

有限滑移接触问题的平衡元法及严格误差估计*

朱衡绅, 郑启升, 汪利

中山大学航空航天学院, 广东 深圳 518107

摘要: 提出一种基于界面力的平衡有限元方法, 并结合对偶分析理论, 实现有限滑移接触问题的高精度应力求解以及后验误差严格估计。首先, 在有限滑移的框架下推导接触问题的最小余能原理, 并通过引入接触约束(接触力为压力), 将其转化为二次规划问题; 随后, 结合宏单元技术构造一种基于界面力的平衡元并代入接触问题的最小余能原理, 最终获得严格满足平衡方程的高精度平衡应力场。结合该方法所得到的平衡应力场以及有限元的协调位移场, 推导并计算接触问题中的本构关系误差, 证明了该本构关系误差是离散误差的严格上界。最后, 通过典型的多体接触算例对所提方法进行数值验证。结果显示, 所提方法能够保证解的精度、收敛性以及离散误差估计的有效性。

关键词: 有限滑移接触问题; 平衡有限元; 余能原理; 局部搜索算法; 对偶分析

中图分类号: O34 **文献标志码:** A **文章编号:** 2097-0137(2026)04-0075-08

Equilibrium finite element method and strict error estimation for finite-slip contact problems

Zhu Hengshen, Zheng Qisheng, Wang Li

School of Aeronautics and Astronautics, Sun Yat-sen University, Shenzhen 518107, China

Abstract: This paper proposes an interface-traction-based equilibrium finite element method combined with dual analysis theory to achieve high-precision stress solutions and strict a posteriori error estimation for finite sliding contact problems. First, the principle of minimum complementary energy for contact problems is derived within the framework of finite sliding. By introducing contact constraints, the problem is transformed into a quadratic programming problem. Subsequently, an traction-based equilibrium element is constructed using the macro-element technique and substituted into the principle of minimum complementary energy. Consequently, a high-precision equilibrium stress field that strictly satisfies the equilibrium equations is obtained. By combining the equilibrium stress field obtained from this method with the compatible displacement field from standard finite elements, the constitutive relation error (CRE) for contact problems can be derived and calculated. It is proven that this CRE serves as a strict upper bound for the discretization error. Finally, the proposed method is numerically verified through typical multi-body contact benchmarks, demonstrating its effectiveness in terms of solution accuracy, convergence, and discretization error estimation.

Key words: finite-slip contact problem; equilibrium finite element; complementary energy principle; local search algorithm; dual analysis

* 收稿日期: 2025-12-11

录用日期: 2026-01-08

网络首发日期: 2026-04-07

基金项目: 国家重点研发计划(2024YFB2605600); 中山大学研究生创新项目(76200-12253014)

作者简介: 朱衡绅(2000年生), 男; 研究方向: 计算力学; E-mail: zhsshsm@163.com

通信作者: 汪利(1988年生), 男; 研究方向: 计算力学; E-mail: wangli75@mail.sysu.edu.cn

全文阅读



ZR20250258

接触问题在工业领域广泛存在。例如:机械零部件间的传动配合、紧固件的受力分析、航天器的对接(范亚杰等, 2024)等,均涉及复杂的接触行为(Wriggers, 2006;程红梁, 2007)。有限元方法凭借其优异的适应性,已成为求解各类接触问题的核心数值方法(孙林松等, 2001;张宏磊, 2025)。但有限元计算不可避免地存在离散误差,如何评估并控制离散误差,对实际接触分析至关重要。离散误差评估方法主要分为3类:(1)基于残值的误差估计。它能适应于广大线性与非线性问题,缺点是计算代价较高。(2)基于恢复的误差估计。它采用超收敛的应力代替真实应力来估计误差,有效性较好;缺陷是必须依赖超收敛应力点的存在性(Almeida Pereira, 2008;Maunder et al., 1996)。(3)基于本构关系的误差估计(CRE, constitutive relation error)。该误差估计可严格给出离散误差的上界(Ladeveze et al., 1983)。CRE估计其实是经典对偶分析的拓展(Coorevits et al., 2000;Carstensen et al., 1999;Wang et al., 2017),其核心在于引入一对协调的位移场与平衡的应力场(Debonnie et al., 1995),协调的位移场可以通过传统有限元方法直接获得(Ladeveze et al., 1983;Ladeveze et al., 2005)。但平衡的应力场需要严格满足平衡方程,因其构造困难,需要通过平衡有限元法(EFEM, equilibrium finite element method)实现(Moitinho de Almeida et al., 2017;Robinson, 1985)。

Wang et al.(2014, 2015)提出了基于界面力的平衡单元(Traction-based equilibrium element)方法。该方法以单元间的面力作为基本自由度,引入平衡约束构造平衡应力场,最后通过最小余能原理得到平衡应力解。Zheng et al.(2023)将基于界面力的平衡单元方法应用于微小滑移的接触问题,验证了其在特定场景下的有效性。但该方法无法对有限滑移接触问题进行精准分析,难以满足更为普遍、且非线性特征更为显著的有限滑移接触问题的求解。

针对有限滑移接触问题,本文提出一种基于平衡有限元的高精度数值方法。该方法推导了有限滑移条件下接触问题的最小余能原理,引入面力平衡单元构建表达式;再通过点-面模型处理接触边界,将时间增量步转化为带约束的二次规划问题,实现接触状态演化的精准捕捉;同时,计算本构关系误差,为精度控制与自适应计算提供理论支撑。

