1}}},\end{cases}\quad\text{或}\quad\begin{cases}q=-\sqrt{\dfrac{4I_1{}^2(t+C)^2+1}{2I_1}},\\[2ex] p=-\dfrac{2I_1(t+C)}{\sqrt{2I_1(t+C)^2+\dfrac{1}{2I_1}}}.\end{cases}\tag{19}$$

图1(a)、(b)分别展示了5种初值下位置q随时间t的演化与相图，反映了系统的长时间动力学行为.

3.2 微分方程的完全可积性

定理2（丁同仁等，1991） 若n维一阶常微分方程$\dot{\boldsymbol{x}}=f(t,\boldsymbol{x})$，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$，$f(t,\boldsymbol{x})=(f_1(t,\boldsymbol{x}),f_2(t,\boldsymbol{x}),\cdots,f_n(t,\boldsymbol{x}))^{\mathrm{T}}$在区域$D$内存在$n$个独立的首次积分$\phi_j(t,\boldsymbol{x})=C_j(j=1,2,\cdots,n)$，则称该方程组完全可积，在$D$内的通解可表示为$\boldsymbol{x}=\varphi(t,C_1,C_2,\cdots,C_n)$.

Emden-Fowler方程$\ddot{u}=\dfrac{1}{u^3}$可化为二维一阶方程组：

$$\dot{q}=p,\qquad \dot{p}=\frac{1}{q^3}.\tag{20}$$

根据微分方程的完全可积性，该系统拥有三个相互独立的首次积分. 因此，利用其中任意两个首次积分，即可消去相关变量，从而求得方程的通解.

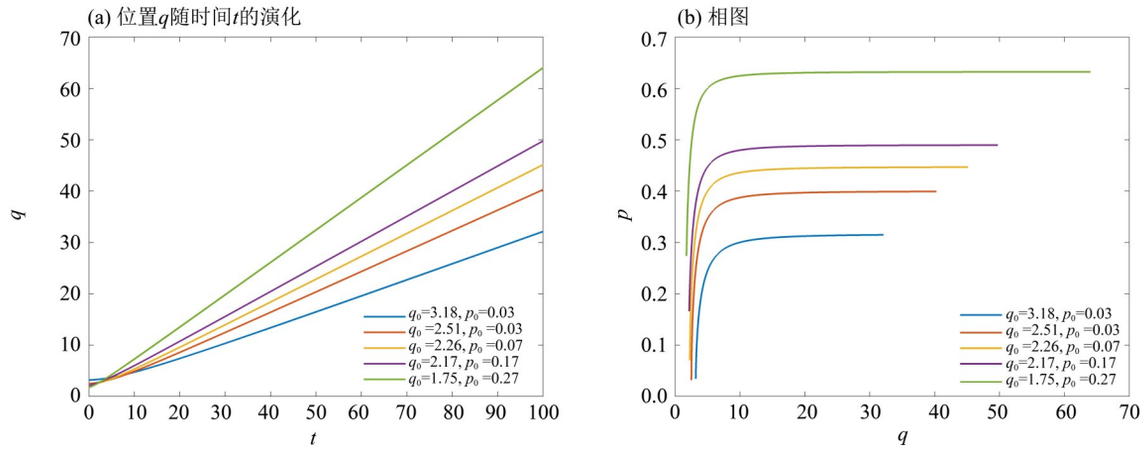


图 1　不同初值下系统的动力学演化

Fig. 1　Dynamical evolution of the system under different initial values

由 $I_1(I_1>0)$ 与 I_2，得通解：

$$\begin{cases} q_1=\sqrt{\dfrac{\left(I_2+2I_1t\right)^2+1}{2I_1}}, \\ p_1=\sqrt{\dfrac{2I_1\left(I_2+2I_1t\right)^2}{\left(I_2+2I_1t\right)^2+1}}, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} q_1=-\sqrt{\dfrac{\left(I_2+2I_1t\right)^2+1}{2I_1}}, \\ p_1=-\sqrt{\dfrac{2I_1\left(I_2+2I_1t\right)^2}{\left(I_2+2I_1t\right)^2+1}}. \end{cases} \tag{21}$$

图 2 展示了 5 种初值下的 $q(t)$ 与相图.

