

半无界退化抛物型方程的辐射系数反演问题*

赵娅文, 杨柳

兰州交通大学数理学院, 甘肃 兰州 730070

摘要: 系统研究了一类定义在半无界区域上的退化抛物型方程辐射系数反演问题. 首先通过引入精确的人工边界条件, 成功将半无界区域上的热传导方程转化为有界区域上的可计算问题; 然后基于最优控制框架, 将原问题转化为一个优化问题, 在对原问题做估计的同时, 证明了控制泛函极小值的存在性以及极值所满足的必要条件; 随后利用极小元所满足的必要条件证明其唯一性和稳定性. 最后, 基于必要条件设计了一种梯度型优化算法, 并通过数值算例验证了算法的有效性.

关键词: 半无界退化抛物方程; 辐射系数反演; 人工边界; 最优控制; 适定性

中图分类号: O24 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137(XXXX)XX-0001-13

The inverse problem of radiative coefficient for semi-unbounded degenerate parabolic equations

Zhao Yawen, Yang Liu

School of Mathematics and Physics, Lanzhou Jiaotong University, Lanzhou 730070, China

Abstract: A systematic investigation is conducted on the inverse problem of radiative coefficient reconstruction for a class of degenerate parabolic equations defined on semi-unbounded domains. The study begins by introducing an exact artificial boundary condition, which effectively reduces the original problem on the semi-unbounded region to an equivalent formulation on a bounded domain. Within the optimal control framework, the inverse problem is reformulated as a minimization problem. A priori estimates for the direct problem are derived, and the existence of a minimizer for the control functional is established, along with the necessary conditions satisfied by the extremum. The uniqueness and stability of the minimizer are demonstrated through an analysis based on these necessary conditions. Finally, based on the necessary optimality conditions, a gradient-based optimization algorithm was designed, and numerical examples were presented to demonstrate its effectiveness.

Key words: Semi-unbounded degenerate parabolic equation; radiative coefficient inversion; artificial boundary; optimal control; well-posedness

偏微分方程(陆金甫等, 2004)反问题是数学物理领域的一个重要研究方向, 广泛存在于热传导、生物扩散、金融数学等科学与工程领域. 与解的存在性、唯一性和稳定性均有保障的正问题不同, 绝大多数反问题

* 收稿日期: 2026-01-15 录用日期: 2026-05-27 网络首发日期: XXXX-XX-XX

基金项目: 国家自然科学基金(61663018, 11961042); 甘肃省自然科学基金(25JRRA163, 25JRRA952); 甘肃省基础研究创新群体项目(25JRRA805)

作者简介: 赵娅文(2001年生), 女; 研究方向: 数学物理反问题; E-mail: 11240496@stu.lzjtu.edu.cn

通信作者: 杨柳(1977年生), 女; 研究方向: 数学物理反问题; E-mail: l_yang218@stu.lzjtu.edu.cn

全文阅读



ZR20260021

因其固有的不稳定性而极具挑战性(刘继军,2005;姜礼尚等,2007).

偏微分方程反问题的内容及其丰富.近年来,针对半无界区域逆热源问题的研究得到了一系列重要的研究成果.例如 Deng et al.(2022)通过引入合适的人工边界

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{a_0\pi}} \int_0^t \frac{\partial u(0,\xi)}{\partial \xi} \frac{1}{\sqrt{t-\xi}} d\xi,$$

将原半无界区域问题转化为有界区域问题,并推导得到相应边界条件的精确表达式.在此基础上,严格证明了原问题解的唯一性,同时证明了对应最优控制问题解的稳定性.

特别地,对于方程系数呈现退化特性的模型,其反问题研究更为复杂.杨柳(2016)对一类具奇异系数的二阶抛物型方程辐射系数反演问题进行了深入探讨,在最优控制框架下建立了解的存在性、唯一性及稳定性理论,为处理此类不稳定性问题提供了坚实的数学基础.

Egger et al.(2005)中对期权定价中 Black-Scholes 方程的波动率进行了识别

$$C_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 C_{ss} + (r-q)SC_s - rC = 0,$$

其中 r 是无风险利率, q 是红利率, C 是期权价格, σ 是隐含波动率.而 Deng et al.(2010)则专门探讨了利用最终超定数据确定退化抛物型方程中辐射系数的反问题,其讨论的模型在区域的侧边界上存在退化性,其数学模型可表述为

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial t} + \frac{\omega^2(r)}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + (\theta(r) + \lambda(t)\omega(r)) \frac{\partial P}{\partial r} - rP = 0, \\ P(r, T) = Z, \end{cases}$$

其中 $\lambda(t)$ 为待识别辐射系数.该研究在最优控制框架下,引入 Tikhonov 正则化,通过极小化如下目标泛函

$$J(\lambda) = \frac{1}{2} \|P(r_0, t; \lambda) - P^*(t)\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{N}{2} \|\lambda\|_{H^1(0,T)}^2,$$

将原不稳定性问题转化为适定的优化问题,并证明了最优解的存在性及一阶最优性条件.

尽管已有文献对抛物型方程反问题进行了广泛研究,但现有结果大多集中于有界区域或非退化模型.对于同时具有“半无界区域”“扩散退化”及“非局部人工边界条件”三类结构的辐射系数反演问题,相关理论结果仍较少.

与已有文献相比,一方面,本文考虑的扩散系数在边界处退化,此时传统能量估计与边界正则性分析均需重新建立.另一方面,本文在区域截断后得到的是含时间积分结构的非局部人工边界条件,这使得经典伴随系统方法难以直接适用.此外,已有关于逆热源问题的研究大多对应线性源项识别,而本文中的未知辐射系数与状态变量之间存在非线性耦合关系,因此稳定性分析需要同时控制退化扩散项与非线性项所带来的误差传播.需要指出的是,本文所得结果仍属于局部 Lipschitz 稳定性,其稳定性阶数与已有最优控制类结果基本一致.由于本文进一步研究了同时含半无界区域、退化扩散以及非局部人工边界条件的辐射系数反演问题,相关分析过程更加复杂.

针对上述困难,本文首先构造精确的人工边界条件,将半无界区域问题等价转化为有界区域问题;随后在最优控制框架下建立目标泛函,证明极小元的存在性;进一步推导了极小元所满足的必要条件;然后在适当先验条件与终端时间充分小的情况下,建立辐射系数反演问题的局部唯一性与稳定性结果;最后进行数值验证.

本文考虑原问题定义在半无界区域 $E_L = D_L \times (0, T]$ 上,其中 $D_L = [-L, +\infty)$

$$\begin{cases} u_t - (a(x)u_x)_x + q(x)u = f(x, t), & (x, t) \in E_L \equiv D_L \times (0, T], \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in D_L, \end{cases}$$

其中 $a(x)$ 是一个光滑非负函数,且满足退化条件

$$\begin{cases} a(-L) = 0, \\ a(x) > 0, & -L < x < 0, \\ a(x) = a_0, & x \geq 0, \end{cases}$$

这里 a_0 是一个正常数, $\varphi(x), q(x), f(x, t)$ 的支集有界且

$$\begin{aligned} \text{Supp}\{\varphi(x)\} &\subset D_0 = \{x \mid -L \leq x < 0\}, \quad \text{Supp}\{q(x)\} \subset D_0, \\ \text{Supp}\{f(x, t)\} &\subset E_0 = \{(x, t) \mid -L \leq x < 0, 0 < t \leq T\}. \end{aligned}$$

为将原问题转化为有界问题, 先引入合适的人工边界, 然后将无界区域上的计算转化为有界区域上的计算, 选择线段 $\Sigma = \{(x, t) \mid x = 0, 0 < t < T\}$ 作为人工边界, 无界区域 E_L 被 Σ 分成两部分:

- (i) 有界部分 $E_0: a(x)$ 在 $x = -L$ 处退化;
- (ii) 无界部分 $E_1 = \{(x, t) \mid 0 \leq x < +\infty, 0 < t \leq T\}: a(x) \equiv a_0 > 0$ 且 $q(x) = 0, f(x, t) = 0$.