将该方法应用于含初始间隙的多体有限滑移接触算例,验证了其在收敛性、应力精度及CRE误差界评估方面的有效性与优越性。

1 理论分析

1.1 二维无摩擦接触模型描述

考虑两个弹性体的接触问题,建立如图1所示的接触模型。两个弹性体记为 Ω_1 和 Ω_2 ,共同构成区域 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ 。在接触问题中,可将接触边界分为3个部分:施加位移 $\mathbf{u}_p$ 的Dirichlet边界 Γ_{D1} 、 Γ_{D2} ,施加界面力 $\mathbf{t}_p$ 的Neumann边界 Γ_{N1} 、 Γ_{N2} ,以及可能发生接触的接触边界 $\Gamma_c = \Gamma_{c1} \cup \Gamma_{c2}$ 。此外,载荷包括 Ω 中的体力和Neumann边界上的界面力 $\mathbf{t}_p$,材料的性质由胡克算子 $\mathbf{H}$ 表示。

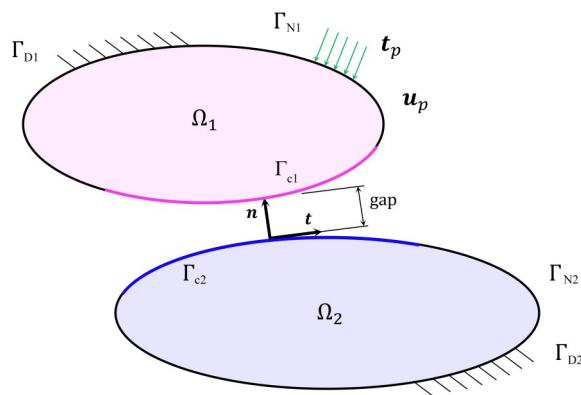


图1 两个弹性体的接触模型

Fig. 1 A contact mechanics model for two deformable elastic bodies

根据 Hertz-Signorini-Moreau 无摩擦接触状态(Wriggers, 2006),在任何情况下两物体间隙 gap_N 始终满足非穿透条件(非侵入条件)(林珊等, 2018),即

$$\text{gap}_N = \text{gap}_0 + (\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2) \cdot \mathbf{n}_2 \geq 0, \quad (1)$$

式中 gap_0 表示两物体间的初始间隙, $(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2)$ 代表接触边界上节点的位移, $\mathbf{n}_2$ 为弹性体 Ω_2 的法向量。同样,在任何情况下法向接触力 p_N 需要满足以下条件(Sewerin et al., 2020):

$$p_N \leq 0, \quad p_N \text{gap}_N = 0. \quad (2)$$

该条件表示,在两物体未发生接触时, $\text{gap}_N > 0, p_N = 0$;两物体完美接触时, $\text{gap}_N = 0, p_N = 0$;两物体发生接触时, $\text{gap}_N = 0, p_N < 0$ 。在优化理论中,式(1)和(2)组成的方程组也被称为KKT条

件,由此可以写出接触问题的控制方程:

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_p, & \text{in } \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \\ \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}_p, & \text{on } \Gamma_N, \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_p, & \text{on } \Gamma_D, \\ \mathcal{L} \mathbf{u} \leq \operatorname{gap}_0, & \text{on } \Gamma_c. \end{cases}$$

1.2 对偶分析用于严格误差估计

在弹性力学中,势能与余能原理互为对偶。若要进行对偶分析,需要一对协调的位移解与平衡的应力解(汪利, 2016),用于实现接触问题的严格误差估计。势能原理的表达式为

$$\min \Pi^p(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} a_u(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - l_p(\mathbf{u}),$$

s.t.

$$\mathcal{L} \mathbf{u} \leq \operatorname{gap}_0, \quad \text{on } \Gamma_c.$$

为了建立余能原理的表达式,先建立基于应力的能量内积表达式

$$a_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau}) = \int_{\Omega} \operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma} \mathbf{H}^{-1} \boldsymbol{\tau}] d\Omega,$$

并给出一个基于应力的平衡方程:

$$\frac{1}{2} a_u(\mathbf{u}, \mathbf{u}) - l_p(\mathbf{u}) = \max_{\boldsymbol{\sigma} \in L^2(\Omega)} \int_{\Omega} \operatorname{tr}[\boldsymbol{\sigma} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})] d\Omega - \int_{\Omega} \operatorname{tr}\left[\frac{1}{2} \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{H}^{-1} \boldsymbol{\sigma}\right] d\Omega.$$

根据泛函的驻值定理(汪利等, 2022),对上述方程中的 $\mathbf{u}$ 进行最小化处理。结合约束条件,可得式(3)接触问题的余能原理表达式,证明过程参考 Zheng et al.(2023)。

$$\begin{aligned} \min_{\boldsymbol{\sigma}, \lambda} \Pi^c(\boldsymbol{\sigma}, \lambda) &:= \frac{1}{2} a_\sigma(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}) - \int_{\Gamma_n} \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{u}_p d\Gamma \\ &- \int_{\Gamma_c} (\lambda \cdot \operatorname{gap}_0) d\Gamma, \end{aligned} \quad (3)$$

s.t.