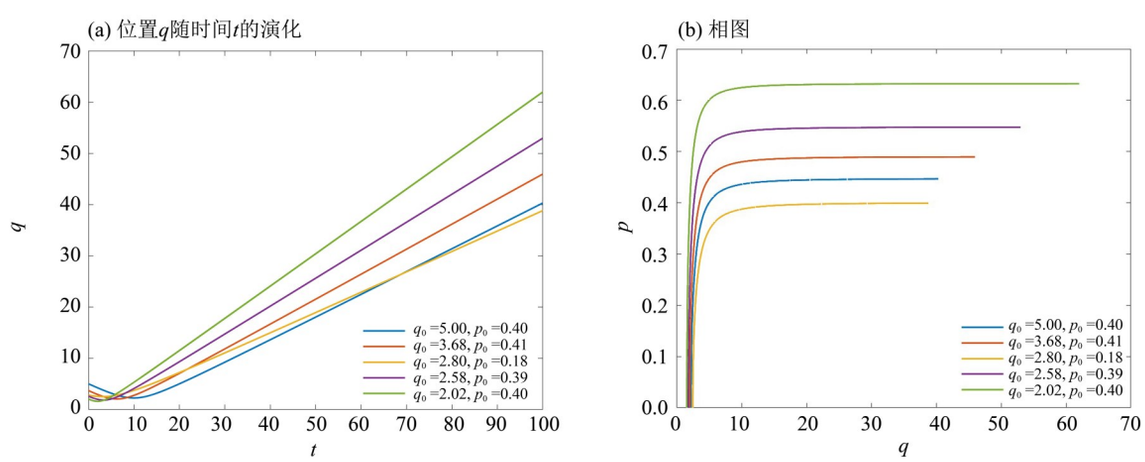


图 2　不同初值下系统的动力学演化

Fig. 2　Dynamical evolution of the system under different initial values

由 I_2 与 $I_3(I_3<0)$，得通解：

$$\begin{cases} q_2=\sqrt{A}, \\ p_2=\dfrac{2I_2I_3-t-{I_2}^2t}{2I_3}\sqrt{\dfrac{1}{A}}, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} q_2=-\sqrt{A}, \\ p_2=-\dfrac{2I_2I_3-t-{I_2}^2t}{2I_3}\sqrt{\dfrac{1}{A}}, \end{cases} \tag{22}$$

其中 $A=-\dfrac{\left(2I_3-I_2t\right)^2+t^2}{2I_3}$.

图 3 展示了 5 种初值下的 $q(t)$ 与相图.

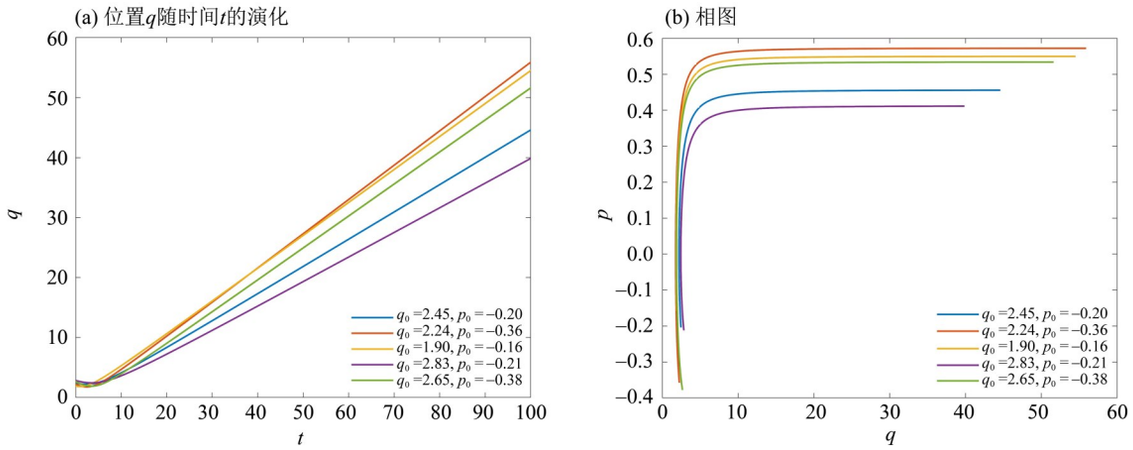


图3　不同初值下系统的动力学演化

Fig. 3　Dynamical evolution of the system under different initial values

当$I_2 \neq 0$时，由I_1与$I_3\left(I_1 I_3 \leqslant -\frac{1}{4}, I_1 > 0, I_3 < 0\right)$，得通解：

$$\begin{cases} q_3 = \sqrt{2}\, B_1, \\ p_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{2I_1 t + \sqrt{-(1+4I_1 I_3)}}{B_1}, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} q_3 = -\sqrt{2}\, B_1, \\ p_3 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{2I_1 t + \sqrt{-(1+4I_1 I_3)}}{B_1}, \end{cases}$$

$$\text{或} \quad \begin{cases} q_3 = \sqrt{2}\, B_2, \\ p_3 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{2I_1 t - \sqrt{-(1+4I_1 I_3)}}{B_2}, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} q_3 = -\sqrt{2}\, B_2, \\ p_3 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\dfrac{2I_1 t - \sqrt{-(1+4I_1 I_3)}}{B_2}, \end{cases} \tag{23}$$