由于 φ 和 f 的支集都紧包含于 E_0 , 容易看出在 E_1 上, $u(x, t)$ 满足如下半无界问题

$$\begin{cases} u_t - a_0 u_{xx} = 0, & (x, t) \in E_1, \\ u|_{t=0} = 0, & 0 \leq x < +\infty. \end{cases} \quad (1)$$

为了在有界区域 E_0 上等价地求解原问题, 这需要仔细分析无界区域 E_1 上解的行为, 从而在人工边界 $x = 0$ 上为 E_0 区域的问题提供一个精确的边界条件.

当 $u(0, t)$ 给定时, 方程(1)的解可表示为

$$u(x, t) = \frac{x}{2\sqrt{a_0\pi}} \int_0^t u(0, \theta) \frac{1}{(t-\theta)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a_0(t-\theta)}\right) d\theta. \quad (2)$$

令 $\mu = \frac{x}{2\sqrt{a_0(t-\theta)}}$, 则式(2)可转化为

$$u(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{a_0 t}}}^{\infty} u\left(0, t - \frac{x^2}{4a_0\mu^2}\right) e^{-\mu^2} d\mu. \quad (3)$$

对式(3)关于 x 求导, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{x}{2\sqrt{a_0 t}}}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}\left(0, t - \frac{x^2}{4a_0\mu^2}\right) e^{-\mu^2} \left(-\frac{2x}{4a_0\mu^2}\right) d\mu,$$

其中利用了 $u(0, 0) = \varphi(0) = 0$. 令 $\mu = \frac{x}{2\sqrt{a_0(t-\theta)}}$, 得

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -\frac{1}{\sqrt{a_0\pi}} \int_0^t \frac{\partial u}{\partial \theta}(0, \theta) \frac{1}{\sqrt{t-\theta}} e^{-\frac{x^2}{4a_0(t-\theta)}} d\theta.$$

令 $x \rightarrow 0^+$, 得精确的人工边界条件

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{a_0\pi}} \int_0^t \frac{\partial u(0, \theta)}{\partial \theta} \frac{1}{\sqrt{t-\theta}} d\theta.$$

故正问题(问题 P)可表述为

$$\begin{cases} u_t - (a(x)u_x)_x + q(x)u = f(x, t), & (x, t) \in E_0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in D_0, \\ u_x|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{a_0\pi}} \int_0^t \frac{\partial u(0, \theta)}{\partial \theta} \frac{1}{\sqrt{t-\theta}} d\theta, & t \in (0, T]. \end{cases} \quad (4)$$

注意到问题(4)左边并未给出边界条件. 由于主项系数 $a(x)$ 在 $x = -L$ 处退化为零, 利用标准的退化抛物方程的 Fichera 理论(潘坚等, 2013)易推得左边界 $x = -L$ 处不需要边界条件. 因此问题(4)的提法是合理的.

1 最优控制问题

反问题是不适定的, 因为观测数据的微小扰动会导致解的巨大变化(Dehghan, 2001). 而最优控制方法是处理不适定问题的有力工具, 在偏微分方程反问题领域, 尤其是终端控制问题方面有很多的应用(Ismailov et al., 2016). 需指出的是, 本文中的参数识别是一个非线性反问题, 即使基本方程(4)是一个线性方程.

下面引入如下定义在区间 D_0 上的 Sobolev 空间, 并写出相应范数(Adams, 1981).

$$\|u\|_{H^1(D_0)}^2 = \int_{D_0} (|u(x)|^2 + |u_x(x)|^2) dx; \quad \|u\|_{L^2(D_0)}^2 = \int_{D_0} |u(x)|^2 dx.$$

考虑如下问题 P1: 求 $J(\bar{q}) \in A$ 使得

$$J(\bar{q}) = \min_{q \in A} J(q),$$

其中 $J(q) = \frac{1}{2} \int_{D_0} |u(x, T; q) - g(x)|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{D_0} |\nabla q|^2 dx$, $A = \{q(x) \mid 0 < \sigma \leq q(x) \leq \gamma, \nabla q \in L^2(D_0)\}$, $\alpha > 0$ 是正则化参数, σ, γ 是两个给定的正常数. 已知 $g(x)$ 是控制目标, $u(x, t)$ 是如下方程对应于给定 $q(x) \in A$ 的解, 假设终端观测数据 $g(x)$ 满足

$$u|_{t=T} = g(x) \in L^2(D_0). \quad (5)$$

因此, 正问题是由已知系数 $q(x)$ 确定方程 (5) 的解 $u(x, t)$, 本文对 $u(x, t)$ 有以下估计.

引理 1 设 $u(x, t)$ 为式 (2) 的解, $q(x) \in A$ 是给定函数, 则对 $u(x, t)$ 有以下估计

$$\max_{t \in (0, T]} \int_{D_0} u^2 dx + \int_0^t \int_{D_0} au_x^2 dx dt \leq C \left(\int_{D_0} \varphi^2 dx + \int_0^t \int_{D_0} f^2 dx dt \right).$$

证明 在方程 (4) 两边同时乘以 u , 并在 D_0 上积分

$$\int_{D_0} uf dx = \int_{D_0} u_t u dx - \int_{D_0} u (au_x)_x dx + \int_{D_0} qu^2 dx =: I_1 + I_2 + I_3.$$

则

$$I_1 = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{D_0} u^2 dx, \quad I_2 = -ua u_x|_{-L}^0 + \int_{D_0} au_x^2 dx.$$

令

$$I_4 = - \int_{D_0} (a(0)u(0, t)u_x(0, t))_x dx = -u(0, t)a(0)u_x(0, t). \quad (6)$$

现证明 $\int_0^T I_4 dt \geq 0$. 事实上, 对于形如式 (6) 的积分, 我们都可证明其非负性.