$$\begin{cases} -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f}_p, & \text{in } \Omega, \\ \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t}_p, & \text{on } \Gamma_N, \\ \lambda \leq 0, \quad \mathbf{n} \boldsymbol{\sigma} = \mathcal{L}^* \lambda, & \text{on } \Gamma_c. \end{cases}$$

同时,通过有限元可以得到接触问题协调的位移解,而平衡元方法可以得到平衡的应力解,凭借一组协调的位移解与平衡的应力解,可以实现严格的误差估计,如式(4)所示。

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_u^2 + \|\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}_h\|_\sigma^2 \leq e_{\text{CRE}}^2[\mathbf{u}_h, (\boldsymbol{\sigma}_h, \lambda_h)],$$

$$e_{\text{CRE}}[\mathbf{u}_h, (\boldsymbol{\sigma}_h, \lambda_h)] :=$$

$$\sqrt{\|\boldsymbol{\sigma}_h - \mathbf{H} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_h)\|_\sigma^2 + 2 \int_{\Gamma_c} \lambda_h (\mathcal{L} \mathbf{u}_h - \operatorname{gap}_0) d\Gamma}, \quad (4)$$

式中 $\mathbf{u}_h$ 为协调的位移解, $(\boldsymbol{\sigma}_h, \lambda_h)$ 为平衡的应力解, $\mathbf{u}, \boldsymbol{\sigma}, \lambda$ 分别为原问题中的真实位移、应力和接触力。 $e_{\text{CRE}}[\mathbf{u}_h, (\boldsymbol{\sigma}_h, \lambda_h)]$ 衡量了本构关系中的不一致性,被称为接触问题中的本构关系误差估计,即接触问题的CRE估计(Zheng et al., 2023),其为有限元或平衡元离散误差的严格上界。

2 基于界面力的平衡元方法用于有限滑移接触问题

2.1 基于界面力的平衡元方法

首先需要重新定义弹性体的网格特征,主要分为节点 i 、单元 e 、边 l ,其中 N, E, B 分别代表节点、单元和边的集合。图2为基于界面力的平衡元示意图,如果有边界上的边 $l \in B_{\text{bou}}$,则其法向量 $\mathbf{n}_l$ 视为该域的外法向量,有 $\eta_l^e = 1$;而对于具有两个相邻单元 e_1, e_2 的边 $l \in B_{\text{in}}$,对应的法向量 $\mathbf{n}_l^{e_1}$ 和 $\mathbf{n}_l^{e_2}$ 彼此相反,即 $\{\eta_l^{e_1}, \eta_l^{e_2}\} = \{-1, 1\}, \eta_l^{e_1} + \eta_l^{e_2} = 0$ 。

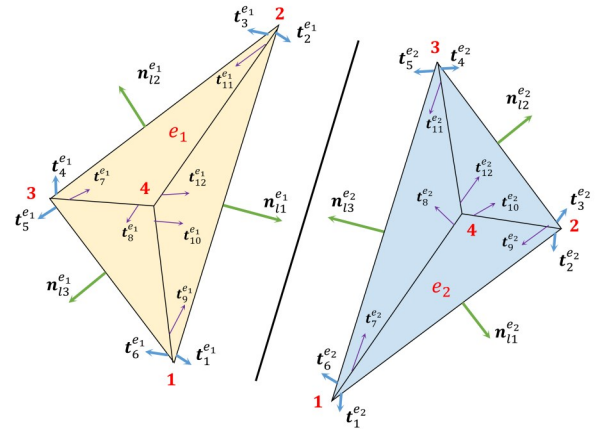


图2 基于界面力的平衡元示意图

Fig. 2 The traction-equilibrium-based element for contact interface discretization

单元边 l 上的面力由边两端上的面力和接触力进行线性插值(Wang et al., 2015):

$$\mathbf{t}_{lh}(\mathbf{x}) = \phi_{l1}(\mathbf{x}) \mathbf{t}_{l2l-1} + \phi_{l2}(\mathbf{x}) \mathbf{t}_{l2l} = \boldsymbol{\Phi}_l \{\mathbf{t}\}_l, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_l, \quad (5)$$

$$\lambda_{lh}(\mathbf{x}) = \phi_{l1}(\mathbf{x}) \lambda_{l2l-1} + \phi_{l2}(\mathbf{x}) \lambda_{l2l}, \quad \mathbf{x} \in \Gamma_l, \quad (6)$$

式中 $\{\mathbf{t}\}_l = [\mathbf{t}_{l2l-1}; \mathbf{t}_{l2l}]$ 代表边 l 两端的面力自由度

(DOFs), $\{\lambda\}_l = [\lambda_{2l-1}; \lambda_{2l}]$ 代表边 l 两端的接触力自由度, $\Phi_l = [\phi_{l1}\mathbf{I}_2; \phi_{l2}\mathbf{I}_2]$ 代表线性插值矩阵, $\mathbf{I}_2$ 代表一个 2×2 的单位矩阵。

对于一个单元 e , 其边 l 上的局部面力可以表示为 $\mathbf{t}_l^e = \eta_l^e \mathbf{t}_h$, 对应的局部自由度为 $\{t\}_l^e = [t_{2l-1}^e, t_{2l}^e]$, 可表示为

$$\{t\}_l^e = \mathbf{T}_l^e \{t\}_l, \mathbf{T}_l^e = \begin{cases} \mathbf{I}_4, & \eta_l^e = 1, \\ \begin{pmatrix} 0 & -\mathbf{I}_2 \\ -\mathbf{I}_2 & 0 \end{pmatrix}, & \eta_l^e = -1. \end{cases}$$