其中 $B_1 = \sqrt{-I_3 + I_1 t^2 + \sqrt{-(1+4I_1 I_3)}\, t^2}$，$B_2 = \sqrt{-I_3 + I_1 t^2 - \sqrt{-(1+4I_1 I_3)}\, t^2}$. 当 $I_2 = 0$ 时，$I_1 = \frac{1}{2}\left(p^2 + \frac{1}{q^2}\right)$，$I_2 = pq - t\left(p^2 + \frac{1}{q^2}\right) = 0$，得特解：

$$\begin{cases} q_2 = \sqrt{2I_1 t^2 + \dfrac{1}{2I_1}}, \\ p_2 = \sqrt{\dfrac{2I_1}{1 + (2I_1 t)^{-2}}}, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} q_2 = -\sqrt{2I_1 t^2 + \dfrac{1}{2I_1}}, \\ p_2 = -\sqrt{\dfrac{2I_1}{1 + (2I_1 t)^{-2}}}. \end{cases} \tag{24}$$

图4展示了5种初值下的$q(t)$与相图.

动力学系统的演化过程具有连续性，其状态随时间的演变由初始条件$q(0)$，$p(0)$唯一确定. 基于给定的初始值，可以给出解析解的具体数学形式. 根据完全可积性得到的四组解析解，其数学表达虽不相同，但本质上它们刻画的是同一个物理运动. 解析解完整描述了系统的动力学行为，保证了理论与实际的一致性.

4　结　论

本文通过Lie对称性分析，得到了一类Emden-Fowler方程的3个两两相互独立的首次积分，基于系统的完全可积性严格推导出其通解. 该解析解不但可以精确的描述一类Emden-Fowler方程的长时间演化规律，还可以作为Emden-Fowler方程描述的非线性系统数值算法可靠性的判断依据.

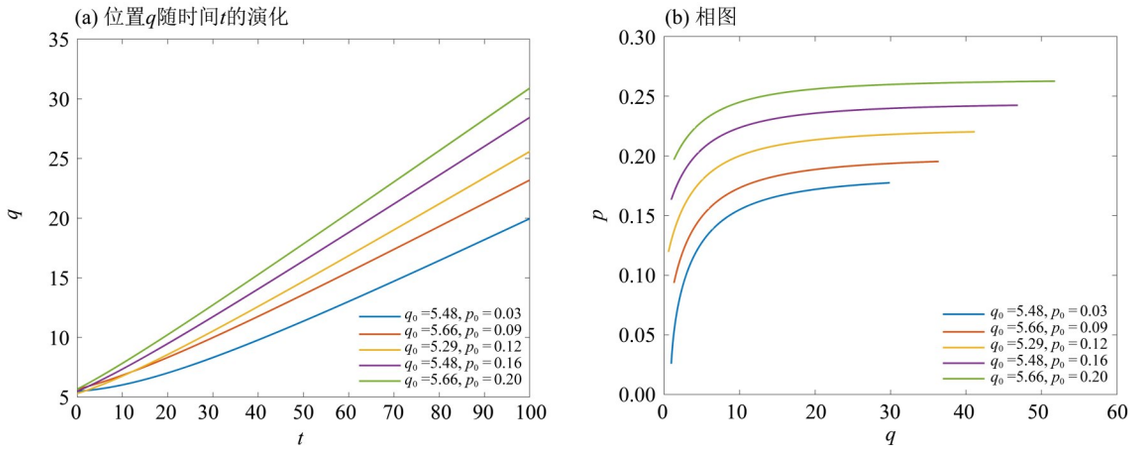


图 4　不同初值下系统的动力学演化

Fig. 4　Dynamical evolution of the system under different initial values

参考文献：

丁同仁，李承治，1991. 常微分方程教程[M]. 北京：高等教育出版社.

姜文安，王国夫，宋禹含，等，2025. 变换理论求解非线性常微分方程的若干进展[J]. 动力学与控制学报，23(3)：48−55.

蒋耀林，陈诚，2021. 微分方程的李群方法[M]. 北京：科学出版社.

刘畅，王国夫，宋禹含，等，2025. 一类时变非线性系统的精确解[J]. 动力学与控制学报，23(3)：56−65.

梅凤翔，1999. 李群和李代数对约束力学系统的应用[M]. 北京：科学出版社.

梅凤翔，2004. 约束力学系统的对称性与守恒量[M]. 北京：北京理工大学出版社.