引入以下满足半无界区域方程的辅助函数 $R(x, t)$, 满足

$$\begin{cases} R_t - a_0 R_{xx} = 0, & x \in [0, +\infty), \\ R|_{t=0} = 0, & x \in [0, +\infty), \\ R \rightarrow 0, & x \rightarrow +\infty. \end{cases}$$

类似于前面的推导, 易知

$$\frac{\partial R}{\partial x} \Big|_{x=0} = - \frac{1}{\sqrt{a_0 \pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-\theta}} \frac{\partial R(0, \theta)}{\partial \theta} d\theta.$$

两边乘以 R 并积分

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^{+\infty} RR_t dx dt - a_0 \int_0^T \int_0^{+\infty} RR_{xx} dx dt &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (R^2) dx dt - a_0 \int_0^T \left(RR_x|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} R_x^2 dx \right) dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} R^2 dx + a_0 \int_0^T R(0, t)R_x(0, t) dt + a_0 \int_0^T \int_0^{+\infty} R_x^2 dx dt = 0, \end{aligned}$$

所以

$$-a_0 \int_0^T R(0, t)R_x(0, t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} R^2 dx + a_0 \int_0^T \int_0^{+\infty} R_x^2 dx dt \geq 0. \quad (7)$$

对比式 (7) 知,

$$\int_0^T I_4 dt = - \int_0^T a(0)u(0, t)u_x(0, t) dt = \int_0^T \left(a(0)u(0, t) \int_0^t \frac{1}{\sqrt{a_0 \pi}} \cdot \frac{\partial u(0, \theta)}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-\theta}} d\theta \right) dt \geq 0.$$

又由于 $q(x) \geq 0$, 从而 $\int_0^T I_3 dt \geq 0$.

对于左端项, 应用 Cauchy-Schwarz 不等式, 得

$$\int_{D_0} u f dx \leq \frac{1}{2} \int_{D_0} |u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{D_0} |f|^2 dx.$$

整理得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{D_0} u^2 dx + \int_{D_0} a u_x^2 dx + \int_{D_0} q u^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_{D_0} |u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{D_0} |f|^2 dx.$$

对时间 t 积分

$$\frac{1}{2} \int_{D_0} u^2 dx - \frac{1}{2} \int_{D_0} \varphi^2 dx + \int_0^t \int_{D_0} a u_x^2 dx dt + \int_0^t \int_{D_0} q u^2 dx dt \leq \frac{1}{2} \int_0^t \int_{D_0} |u|^2 dx dt + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{D_0} |f|^2 dx dt.$$

由 Gronwall 不等式得到

$$\max_{t \in (0, T]} \int_{D_0} u^2 dx + a \int_0^t \int_{D_0} u_x^2 dx dt \leq C \left(\int_{D_0} \varphi^2 dx + \int_0^t \int_{D_0} |f|^2 dx dt \right).$$

引理得证.

2 存在性

引理 2 (Deng et al., 2014) 对任意子序列 $\{q_n\} \in A$, 当 $n \rightarrow \infty$, $\|q_n - q\|_{L^1(D_0)} \rightarrow 0$, 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_0} |u(x, T; q_n) - g(x)|^2 dx = \int_{D_0} |u(x, T; q) - g(x)|^2 dx.$$

定理 1 存在极小元 $\bar{q} \in A$, 使得

$$J(\bar{q}) = \min_{q \in A} J(q).$$

证明 $J(q)$ 显然是非负的, 则 $J(q)$ 有下确界 $k = \inf_{q \in A} J(q)$. 设 $\{q_n\}$ 是极小化序列, 即

$$k \leq J(q_n) \leq k + \frac{1}{n}, \quad n = 1, 2, \dots.$$

注意到 $J(q_n) \leq C$, 则

$$\|(q_n)_x\|_{L^2(D_0)} \leq C,$$

这里常数 C 与 n 无关. 同时 $\{q_n\}$ 是有界的, 则

$$\|q_n\|_{H^1(D_0)} \leq C.$$

因此可以选取一个 $\{q_n\}$ 的子序列, 不妨仍设为 $\{q_n\}$, 有 $q_n(x) \rightarrow \bar{q}(x) \in H^1(D_0)$, ($n \rightarrow \infty$).

利用 Sobolev 嵌入定理, 得

$$\|q_n(x) - \bar{q}(x)\|_{L^1(D_0)} \rightarrow 0, \quad (n \rightarrow \infty),$$

即 $\{q_n(x)\} \in A$. 因此, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, 在 $L^1(D_0)$ 中有 $q_n(x) \rightarrow \bar{q}(x) \in A$.

注意到 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{2} \int_{D_0} |(q_n)_x| dx = \frac{\alpha}{2} \int_{D_0} |\bar{q}_x| dx$, 由引理 2, 知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{D_0} |u(x, T; q_n) - g(x)|^2 dx = \int_{D_0} |u(x, T; q) - g(x)|^2 dx.$$

结合即得 $J(q_n) \rightarrow J(\bar{q})$, ($n \rightarrow \infty$). 则 $J(\bar{q}) = \min_{q \in A} J(q)$.

3 必要条件

定理 2 令 q 是最优控制问题 $P1$ 的极小元, 则存在三元组 $(u, \xi; q)$ 满足

$$\begin{cases} u_t - (a u_x)_x + q u = f(x, t), & (x, t) \in E_0, \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & x \in D_0, \\ u_x|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{a_0 \pi}} \int_0^t \frac{\partial u}{\partial \theta} \frac{1}{\sqrt{t-\theta}} d\theta, & t \in (0, T], \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} \xi_t - (a\xi_x)_x + q\xi = (q-h)u, & (x, t) \in E_0, \\ \xi|_{t=0} = 0, & x \in D_0, \\ \xi_x|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{a_0\pi}} \int_0^t \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{1}{\sqrt{t-\theta}} d\theta, & t \in (0, T], \end{cases} \quad (9)$$

且满足

$$\int_{D_0} (u(x, T; q) - g(x))\xi(x, T)dx + \alpha \int_{D_0} \nabla q \cdot \nabla (h - q)dx \geq 0. \quad (10)$$

证明 对任意 $q \in A$ 及 $0 \leq \delta \leq 1$, 定义 $q_\delta \equiv (1 - \delta)q + \delta h$. 显然 $q_\delta \in A$, 故

$$J_\delta \equiv J(q_\delta) = \frac{1}{2} \int_{D_0} |u(x, T; q_\delta) - g(x)|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_{D_0} |\nabla q_\delta|^2 dx.$$

令 u_δ 为问题(8)对应于给定系数 $q = q_\delta$ 的解. 由于 q 是最优解, 从而

$$\left. \frac{dJ_\delta}{d\delta} \right|_{\delta=0} = \int_{D_0} |u(x, T; q) - g(x)| \cdot \left. \frac{\partial u_\delta}{\partial \delta} \right|_{\delta=0} dx + \alpha \int_{D_0} \nabla q \cdot \nabla (h - q)dx \geq 0. \quad (11)$$

令 $\tilde{u}_\delta \equiv \frac{\partial u_\delta}{\partial \delta}$, 直接计算得

$$\begin{cases} (\tilde{u}_\delta)_t - (a \cdot \tilde{u}_{\delta,x})_x + q_\delta \tilde{u}_\delta = (q-h)u_\delta, \\ \tilde{u}_\delta|_{t=0} = 0, \\ \tilde{u}_{\delta,x}|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{a_0\pi}} \int_0^t \frac{\partial \tilde{u}_\delta}{\partial \theta} \frac{1}{\sqrt{t-\theta}} d\theta. \end{cases}$$

再令 $\xi = \tilde{u}_\delta|_{\delta=0}$, 则 ξ 满足

$$\begin{cases} \xi_t - (a \cdot \xi_x)_x + q\xi = (q-h)u, \\ \xi|_{t=0} = 0, \\ \xi_x|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{a_0\pi}} \int_0^t \frac{\partial \xi}{\partial \theta} \frac{1}{\sqrt{t-\theta}} d\theta. \end{cases}$$

由式(11)得

$$\int_{D_0} (u(x, T; q) - g(x))\xi(x, T)dx + \alpha \int_{D_0} \nabla q \cdot \nabla (h - q)dx \geq 0. \quad (12)$$

注1 对于一般抛物型方程最优控制问题, 通常可通过构造伴随系统推导极小元所满足的最优性条件. 若对本文问题采用共轭理论, 首先需要将人工边界条件表示为 Abel 型积分算子, 其形式如下

$$\mathcal{H}[\psi](t) = \frac{1}{\sqrt{a_0\pi}} \int_0^t \frac{\psi'(\theta)}{\sqrt{t-\theta}} d\theta,$$

则人工边界条件可以写为 $u_x|_{x=0} + \mathcal{H}[u(0, \cdot)](t) = 0$.