由此, 本方法所涉及的面力自由度、单元内局部面力自由度可表示为

$$\{t\} = [\{t\}_l, l \in \mathcal{B}; \{\lambda\}_l, l \in \mathcal{B}_c],$$

$$\{t\}_{\text{local}}^e = \mathbf{T}^e \{t\}^e, \mathbf{T}^e = \text{diag}(\mathbf{T}_1^e, \mathbf{T}_2^e, \mathbf{T}_3^e).$$

为了满足自平衡条件, 界面力在 x, y 方向的合力及合力矩必须为 0。结合插值公式(5)和(6), 将自平衡条件写为矩阵形式:

$$\mathbf{C}^e \{t\}_{\text{local}}^e = \mathbf{C}^e \mathbf{T}^e \{t\}^e = 0, e \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \mathbf{C} \{t\} = 0, (7)$$

其中 $\mathbf{C}$ 是通过各单元内 $\mathbf{C}^e \mathbf{T}^e$ 组装得到的整体约束矩阵, $\mathbf{C}$ 是一个 3×12 的矩阵, 对应于 3 个平衡约束条件。采用这种方法构造的单元存在虚假位移模态。采用宏单元技术(Macro-element technique)消除虚假位移模态需引入中心点, 将三角形单元进一步划分为 3 个子三角形, 并在每个子三角形中构造线性应力场(Zheng et al., 2023)。通过这种方式, 可以得到无虚假位移模态的平衡单元, 其应力场可由面力自由度插值得到:

$$\sigma_h^e = \Xi_{\text{local}}^e(\mathbf{x}) \{t\}_{\text{local}}^e = \Xi^e(\mathbf{x}) \{t\}^e, (8)$$

其中 $\Xi^e(\mathbf{x}) = \Xi_{\text{local}}^e(\mathbf{x}) \mathbf{T}^e$ 是该单元的应力形函数。

2.2 平衡元方法用于有限滑移接触问题

通过界面力 $\mathbf{t}_h$ 建立了平衡的位移场 σ_h 和接触力 λ_h 之后, 通过面力自由度 $\{t\}$ 来近似表示位移场。结合式(3)和(8)将接触问题的余能原理写为

$$\begin{aligned} \Pi^e(\{t\}) &= \frac{1}{2} a_\sigma(\sigma_h, \sigma_h) \\ &\quad - \int_{\Gamma_0} n \sigma_h u_p d\Gamma - \int_{\Gamma_c} (\lambda_h \cdot \text{gap}_0) d\Gamma \\ &= \sum_{e \in \mathcal{E}} \frac{1}{2} \{t\}^e \mathbf{a}_\sigma(\Xi^e, \Xi^e) \{t\}^e \\ &\quad - \sum_{l \in \mathcal{B}_0} \{t\}_l^e \int_{\Gamma_l} \Phi_l^T u_p d\Gamma \\ &\quad - \sum_{l \in \mathcal{B}_c} \{\lambda\}_l^e \int_{\Gamma_l} \begin{bmatrix} \Phi_{l1} \\ \Phi_{l2} \end{bmatrix} \cdot \text{gap}_0 d\Gamma \\ &= \frac{1}{2} \{t\}^T \mathbf{F} \{t\} - \{t\}^T \{\text{gap}_0\}, \end{aligned} (9)$$

式中 $\mathbf{F}$ 代表柔度矩阵, $\{\text{gap}_0\}$ 代表距离向量, a 代表组装算子, Ξ^e 是式(8)的应力形函数, $\Phi_l^T, \Phi_{l1}, \Phi_{l2}$ 为式(5)和(6)中的形函数。式(9)的余能原理在接触问题中成立, 需要保证构造的应力场是平衡的, 即满足自平衡条件、面力连续性条件(由 2.1 节证明)和面力平衡约束(在式(7)中说明)。

该方法还要求面力满足 Neumann 边界条件, 若 Neumann 边界上的面力 $\mathbf{t}_p$ 在边界上是线性的, 则 $\{t\}_l$ 为该边左右节点的面力; 若 $\mathbf{t}_p$ 是非线性的, 采用式(10)进行线性化处理(Wang et al., 2014)。

$$\{t\}_l = \left[\int_{\Gamma_l} \Phi_l^T \Phi_l d\Gamma \right]^{-1} \int_{\Gamma_l} \Phi_l^T \mathbf{t}_p d\Gamma, l \in \mathcal{B}_N. (10)$$

类似地, 在接触边界上的接触力约束条件表示为

$$\{t\}_l = \mathbf{T}_l^e \{\lambda\}_l, \{\lambda\}_l \leq 0, l \in \mathcal{B}_c. (11)$$

接下来, 采用点-段(NTS, node-to-segment)接触模型(Hallquist et al., 1985; Wang et al., 2025)实现接触约束的施加。该模型对接触界面网格离散几乎没有限制(陈成军等, 2018), 模型如图 3 所示。