梅凤翔，刘瑞，罗勇，1991. 高等分析力学[M]. 北京：北京理工大学出版社.

梅凤翔，吴惠彬，2012. 微分方程的分析力学方法[M]. 北京：科学出版社.

Adomian G，1994. Solving frontier problems of physics：The decomposition method[M]. Dordrecht：Springer.

Amir M，Ashraf A，Haider J A，2024. The variational iteration method for a pendulum with a combined translational and rotational system[J]. Acta Mech Autom，18(1)：48−54.

Babelon O，Bernard D，Talon M，2003. Introduction to classical integrable systems[M]. Cambridge：Cambridge University Press.

Barut A O，1978. Nonlinear equations in physics and mathematics[M]. Dordrecht：Springer.

Boichuk O，Chuiko S，Popov M，2024. Adomian decomposition method in the theory of nonlinear boundary-value problems[J]. Ukr Math J，76(6)：923−936.

Chandrasekhar S，1939. An introduction to the study of stellar structure[M]. Chicago：University of Chicago Press.

Christianen M H M，Janssen A J E M，Vlasiou M，et al，2023. Asymptotic analysis of Emden-Fowler type equation with an application to power flow models[J]. Indag Math，34(5)：1146−1180.

Deng S B，Musso M，2015. Multiple blow-up solutions for an anisotropic Emden Fowler equation in $\mathbb{R}^2$[J]. Nonlinearity，28(6)：1761−1781.

Durmaz S，Kaya M O，2012. High-order energy balance method to nonlinear oscillators[J]. J Appl Math，2012(1)：518684.

Emden R，1907. Gaskugeln：Anwendungen der mechanischen wärmetheorie auf kosmologische und meteorologische probleme[M]. Leipzig：B G Teubner.

Fowler R H，1914. Some results on the form near infinity of real continuous solutions of a certain type of second order differential equation[J]. Proc Lond Math Soc，s2-13(1)：341−371.

He J H，1999. Variational iteration method−a kind of non-linear analytical technique：Some examples[J]. Int J Non Linear Mech，34(4)：699−708.

He J H，2003. Homotopy perturbation method：A new nonlinear analytical technique[J]. Appl Math Comput，135(1)：73−79.

He J H，2010. Hamiltonian approach to nonlinear oscillators[J]. Phys Lett A，374(23)：2312−2314.

Ismail G M，Farea N M，Bayat M，et al，2025. Investigation of the highly complex nonlinear problems via modified energy balance method[J]. J Eng Res，13(3)：1956−1963.

Jones S E，Butson G J，1993a. On Abel's identity，part I：Non-linear differential equations[J]. J Sound Vibr，160(2)：243−249.

Jones S E，Butson G J，Lemmers P L，1993b. On Abel's identity，part II：The integration of a non-linear，non-conservative system[J]. J Sound Vibr，160(2)：251−257.

Kumar A，Kumar M，Goswami P，2024. Numerical solution of coupled system of Emden-Fowler equations using artificial neural network technique[J]. Int J Optim Control Theor Appl，14(1)：62−73.

Lam L，1997. Introduction to nonlinear physics[M]. New York：Springer.

Lane H J，1870. On the theoretical temperature of the sun，under the hypothesis of a gaseous mass maintaining its volume by its internal heat，and depending on the laws of gases as known to terrestrial experiment[J]. Am J Sci，s2-50(148)：57−74.

Liao S J，2009. Notes on the Homotopy analysis method：Some definitions and theorems[J]. Commun Nonlinear Sci Numer Simul，14(4)：983−997.

Liu C，Song Y H，Jiang W A，et al，2023. First integrals and exact solutions of a class of nonlinear systems[J]. Acta Mech，234(7)：2907−2917.

Liu H，Yun Y S，2024. Lie symmetry analysis and conservation laws of fractional Benjamin-Ono equation[J]. Symmetry，16(4)：473.

Nayfeh A H，2000. Perturbation methods[M]. Weinheim：Wiley-VCH.

Prelle M J，Singer M F，1983. Elementary first integrals of differential equations[J]. Trans Amer Math Soc，279(1)：215.

Shan H W，Tian B，Gao X T，et al，2025. Lie-symmetry analysis，optimal system，analytic solutions，nonlinear self-adjointness and conservation laws of a (3+1)-dimensional generalized Hirota-Satsuma-Ito equation for the shallow water waves[J]. Qual Theory Dyn Syst，24(4)：184.

Yildirim A，Saadatnia Z，Askari H，2011. Application of the Hamiltonian approach to nonlinear oscillators with rational and irrational elastic terms[J]. Math Comput Model，54(1/2)：697−703.

（责任编辑　冯兆永）