进一步构造伴随系统时, 需引入算子 \mathcal{H} 的伴随算子 \mathcal{H}^* . 由积分算子的伴随关系可知, \mathcal{H}^* 中会出现关于时间变量的反向积分结构, 即伴随边界项将包含形如 $\frac{d}{dt} \left(\int_t^T \frac{\eta(s)}{\sqrt{s-t}} ds \right)$ 的项. 由此可见, 若强行构造共轭方程, 其边界条件不再是通常意义下的局部边界条件, 而是同时含有 Abel 型积分算子、伴随积分算子和时间反向积分项的非局部边界条件.

因此, 与经典抛物型方程的伴随系统相比, 本文对应的共轭系统不仅受到扩散系数退化的影响, 而且在人工边界处还会产生非局部时间耦合项, 使得伴随变量在不同时刻之间相互关联. 这会增加伴随系统适定性分析、能量估计以及数值离散的复杂性. 基于此, 本文不再展开完整共轭系统的推导, 而采用直接变分方法得到必要条件(10)及辅助系统(9). 该方法保持了与正问题(8)一致的方程结构, 更便于后续唯一性、稳定性证明及数值算法设计.

4 唯一性与稳定性

假设 $g_1(x)$ 和 $g_2(x)$ 是两个给定观测函数. 令 $q_1(x)$ 和 $q_2(x)$ 是控制问题 $P1$ 分别对应与 $g = g_i, (i = 1, 2)$ 的解, 而 $\{u_i, \xi_i\}, (i = 1, 2)$ 是系统 (8)~(9) 分别对应于 $q = q_i, (i = 1, 2)$ 的解.

令

$$u_1 - u_2 = U, \quad \xi_1 + \xi_2 = \Xi, \quad q_1 - q_2 = Q.$$

则 U 和 Ξ 满足

$$\begin{cases} U_t - (aU_x)_x + q_1U = -Qu_2, \\ U|_{t=0} = 0, \\ U_x|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{a_0\pi}} \int_0^t \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{1}{\sqrt{t-\theta}} d\theta, \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \Xi_t - (a\Xi_x)_x + q_1\Xi = Q(U + \xi_2), \\ \Xi|_{t=0} = 0, \\ \Xi_x|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{a_0\pi}} \int_0^t \frac{\partial \Xi}{\partial \theta} \frac{1}{\sqrt{t-\theta}} d\theta. \end{cases} \quad (14)$$

引理 3 函数 $Q(x) \in H^1(D_0)$, 若存在一点 $x_0 \in D_0$, 使得 $Q(x_0) = 0$, 则存在一个仅依赖于区间 D_0 的常数 $C > 0$, 有下面不等式成立

$$\int_{D_0} |Q(x)|^2 dx \leq C \int_{D_0} |Q_x(x)|^2 dx.$$

引理 4 对方程 (13), 存在常数 $C > 0$ 和 $M_U > 0$, 使得以下估计式成立

$$\max_{t \in (0, T)} \left(\int_{D_0} U^2 dx \right) + \int_0^T \int_{D_0} aU_x^2 dx dt \leq CT \int_{D_0} |Q|^2 dx,$$

其中常数 C 与 T 无关.

$$\|U\|_{L^\infty(E_0)} \leq M_U, \quad (15)$$

其中 M_U 依赖于系数 $a(x), q_1(x), Q(x)$ 的 L^∞ 范数上界以及区域 D_0 .

证明 在方程 (13) 两边同乘以 U , 并在区域 D_0 上积分, 得

$$\int_{D_0} U_t U dx - \int_{D_0} U(aU_x)_x dx + q_1 \int_{D_0} U^2 dx = - \int_{D_0} Qu_2 U dx.$$

利用分部积分

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{D_0} U^2 dx - U(0, t)a(0)U(0, t)_x + \int_{D_0} aU_x^2 dx + q_1 \int_{D_0} U^2 dx = - \int_{D_0} Qu_2 U dx.$$

现处理右端项, 由 Cauchy-Schwarz 不等式得

$$\left| - \int_{D_0} Qu_2 U dx \right| = \left| \int_{D_0} Qu_2 U dx \right| \leq \int_{D_0} |Q| |u_2| |U| dx.$$

由于 u_2 是正问题的解, 由弱极值原理知, 存在常数 $M > 0$ 使得 $|u_2(x, t)| \leq M, \forall (x, t) \in E_0$, 于是有

$$\int_{D_0} |Q| |u_2| |U| dx \leq M \int_{D_0} |Q| |U| dx.$$

应用 Young 不等式 ($ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2$, 取 $\varepsilon = 1$)

$$M \int_{D_0} |Q| |U| dx \leq \frac{M}{2} \int_{D_0} Q^2 dx + \frac{M}{2} \int_{D_0} U^2 dx.$$

注意 Q 只与 x 有关, 所以 $\int_{D_0} Q^2 dx$ 是一个常数.

整理上式得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{D_0} U^2 dx - U(0, t)a(0)U(0, t)_x + \int_{D_0} aU_x^2 dx + q_1 \int_{D_0} U^2 dx \leq \frac{M}{2} \int_{D_0} Q^2 dx + \frac{M}{2} \int_{D_0} U^2 dx.$$

类似于引理 1 的证明, 易得 $-U(0, t)a(0)U(0, t)_x \geq 0$, 所以有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{D_0} U^2 dx + \int_{D_0} aU_x^2 dx \leq \frac{M}{2} \int_{D_0} Q^2 dx + \frac{M}{2} \int_{D_0} U^2 dx. \quad (16)$$

式(16)两边对时间 t 积分, 得

$$\frac{1}{2} \int_{D_0} U^2 dx + \int_0^T \int_{D_0} aU_x^2 dx dt \leq \frac{M}{2} \int_0^T \int_{D_0} Q^2 dx dt + \frac{M}{2} \int_0^T \int_{D_0} U^2 dx dt = \frac{MT}{2} \int_{D_0} Q^2 dx + \frac{M}{2} \int_0^T \int_{D_0} U^2 dx dt.$$

再利用 Gronwall 不等式得

$$\max_{t \in (0, T]} \left(\int_{D_0} U^2 dx \right) + \int_0^T \int_{D_0} aU_x^2 dx dt \leq CT \int_{D_0} |Q|^2 dx.$$

估计式(15)的证明, 由弱极值原理容易得到. 引理证完.