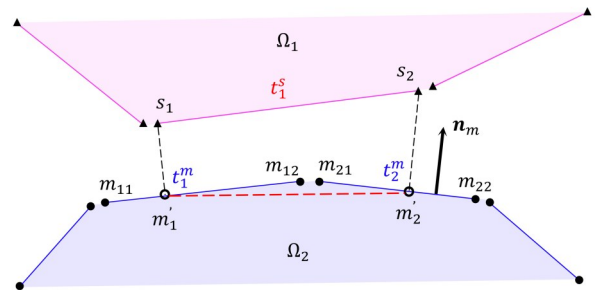


图 3 NTS 接触模型

Fig. 3 NTS-contact model

图 3 中, 有两个弹性体 Ω_1 和 Ω_2 。令 Ω_1 为从属体, Ω_2 为主控制体; 对应地, 从属体的 Γ_e 为主面, 主控体的 Γ_c 为从面。在基于界面力的平衡单元中, 建立接触面力平衡约束:

$$\int_{s_1}^{s_2} t_1^s d\tau = \int_{m_{11}}^{m_{12}} t_1^m d\tau + \int_{m_{21}}^{m_{22}} t_2^m d\tau, (12)$$

式中 t_1^s, t_1^m, t_2^m 分别是边 $s_1 s_2, m_{11} m_{12}, m_{21} m_{22}$ 上的面力。该接触力的平衡约束可写为

$$\mathbf{D} \{t\} = 0.$$

于是, 式(11)和接触力的平衡约束可统一为

$$\hat{\mathbf{C}} \{t\} = 0,$$

其中 $\hat{C} = \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix}$.

为了进行距离计算, 给出 gap_N 的表达式, 用于接触状态的判断。以点 s_1 与线段 $m_{11}m_{12}$ 为例,

$$\text{gap}_N = [s_1 - (1 - \xi)m_{11} - \xi m_{12}] \mathbf{n},$$

$$\xi = \frac{1}{l} (s_1 - m_{11})(m_{12} - m_{11}),$$

式中 l 为主面线段 $m_{11}m_{12}$ 的长度, $\mathbf{n}$ 为该线段的外法向量。在迭代过程中, 点 s 、 m 和 g 应使用状态量 $\hat{s}$ 、 $\hat{m}$ 和 $\hat{g}$ 表示, 距离函数在 NTS 模型中的表达式为

$$\widehat{\text{gap}}_N = \widehat{\text{gap}}_0,$$

$$-[\hat{n} \quad -(1 - \xi)\hat{n} \quad -\xi\hat{n}][\hat{s}_1 \quad \hat{m}_1 \quad \hat{m}_2]^T \geq 0.$$

综上, 用于有限滑移接触问题的平衡元方法是式(13)所示的二次规划问题:

$$\min_{\{t\}} \Pi^c\{t\} = \frac{1}{2} \{t\}^T \mathbf{F} \{t\} - \{t\}^T \{\widehat{\text{gap}}_N\}, \quad (13)$$

s.t.

$$\begin{cases} \{t\}_l = \{t_p\}_l, & l \in \mathcal{B}_N, \\ C\{t\} = 0, \quad \{t\}_l = \mathbf{T}_l^c \{\lambda\}_l, \quad \{\lambda\}_l \leq 0, \\ (\mathbf{M}^m - \mathbf{M}^s)\{t\}_l = 0, & l \in \mathcal{B}_c, \end{cases}$$

式中 $\mathbf{M}^m$ 和 $\mathbf{M}^s$ 来源于式(12)中面力平衡约束的积分。对于直段的线性插值, 采用了三点高斯求积。若将问题拓展到非零体力的情况, 可将接触边界上的约束条件和距离函数改为如下形式:

$$\{t\}_l = \mathbf{T}_l^c \{\lambda\}_l - \{t_0\}_l, \quad \{\lambda\}_l \leq 0, \quad l \in \mathcal{B}_c.$$

$$\begin{aligned} \{\widehat{\text{gap}}_N\} &= \mathcal{A} \int_{l \in \mathcal{B}_0} \int_{\Gamma_l} \Phi^T \mathbf{u}_p d\Gamma, \\ &+ \mathcal{A} \int_{l \in \mathcal{B}_c} \int_{\Gamma_l} \left(\begin{bmatrix} \phi_{l1} \\ \phi_{l2} \end{bmatrix} \cdot \text{gap}_0 \right) d\Gamma - \mathcal{A} a_\sigma(\Xi^e, \sigma_0), \end{aligned}$$

其证明过程见 Zheng et al.(2023)。

2.3 算法框架

求解式(13), 可以得到当前步下的应力解, 再通过简单的后处理就可以得到接触边界上的位移, 最后进行接触的搜索以及接触约束的更新。本文方法的流程如图4所示。

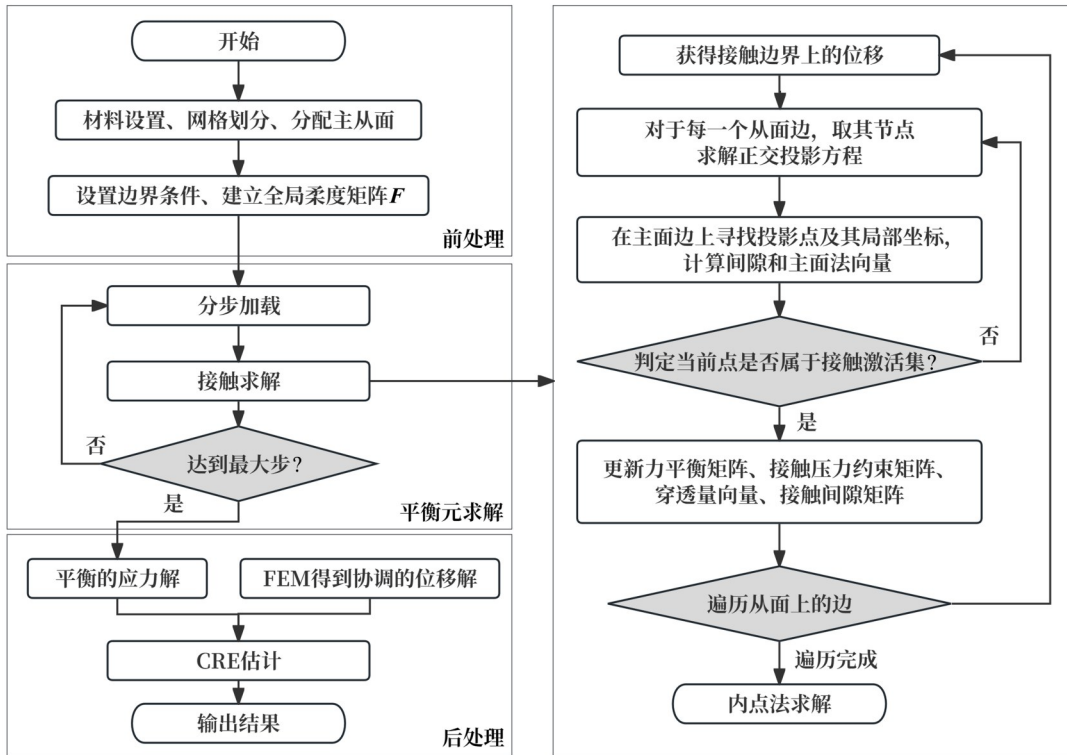


图4 平衡元法的程序框架

Fig. 4 Program framework of the equilibrium element method

3 数值算例

如图 5 所示,建立带有初始间隙的两悬臂梁接触模型。模型由两个矩形悬臂梁组成,尺寸均为 4×1 ,分别固定在左侧与右侧边界。上梁 Ω_1 在顶部受均布载荷 $t_p = 1$,上梁 Ω_1 与下梁 Ω_2 之间存在初始间隙 $\text{gap}_0 = 0.1$,主要坐标包括: $A(1.1, 0)$ 、 $A'(1.1, 3.5)$ 、 $B(1.1, 4)$ 、 $C(1, 2)$ 、 $D(1, 6)$ 、 $E(0, 6)$ 。上梁的杨氏模量 $E_1 = 100 \text{ Pa}$,下梁的杨氏模量 $E_2 = 400 \text{ Pa}$,上下梁的泊松比均为 0.3。为了消除物理量纲差异导致的矩阵病态问题,提高数值计算的稳定性,本算例对物理量采用了无量纲处理(王勘成, 2003)。

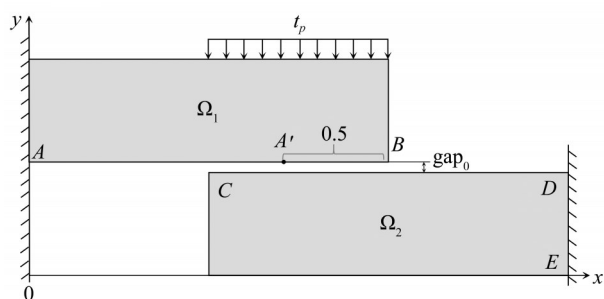


图 5 两悬臂梁接触模型

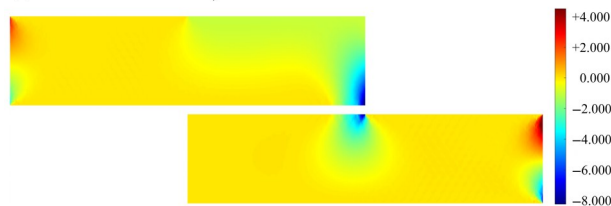
Fig. 5 Contact model of two cantilever beams

对该问题进行网格划分,采用的是线性三角形单元,网格尺寸 h 分别为 1、1/2、1/4、1/8、1/16。结合载荷情况,设置可能的接触面;将 AB 设为从面, CD 设为主面,载荷 t_p 分为 10 步加载。

图 6 展示了网格尺寸为 1/16 时的 EFEM 应力

解,包括水平方向应力、垂直方向应力以及剪应力。在非常精细的网格下使用 ABAQUS 求解相同的模型,输出垂直方向的应力。对比本文方法与 ABAQUS 参考应力解,发现两者的应力集中和分布模式一致。