如果当 $q = q_2$ 时, 取 $h = q_1$, 则 ξ_2 满足下面方程

$$\begin{cases} \xi_{2t} = (a\xi_{2x})_x - q_2\xi_2 - Qu_2, \\ \xi_2|_{t=0} = 0, \quad \xi_{2x}|_{x=0} = -\frac{1}{\sqrt{a_0\pi}} \int_0^t \frac{\partial \xi_2}{\partial \theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{t-\theta}} d\theta. \end{cases} \quad (17)$$

引理 5 对方程(17), 存在与 T 无关的常数 $C > 0$ 和 $M_\xi > 0$, 使得以下估计式成立

$$\max_{t \in (0, T]} \left(\int_{D_0} \xi_2^2 dx \right) \leq CT \int_{D_0} |Q|^2 dx, \quad \|\xi_2\|_{L^\infty(E_0)} \leq M_\xi,$$

其中 M_ξ 依赖于系数 $a(x)$, $q_2(x)$, $Q(x)$ 的 L^∞ 范数上界以及区域 D_0 .

该引理的证明与引理 4 类似, 此处略.

引理 6 对方程(14)有下面估计式成立

$$\max_{t \in (0, T]} \int_{D_0} \Xi^2 dx + \int_0^T \int_{D_0} a\Xi_x^2 dx dt \leq CT^2 \|Q\|_{H^1(D_0)}^2 \cdot \|Q\|_{L^2(D_0)}^2,$$

其中 C 与 T 无关.

证明 当 $0 < t \leq T$ 时, 对方程(14)两端同时乘以 Ξ , 并在 E_0 上积分, 得

$$\int_0^T \int_{D_0} \Xi_t \cdot \Xi dx dt - \int_0^T \int_{D_0} \Xi \cdot (a\Xi_x)_x dx dt + q_1 \int_0^T \int_{D_0} \Xi^2 dx dt = \int_0^T \int_{D_0} Q(U + \xi_2)\Xi dx dt.$$

先处理左端项, 得

$$\frac{1}{2} \int_{D_0} \Xi^2 dx + \int_0^T \int_{D_0} a\Xi_x^2 dx dt - \int_0^T a(0)\Xi(0, t)\Xi_x(0, t) dt + q_1 \int_0^T \int_{D_0} \Xi^2 dx dt.$$

类似引理 1 的证明, 易得 $-\int_0^T a(0)\Xi(0, t)\Xi_x(0, t) dt \geq 0$.

又由于 $q_1(x) \geq \sigma > 0$, 故有 $q_1 \int_0^T \int_{D_0} \Xi^2 dx dt \geq \sigma \int_0^T \int_{D_0} \Xi^2 dx dt > 0$, 所以

$$\int_0^T \int_{D_0} \Xi_t \cdot \Xi dx dt - \int_0^T \int_{D_0} \Xi \cdot (a\Xi_x)_x dx dt + q_1 \int_0^T \int_{D_0} \Xi^2 dx dt \geq \frac{1}{2} \int_{D_0} \Xi^2 dx + \int_0^T \int_{D_0} a\Xi_x^2 dx dt + \sigma \int_0^T \int_{D_0} \Xi^2 dx dt.$$

令 $I = \left| \int_0^T \int_{D_0} Q(U + \xi_2)\Xi dx dt \right|$, 应用 Cauchy-Schwarz 不等式

$$I \leq \int_0^T \int_{D_0} |Q(U + \xi_2)| |\Xi| dx dt \leq \left(\int_0^T \int_{D_0} |Q(U + \xi_2)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_{D_0} |\Xi|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

现在对 $\int_0^T \int_{D_0} |Q(U + \xi_2)|^2 dx dt$ 进行估计. 应用 Hölder 不等式, 已知 Q 与时间无关, 所以有

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{D_0} |Q(U + \xi_2)|^2 dx dt &= \int_0^T \int_{D_0} Q^2 (U + \xi_2)^2 dx dt \leq \int_0^T \left[\left(\int_{D_0} Q^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\int_{D_0} (U + \xi_2)^4 dx \right)^{\frac{1}{2}} \right] dt \\ &= \int_0^T \left(\|Q\|_{L^4(D_0)}^2 \cdot \|U + \xi_2\|_{L^4(D_0)}^2 \right) dt. \end{aligned}$$

(i) 对于 $\left(\int_{D_0} Q^4 dx\right)^{\frac{1}{2}}$: 利用 Sobolev 嵌入定理, 在一维有界区域 D_0 上, 有连续嵌入 $H^1(D_0) \hookrightarrow L^\infty(D_0)$, 并且有更强的嵌入 $H^1(D_0) \hookrightarrow L^p(D_0)$, 对于所有 $p \geq 1$ 都成立. 特别地, 对于 $p = 4$, 存在常数 $C_s > 0$, 使得

$$\|f\|_{L^4(D_0)} \leq C_s \|f\|_{H^1(D_0)}.$$

应用以上定理得

$$\|Q\|_{L^4(D_0)} \leq C_s \|Q\|_{H^1(D_0)},$$

所以

$$\left(\int_{D_0} Q^4 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|Q\|_{L^4(D_0)}^2 \leq C_s^2 \|Q\|_{H^1(D_0)}^2. \quad (18)$$

(ii) 对于 $\left(\int_{D_0} (U + \xi_2)^4 dx\right)^{\frac{1}{2}}$: 由 U 和 ξ_2 的最大模估计可知, 存在常数 $C_i > 0$, 使得

$$\left(\int_{D_0} (U + \xi_2)^4 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \|U + \xi_2\|_{L^4(D_0)}^2 \leq C_i \|U + \xi_2\|_{L^2(D_0)}^2. \quad (19)$$

由式(18)~(19)得

$$\int_0^T \int_{D_0} |Q(U + \xi_2)|^2 dx dt \leq C_s^2 C_i \|Q\|_{H^1(D_0)}^2 \int_0^T \|U + \xi_2\|_{L^2(D_0)}^2 dt.$$

下面对 $\int_0^T \|U + \xi_2\|_{L^2(D_0)}^2 dt$ 进行估计. 由引理 4 和引理 5 得

$$\|U + \xi_2\|_{L^2(D_0)} \leq \|U\|_{L^2(D_0)} + \|\xi_2\|_{L^2(D_0)} \leq C_1 \sqrt{T} \|Q\|_{L^2(D_0)} + C_2 \sqrt{T} \|Q\|_{L^2(D_0)} = C_3 \sqrt{T} \|Q\|_{L^2(D_0)}.$$

将其平方并对时间 t 积分得

$$\int_0^T \|U + \xi_2\|_{L^2(D_0)}^2 dt \leq \int_0^T C_3^2 T \|Q\|_{L^2(D_0)}^2 dt = C_3^2 T^2 \|Q\|_{L^2(D_0)}^2,$$

所以

$$\int_0^T \int_{D_0} |Q(U + \xi_2)|^2 dx dt \leq C_s^2 C_i \|Q\|_{H^1(D_0)}^2 \cdot C_3^2 T^2 \|Q\|_{L^2(D_0)}^2.$$

综合以上估计, 得

$$I \leq \left(C_s^2 C_i C_3^2 T^2 \|Q\|_{H^1(D_0)}^2 \cdot \|Q\|_{L^2(D_0)}^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_{D_0} |\Xi|^2 dx dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