(a) EFEM 的竖向应力 $\sigma_y (h=1/16)$



(b) ABAQUS 参考的竖向应力 $\sigma_y (h=1/16)$

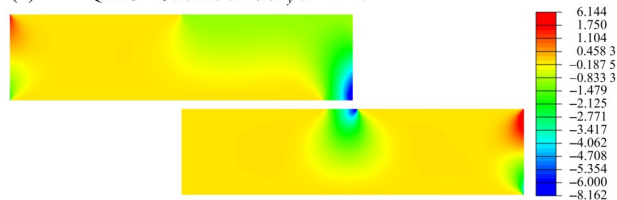


图 6 应力分布

Fig. 6 Stress distributions

上梁边界 $A'B$ 上的接触力,如图 7 所示。从图 7 可知,两者的接触力变化十分吻合,且本文方法的应力解所呈现的接触力是不连续的。这种应力的不连续性是合理的,因为该方法的应力场只需要满足平衡约束,并不要求具有 C^0 连续性(Wang et al., 2014, 2015)。因此,上述结论验证了本文方法在解决有限滑移接触问题上的有效性。

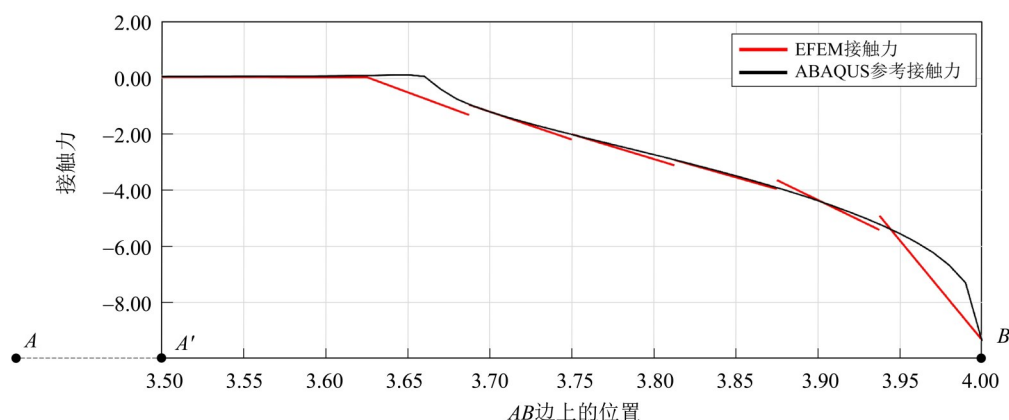


图 7 EFEM 和 ABAQUS 参考解的接触力

Fig. 7 The contact forces obtained from EFEM and the reference solution of ABAQUS

为了量化本文方法的准确性和收敛性,提取下梁 Ω_2 右边界的竖直合力 $I_1 = \int_{DE} t_y d\tau$ 和 B 点的接触

力 $\lambda(B)$,与 ABAQUS 参考解进行比较并计算误差。此时的参考解是通过 ABAQUS 使用非常精细的网格获得,不同网格的竖直合力 I_1 、接触力 $\lambda(B)$ 、应变

能 E 、竖直合力误差 e_{I_1} 、接触力误差 $e_{\lambda(B)}$ 、应变能误差 e_E 和本构关系误差 e_{CRE} 汇总于表 1。其中,应变能的

表达式为

$$E = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}_h : \mathbf{H}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}_h \, \mathrm{d}\Omega.$$

表 1 不同网格的 I_1 、 $\lambda(B)$ 、 E 、 e_{I_1} 、 $e_{\lambda(B)}$ 、 e_E 以及 e_{CRE}

Table 1 I_1 , $\lambda(B)$, E , e_{I_1} , $e_{\lambda(B)}$, and e_{CRE} under different mesh refinements

h	I_1	e_{I_1}	$\lambda(B)$	$e_{\lambda(B)}$	E	e_E	e_{CRE}
1	1.359	0.113	-2.717	6.691	0.106	0.086	0.455
1/2	1.278	0.032	-5.111	4.298	0.149	0.043	0.324
1/4	1.259	0.014	-7.376	2.032	0.175	0.017	0.196
1/8	1.253	0.008	-8.361	1.047	0.188	0.004	0.102

图 8 为竖直合力、接触力、应变能误差和本构关系误差曲线。结果表明,随着自由度的逐步增加,计算误差呈显著下降的趋势,验证了本文方法的收敛性与稳定性。对误差收敛率进行分析,发现对应的误差收敛阶数分别为 1.282、0.911。

以 ABAQUS 在精细网格下的应变能为参考,可以发现:随着自由度的逐步增加,应变能误差逐渐减小,收敛阶数约为 1.5。表 1 展示了不同网格下的离散误差的严格上界。随着网格的细化,有限元解和本文 EFEM 解的离散误差逐渐减小,在更小的网格下两者都能获取更准确的结果。如图 8 所示,本构关系误差的收敛阶数约为 0.8。

4 结 论

本文提出了一种求解有限滑移接触问题的面力平衡元法。以面力作为基本自由度,不仅可以方便地处理接触约束,而且该方法在计算应力时有较高的精度和收敛性。因此,本文的方法可以获得有限滑移接触问题的平衡应力解,将之与传统有限元的协调位移解相结合,可以通过对偶分析直接得到

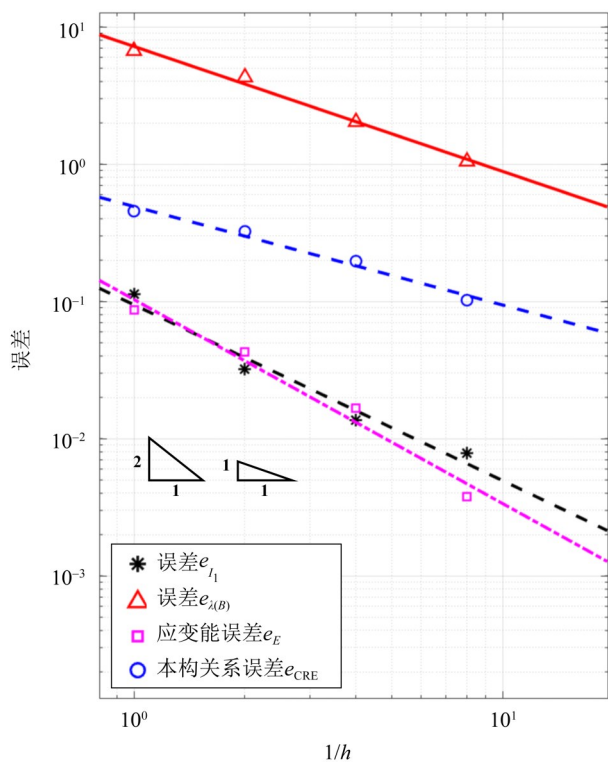


图 8 各类误差随网格尺寸的变化

Fig. 8 Variation of various errors with mesh size

离散误差的严格上界,并指导自适应网格加密。

参考文献:

陈成军, 陈小伟, 柳明, 2018. 接触-碰撞算法研究进展[J]. 计算力学学报, 35(3): 261-274.

程红梁, 2007. 接触碰撞问题的算法研究[D]. 南京: 南京航空航天大学.

范亚杰, 李燕, 李中潘, 等, 2024. 接触与大变形问题的光滑有限元分析[J]. 应用数学和力学, 45(2): 127-143.

林姗, 李春光, 孙冠华, 等, 2018. 二维接触问题的互补算法及工程应用[J]. 岩土力学, 39(10): 3863-3874.

孙林松, 王德信, 2001. 接触问题有限元分析方法综述[J]. 水利水电科技进展, (3): 18-20, 68.

王勖成, 2003. 有限单元法[M]. 北京: 清华大学出版社.

汪利, 2016. 对偶分析: 基本理论及其在结构分析中的应用[D]. 北京: 清华大学.

汪利, 刘祚秋, 吕中荣, 2022. 有限单元法[M]. 广州: 中山大学出版社.

张宏磊, 2025. 弹塑性接触有限元计算及软件开发[D]. 长

- 春: 吉林大学.
- Almeida Pereira O J B, 2008. Hybrid equilibrium hexahedral elements and super-elements [J]. *Commun Numer Meth Engng*, 24(2): 157–165.
- Carstensen C, Scherf O, Wriggers P, 1999. Adaptive finite elements for elastic bodies in contact [J]. *SIAM J Sci Comput*, 20(5): 1605–1626.
- Coorevits P, Hild P, Pelle J P, 2000. A posteriori error estimation for unilateral contact with matching and non-matching meshes [J]. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 186(1): 65–83.
- Debongnie J F, Zhong H G, Beckers P, 1995. Dual analysis with general boundary conditions [J]. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 122(1/2): 183–192.
- Hallquist J O, Goudreau G L, Benson D J, 1985. Sliding interfaces with contact–impact in large–scale Lagrangian computations [J]. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 51(1/2/3): 107–137.
- Ladeveze P, Leguillon D, 1983. Error estimate procedure in the finite element method and applications [J]. *SIAM J Numer Anal*, 20(3): 485–509.
- Ladeveze P, Pelle J P, 2005. *Mastering calculations in linear and nonlinear mechanics* [M]. New York, USA: Springer.
- Maunder E A W, de Almeida J P M, Ramsay A C A, 1996. A general formulation of equilibrium macro–elements with control of spurious kinematic modes: The exorcism of an old curse [J]. *Int J Numer Meth Eng*, 39(18): 3175–3194.
- Moitinho de Almeida J P, Maunder E A W, 2017. *Equilibrium Finite Element Formulations* [M]. John Wiley & Sons Ltd.
- Robinson J, 1985. The mode–amplitude technique and hierarchical stress elements—a simplified and natural approach [J]. *Int J Numer Meth Eng*, 21(3): 487–507.
- Sewerin F, Papadopoulos P, 2020. On the finite element solution of frictionless contact problems using an exact penalty approach [J]. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 368: 113108.
- Wang B, Bai J, Lu S, et al, 2025. An open source MATLAB solver for contact finite element analysis [J]. *Adv Eng Software*, 199: 103798.
- Wang L, Zhong H, 2014. A traction–based equilibrium finite element free from spurious kinematic modes for linear elasticity problems [J]. *Int J Numer Meth Eng*, 99(10): 763–788.
- Wang L, Zhong H, 2015. Stable linear traction–based equilibrium elements for elastostatics: Direct access to linear statically admissible stresses and quadratic kinematically admissible displacements for dual analysis [J]. *Int J Numer Meth Eng*, 101(12): 887–932.
- Wang L, Zhong H, 2017. Upper and lower bounds on quantities of interest for contact problems [J]. *Comput Meth Appl Mech Eng*, 317: 817–835.
- Wriggers P, 2006. *Computational contact mechanics* [M]. Berlin, Heidelberg: Springer.
- Zheng Q, Liu J, Wang L, 2023. An equilibrium finite element method for contact problem with application to strict error estimation [J]. *Comput Mech*, 71(1): 55–70.

(责任编辑 王海蓉)