令 $C_4 = C_i \sqrt{C_s^2 C_3^2}$, 则

$$I \leq C_4 T \|Q\|_{H^1(D_0)} \|Q\|_{L^2(D_0)} \left(\int_0^T \int_{D_0} |\Xi|^2 dx dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

结合左右两部分得

$$\frac{1}{2} \int_{D_0} \Xi^2 dx + \int_0^T \int_{D_0} a \Xi_x^2 dx dt + \sigma \int_0^T \int_{D_0} \Xi^2 dx dt \leq \left(C_4 T \|Q\|_{H^1(D_0)} \|Q\|_{L^2(D_0)}\right) \left(\int_0^T \int_{D_0} |\Xi|^2 dx dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

再利用 Young 不等式 $\left(ab \leq \frac{\varepsilon}{2} a^2 + \frac{1}{2\varepsilon} b^2\right)$, 并取 $\varepsilon = \sigma$

$$\frac{1}{2} \int_{D_0} \Xi^2 dx + \int_0^T \int_{D_0} a \Xi_x^2 dx dt + \sigma \int_0^T \int_{D_0} \Xi^2 dx dt \leq \frac{\sigma}{2} \int_0^T \int_{D_0} \Xi^2 dx dt + \frac{C_4^2 T^2}{2\sigma} \|Q\|_{H^1(D_0)}^2 \|Q\|_{L^2(D_0)}^2.$$

移项得

$$\frac{1}{2} \int_{D_0} \Xi^2 dx + \int_0^T \int_{D_0} a \Xi_x^2 dx dt + \frac{\sigma}{2} \int_0^T \int_{D_0} \Xi^2 dx dt \leq \frac{C_4^2 T^2}{2\sigma} \|Q\|_{H^1(D_0)}^2 \|Q\|_{L^2(D_0)}^2.$$

故

$$\frac{1}{2} \int_{D_0} \Xi^2 dx + \int_0^T \int_{D_0} a \Xi_x^2 dx dt \leq \frac{C_4^2 T^2}{2\sigma} \|Q\|_{H^1(D_0)}^2 \|Q\|_{L^2(D_0)}^2.$$

令 $\frac{C_4^2}{2\sigma} = C$, 得

$$\frac{1}{2} \int_{D_0} \Xi^2 dx + \int_0^T \int_{D_0} a \Xi_x^2 dx dt \leq CT^2 \|Q\|_{H^1(D_0)}^2 \|Q\|_{L^2(D_0)}^2,$$

所以有

$$\max_{t \in (0, T]} \int_{D_0} \Xi^2 dx + \int_0^T \int_{D_0} a \Xi_x^2 dx dt \leq CT^2 \|Q\|_{H^1(D_0)}^2 \|Q\|_{L^2(D_0)}^2.$$

定理 3 令 $q_1(x), q_2(x)$ 为最优控制问题 P1 分别对应于 $g_1(x), g_2(x)$ 的极小元. 若存在一点 $x_0 \in D_0$, 使得

$$q_1(x_0) = q_2(x_0),$$

则当 $T \ll 1$ 时, 有

$$\|q_1 - q_2\|_{H^1(D_0)} \leq C \|g_1 - g_2\|_{L^2(D_0)}.$$

证明 在式(12)里, 当 $q = q_1$ 时取 $h = q_2$ 而当 $q = q_2$ 时取 $h = q_1$, 于是有

$$\int_{D_0} (u_1 - g_1) \xi_1 dx + \alpha \int_{D_0} q_{1x} (q_2 - q_1)_x dx \geq 0, \quad (20)$$

$$\int_{D_0} (u_2 - g_2) \xi_2 dx + \alpha \int_{D_0} q_{2x} (q_1 - q_2)_x dx \geq 0. \quad (21)$$

由式(20)~(21)可得

$$\begin{aligned} \alpha \int_{D_0} |(q_1 - q_2)_x|^2 dx &\leq \int_{D_0} (u_1 - g_1) \xi_1 dx + \int_{D_0} (u_2 - g_2) \xi_2 dx \\ &= \int_{D_0} (u_1 - g_1) \xi_1 dx + \int_{D_0} (u_1 - g_1) \xi_2 dx + \int_{D_0} (u_2 - g_2) \xi_2 dx - \int_{D_0} (u_1 - g_1) \xi_2 dx \\ &= \int_{D_0} (u_1 - g_1) (\xi_1 + \xi_2) dx + \int_{D_0} [(u_2 - g_2) - (u_1 - g_1)] dx \\ &= \int_{D_0} (u_1 - g_1) \Xi dx + \int_{D_0} (g_1 - g_2) \xi_2 dx - \int_{D_0} U \xi_2 dx. \end{aligned} \quad (22)$$

由引理 3~5, 存在与 T 无关的常数 C , 使得

$$\|U\|_{L^2(D_0)} \leq C \sqrt{T} \|Q\|_{L^2(D_0)}, \quad \|\xi_2\|_{L^2(D_0)} \leq C \sqrt{T} \|Q\|_{L^2(D_0)}, \quad \|\Xi\|_{L^2(D_0)} \leq CT \|Q\|_{H^1(D_0)} \|Q\|_{L^2(D_0)}.$$

由弱极值原理知, 存在与 T 无关的常数 M_1 , 使得

$$\|u_1 - g_1\|_{L^2(D_0)} \leq \|u_1\|_{L^2(D_0)} + \|g_1\|_{L^2(D_0)} \leq M_1.$$

现对式(22)右端三项进行估计

$$\begin{aligned} \left| \int_{D_0} (u_1 - g_1) \Xi dx \right| &\leq \int_{D_0} |u_1 - g_1| |\Xi| dx \leq \|u_1 - g_1\|_{L^2(D_0)} \|\Xi\|_{L^2(D_0)} \\ &\leq M_1 \left(CT \|Q\|_{H^1(D_0)} \|Q\|_{L^2(D_0)} \right) = C_1 T \|Q\|_{H^1(D_0)} \|Q\|_{L^2(D_0)}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{D_0} (g_1 - g_2) \xi_2 dx \right| &\leq \int_{D_0} |g_1 - g_2| |\xi_2| dx \leq \|g_1 - g_2\|_{L^2(D_0)} \|\xi_2\|_{L^2(D_0)} \\ &\leq \|g_1 - g_2\|_{L^2(D_0)} \left(C \sqrt{T} \|Q\|_{L^2(D_0)} \right) = C_2 \sqrt{T} \|g_1 - g_2\|_{L^2(D_0)} \|Q\|_{L^2(D_0)}, \end{aligned} \quad (24)$$

$$\left| \int_{D_0} U \xi_2 dx \right| \leq \int_{D_0} |U| |\xi_2| dx \leq \|U\|_{L^2(D_0)} \|\xi_2\|_{L^2(D_0)} \leq \left(C \sqrt{T} \|Q\|_{L^2(D_0)} \right) \left(C \sqrt{T} \|Q\|_{L^2(D_0)} \right) = C_3 T \|Q\|_{L^2(D_0)}^2. \quad (25)$$

将式(23)~(25)代入式(22)整理得

$$\alpha \int_{D_0} |(q_1 - q_2)_x|^2 dx \leq C_1 T \|Q\|_{H^1(D_0)} \|Q\|_{L^2(D_0)} + C_2 \sqrt{T} \|g_1 - g_2\|_{L^2(D_0)} \|Q\|_{L^2(D_0)} + C_3 T \|Q\|_{L^2(D_0)}^2. \quad (26)$$

由定理的假设知, 存在一点 $x_0 \in D_0$, 使得 $Q(x_0) = q_1(x_0) - q_2(x_0) = 0$.

由引理 3 得, 存在一个仅依赖于区域 D_0 的常数 $C_p > 0$ 使得

$$\|Q\|_{L^2(D_0)}^2 \leq C_p \|Q_x\|_{L^2(D_0)}^2. \quad (27)$$

由此可得

$$\|Q\|_{H^1(D_0)}^2 = \|Q\|_{L^2(D_0)}^2 + \|Q_x\|_{L^2(D_0)}^2 \leq (C_P + 1) \|Q_x\|_{L^2(D_0)}^2. \quad (28)$$

令 $K = C_P + 1$, 则 $\|Q\|_{H^1(D_0)} \leq \sqrt{K} \|Q_x\|_{L^2(D_0)}$, 且 $\|Q\|_{L^2(D_0)} \leq \sqrt{C_P} \|Q_x\|_{L^2(D_0)}$.

现处理式(26)的右端项

$$\begin{aligned} & C_1 T \|Q\|_{H^1(D_0)} \|Q\|_{L^2(D_0)} + C_2 \sqrt{T} \|g_1 - g_2\|_{L^2(D_0)} \|Q\|_{L^2(D_0)} + C_3 T \|Q\|_{L^2(D_0)}^2 \\ & \leq C_1 T \sqrt{K} \|Q_x\|_{L^2(D_0)} \cdot \sqrt{C_P} \|Q_x\|_{L^2(D_0)} + C_2 \sqrt{T} \|g_1 - g_2\|_{L^2(D_0)} \cdot \sqrt{C_P} \|Q_x\|_{L^2(D_0)} + C_3 T \cdot C_P \|Q_x\|_{L^2(D_0)}^2 \\ & = C_1' T \|Q_x\|_{L^2(D_0)}^2 + C_2 \sqrt{T} \|g_1 - g_2\|_{L^2(D_0)} \cdot \sqrt{C_P} \|Q_x\|_{L^2(D_0)} + C_3' T \|Q_x\|_{L^2(D_0)}^2 \\ & = (C_1' + C_3') T \|Q_x\|_{L^2(D_0)}^2 + C_2' \sqrt{T} \|g_1 - g_2\|_{L^2(D_0)} \|Q_x\|_{L^2(D_0)}, \end{aligned}$$

其中 $C_2' = C_2 \sqrt{C_P}$, 令 $C_1' + C_3' = C_4'$, 则最终得

$$\alpha \|Q_x\|_{L^2(D_0)}^2 \leq C_4' T \|Q_x\|_{L^2(D_0)}^2 + C_2' \sqrt{T} \|g_1 - g_2\|_{L^2(D_0)} \cdot \|Q_x\|_{L^2(D_0)}. \quad (29)$$

将不等式(29)两边同时除以 $\|Q_x\|_{L^2(D_0)}$ (若 $\|Q_x\|_{L^2(D_0)} = 0$, 则定理显然成立)得

$$\alpha \|Q_x\|_{L^2(D_0)} \leq C_4' T \|Q_x\|_{L^2(D_0)} + C_2' \sqrt{T} \|g_1 - g_2\|_{L^2(D_0)}.$$

整理得

$$(\alpha - C_4' T) \|Q_x\|_{L^2(D_0)} \leq C_2' \sqrt{T} \|g_1 - g_2\|_{L^2(D_0)}. \quad (30)$$

现在选择终端时刻 T 足够小, 使得

$$C_4' T \leq \frac{\alpha}{2},$$

则 $\alpha - C_4' T \geq \frac{\alpha}{2} > 0$. 由式(30)得

$$\frac{\alpha}{2} \|Q_x\|_{L^2(D_0)} \leq (\alpha - C_4' T) \|Q_x\|_{L^2(D_0)} \leq C_2' \sqrt{T} \|g_1 - g_2\|_{L^2(D_0)}.$$

两边同时除以 $\frac{\alpha}{2}$, 得

$$\|Q_x\|_{L^2(D_0)} \leq \frac{2C_2'}{\alpha} \sqrt{T} \|g_1 - g_2\|_{L^2(D_0)}.$$

令 $\frac{2C_2'}{\alpha} = C_5$, 则

$$\|Q_x\|_{L^2(D_0)} \leq C_5 \sqrt{T} \|g_1 - g_2\|_{L^2(D_0)}.$$

限制 $\sqrt{T} \leq 1$, 再结合 Poincaré 不等式和式(27)~(28), 得

$$\begin{aligned} \|Q\|_{L^2(D_0)} & \leq \sqrt{C_P} \|Q_x\|_{L^2(D_0)} \leq C_5 \sqrt{C_P} \|g_1 - g_2\|_{L^2(D_0)}, \\ \|Q\|_{H^1(D_0)}^2 & = \|Q\|_{L^2(D_0)}^2 + \|Q_x\|_{L^2(D_0)}^2 \leq C_5^2 C_P \|g_1 - g_2\|_{L^2(D_0)}^2 + C_5^2 \|g_1 - g_2\|_{L^2(D_0)}^2 = C_5^2 (C_P + 1) \|g_1 - g_2\|_{L^2(D_0)}^2. \end{aligned}$$

令 $C = C_5 \sqrt{C_P + 1}$, 即得

$$\|q_1 - q_2\|_{H^1(D_0)} = \|Q\|_{H^1(D_0)} \leq C \|g_1 - g_2\|_{L^2(D_0)}.$$

注 2 定理 3 中条件 $q_1(x_0) = q_2(x_0)$ 在实际反问题中较难验证, 该条件主要用于建立函数 $q = q_1 - q_2$ 的 Poincaré 型估计, 从而实现 $\|q\|_{H^1(D_0)}$ 的控制. 若该条件缺失, 证明过程仅能推导出最优解的 H^1 半模 (即一阶导数的 L^2 模) 估计. 放松该假设条件有两种方式: 一种是假设辐射系数 q 在 x_0 处的先验值为已知, 另一种是将罚项由 $\|q_x\|_{L^2}$ 改为 $\|q\|_{H^1}$.

5 梯度型迭代算法

基于前文证明的唯一性与稳定性结论, 本节设计一种类似于最速下降的优化算法. 算法的核心在于利用第 3 节推导的必要性条件, 通过正问题的解 u 与伴随方程的解 ξ 构造目标泛函 $J(q)$ 的 Gâteaux 导数, 从而实现最优控制问题 $P1$ 的数值求解. 迭代算法步骤如下.

Step 1: 当 $k = 0$ 时, 选择迭代的初始值 $q = q_0(x)$.

Step 2: 求解初边值问题 (8) 得到解 $u_0(x, t)$, 并计算 $u(x, T) = u_0(x, T) - g(x)$.

Step 3: 求解共轭方程 (9), 得到解 $\xi_0(x, T)$.

Step 4: 计算 Gâteaux 导数

$$J'(q) = \int_{D_0} u(x, T) \xi_0(x, T) dx + \alpha \int_{D_0} \nabla q(x) \cdot \nabla \phi_j(x) dx.$$

令 $n_j = J'(q)\phi_j$, $j = 0, 1, 2, \dots, N$. ϕ_j 由下面的网格确定的函数

$$\phi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{h}, & x_0 \leq 0 \leq x_1, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad \phi_j(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{j-1}}{h}, & x_{j-1} \leq x \leq x_j, \\ \frac{x_{j-1} - x}{h}, & x_j \leq x \leq x_{j+1}, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \quad (1 \leq j \leq N-1),$$

$$\phi_N(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{N-1}}{h}, & x_{N-1} \leq 0 \leq x_N, \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

则从第 j 步到第 $j+1$ 步的迭代值可以表示为 $n_0 = \sum_{j=0}^N n_j \phi_j(x)$.

Step 5: 计算第 j 步的范数 $n_0(x)$: $e_0 = \left(h \sum_{j=0}^N n_j^2(x) \right)^{\frac{1}{2}}$, 其中 h 为空间步长.

Step 6: 选择任意小的正常数 δ 作为误差, 由以下步骤判断迭代继续或终止

Step 6.1: 令 $k = 1$.

Step 6.2: 计算误差 $\text{error} := J(q_0(x) + kn_0(x)) - J(q_0(x)) + \frac{1}{2}ke_j^2$.

Step 6.3: 将上述结果与 0 比较: 若 $\text{error} \leq 0$, 继续 Step 6.4, 否则令 $k = \nu k$, 返回 Step 6.2, ν 是一个调整参数.

Step 6.4: 取 $q_1 = q_0(x) + kn_0(x)$, 计算 $\|kn_0(x)\|$, 并与 δ 比较. 若 $\|kn_0(x)\| > \delta$, 则用新的迭代初始值, 继续重复执行 Step 6.2 直到 $\|kn_0(x)\| \leq \delta$, 算法终止.

下面设置数值实验来测试算法的稳定性. 一些基本参数是

$$L = T = 1, \quad \delta = 10^{-4}, \quad a(x) = x + 1, \quad h = \tau = 0.01.$$

算例 取 $q(x) = 2 + x^2$, $u(x, t) = e^{-t}x^2$, 在这种情况下 $f(x, t) = e^{-t}(x^4 + x^2 - 4x - 2)$.

对于不同的迭代次数, 重构结果如图 1 所示. 可看出, 经过 200 次左右的迭代, 辐射系数 $q(x)$ 已得到很好的恢复.

下面引入噪声

$$g^\delta(x) = u^\delta(x, T) = u(x, T)(1 + \delta \times \text{random}(x)).$$

带有 $\delta = 1\%$ 和 $\delta = 3\%$ 噪声的重构结果如图 2 所示. 可以看出, 重建结果同样令人满意, 虽然出现轻微震荡, 但算法还是稳定有效的.

6 结 论

本文在最优控制理论框架下, 系统研究了一类定义在半无界区域上的退化抛物型方程辐射系数反演问题. 通过引入精确的人工边界条件, 成功将原半无界区域上的不适定反问题等价转化为有界区域上的优化

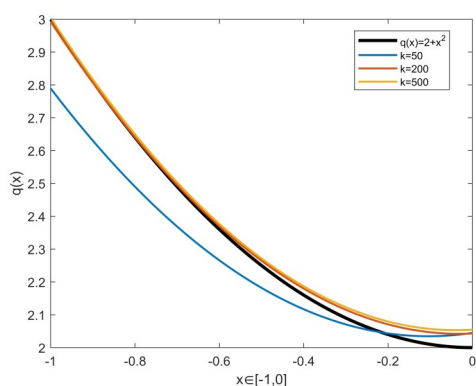


图1 不同迭代次数反演结果

Fig. 1 Inversion results for different iteration numbers

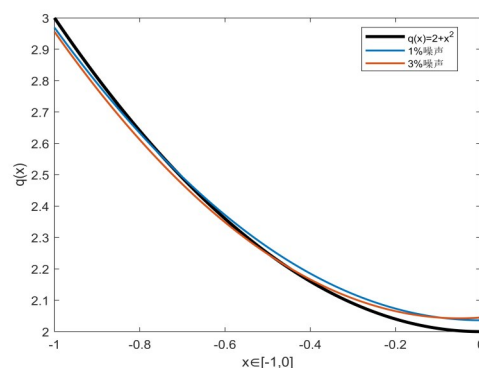


图2 不同噪声水平反演结果

Fig. 2 Inversion results for different noise levels

问题. 基于严格的变分分析, 不仅建立了代价泛函极小值的存在性, 推导了其满足的一阶最优性条件, 还在终端时刻 T 足够小的假设下, 证明了极小元关于观测数据的局部唯一性与稳定性. 设计的梯度型迭代算法在数值实验中表现良好, 即便在含噪声数据下也展现出了较为可靠的收敛特性.

综上所述, 本文为半无界区域上退化抛物型方程辐射系数反演问题提供了一个坚实的理论基础. 研究成果为相关工程领域(如大型构件热传导分析)中的参数识别提供了严格的理论依据. 未来可进一步拓展边界, 研究方程含多类退化项(如同时含空间退化与时间退化)或非线性耦合项为高阶形式时的辐射系数反演问题并将一维模型推广至高维复杂几何区域.

参考文献:

- 姜礼尚, 陈亚浙, 刘西垣, 等, 2007. 数学物理方程讲义[M]. 3版. 北京: 高等教育出版社.
- 刘继军, 2005. 不适定问题的正则化方法及应用[M]. 北京: 科学出版社.
- 陆金甫, 关治, 2004. 偏微分方程数值解法[M]. 2版. 北京: 清华大学出版社.
- 潘坚, 王志焕, 2013. 一类退化抛物型方程解的存在唯一性[J]. 华侨大学学报(自然科学版), 34(1): 112-117.
- 杨柳, 2016. 具奇异或退化性质的二阶抛物型方程的系数反演问题[D]. 兰州: 兰州大学.
- Adams R A, 1981. 索波列夫空间[M]. 叶其孝, 王耀东, 应隆安, 等, 译. 北京: 人民教育出版社.
- Dehghan M, 2001. An inverse problem of finding a source parameter in a semilinear parabolic equation[J]. Appl Math Model, 25(9): 743-754.
- Deng Z C, Yang L, 2014. An inverse problem of identifying the radiative coefficient in a degenerate parabolic equation[J]. Chin Ann Math Ser B, 35(3): 355-382.
- Deng Z C, Yang L, 2022. Unicity of solution for a semi-infinite inverse heat source problem[J]. AIMS Math, 7(4): 7026-7039.
- Deng Z C, Yu J N, Yang L, 2010. An inverse problem arisen in the zero-coupon bond pricing[J]. Nonlinear Anal Real World Appl, 11(3): 1278-1288.
- Egger H, Engl H W, 2005. Tikhonov regularization applied to the inverse problem of option pricing: Convergence analysis and rates[J]. Inverse Probl, 21(3): 1027-1045.
- Ismailov M I, Oğur B, 2016. An inverse diffusion problem with nonlocal boundary conditions[J]. Numerical Methods Partial Differential Eq, 32(2): 564-590.

(责任编辑 冯兆永)