

全涂层介质内部反散射的传输特征值问题*

丁慧慧, 刘立汉

重庆师范大学数学科学学院, 重庆 401331

摘要: 研究具有全涂层边界条件的非均匀介质内部反散射的传输特征值问题. 首先建立四阶非线性传输特征值问题, 其次提出了一个带有辅助变量的等效混合公式, 将非线性特征值问题转化为线性特征值问题, 再利用 Riesz 表示定理、Rellich 紧性定理构造恰当的算子, 并利用 Brezzi 理论、柯西收敛准则、Poincaré 不等式证明算子的紧性和强制性. 然后进行有限元离散化, 证明了在凸域和非凸域上传输特征值的最优收敛速率, 并且得到一个稀疏的广义特征值问题, 通过压缩几乎所有具有巨大多重数的 ∞ 特征值, 在不恶化稀疏性的情况下, 显著减小了矩阵大小.

关键词: 反散射; 传输特征值; 有限元方法; 广义特征值

中图分类号: O29 文献标志码: A 文章编号: 2097-0137(XXXX)XX-0001-10

Transmission eigenvalue problem of internal inverse scattering for fully coated media

DING Huihui, LIU Lihan

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing 401331, China

Abstract: Transmission eigenvalue problem of internal inverse scattering in inhomogeneous media with fully coated boundary conditions is investigated. First, a fourth-order nonlinear transmission eigenvalue problem is established. Second, an equivalent mixed formulation with auxiliary variables is proposed to transform the nonlinear problem into a linear eigenvalue problem. Appropriate operators are constructed using the Riesz representation theorem and the Rellich compactness theorem. Then, the compactness and coerciveness of operators are proven through the Brezzi theory, Cauchy convergence criterion, and Poincaré inequality. Subsequently, finite element discretization is performed. It is demonstrated that optimal convergence rates for transmission eigenvalues can be achieved on both convex and non-convex domains. A sparse generalized eigenvalue problem is derived, which significantly reduces matrix size by compressing nearly all ∞ eigenvalues with huge multiplicities while preserving sparsity.

Key words: inverse scattering; transmission eigenvalue; finite element method; generalized eigenvalue

传输特征值问题是反散射理论中的核心问题之一. 由于传输特征值携带了有关散射物体材料性质的一些重要信息 (Giorgi et al., 2012; Peters et al., 2016), 因此该问题在无损检测、医学成像和地球物理勘探等领

* 收稿日期: 2025-06-13

录用日期: 2025-11-21

网络首发日期: XXXX-XX-XX

基金项目: 国家自然科学基金 (12001075); 重庆市自然科学基金 (cstc2020jcyj-msxmX0167); 重庆市教育委员会科学技术研究计划项目重点项目 (KJZD-K202300506; KJZD-K2021000503);
重庆市留学人员回国创业创新支持计划项目 (cx2021061; cx2019022);
重庆市巴渝学者计划 (BYQNCS2020002); 重庆市高校创新研究群体项目 (CXQT20014)

作者简介: 丁慧慧 (2000 年生), 女; 研究方向: 偏微分方程反问题; E-mail: 1431389417@qq.com

通信作者: 刘立汉 (1987 年生), 男; 研究方向: 偏微分方程反问题; E-mail: 20132130@cqnu.edu.cn

全文阅读



ZR20250105

域具有重要应用. 在现有的声波和电磁波反散射问题研究中, 关于传输特征值问题的研究主要集中在证明传输特征值存在性(Cakoni et al., 2010)以及其至多形成一个离散集(Colton et al., 2007)和计算传输特征值.

关于传输特征值的数值计算方法主要有如下方法: 远场数据法(Cakoni et al., 2001); 谱方法(An et al., 2014); 内外对偶法(Lechleiter et al., 2015); 有限元方法(Argyris 元、连续有限元和混合有限元)(Colton et al., 2016); 多级修正方法(Xie et al., 2017); 基本解法(Kleefeid et al., 2018); Gong et al.(2020)将各向异性介质的传输特征值问题表述为全纯 Fredholm 算子函数的特征值问题, 利用拉格朗日有限元进行离散化; 一致性有限元方法(Li et al., 2023); Liu et al.(2023)通过引入辅助变量和有限元离散化有效解决了各向异性介质的 Helmholtz 方程的传输特征值问题.

对于具有部分涂层边界的传输特征值问题, Harris(2019)研究了具有部分涂层边界的介质的两种传输特征值问题, 证明了无限个实特征值的存在性. 然而, 关于全涂层内部反散射的传输特征值问题还未得到解决, 本文针对该问题展开研究.

1 传输特征值问题

1.1 数学模型

在本文中, 主要考虑以下传输特征值问题:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{A} \nabla w + k^2 n w = 0, & \text{在 } \mathbb{R}^d \setminus \bar{D} \text{ 中,} \\ \Delta v + k^2 v = 0, & \text{在 } \mathbb{R}^d \setminus \bar{D} \text{ 中,} \\ w - \left(v + i\eta \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) = 0, & \text{在 } \partial D \text{ 上,} \\ \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}_A} - \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0, & \text{在 } \partial D \text{ 上,} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - i k w \right) = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - i k v \right) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $D \in \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$ 是一个具有 Lipschitz 边界 ∂D 的单连通有界区域, $\boldsymbol{\nu}$ 是 ∂D 的单位外法向量, 折射率矩阵 $\mathbf{A}(x) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ 是对称正定的, 折射率 $n(x) > 0$ 是有界的, 表面电导率 $\eta = \eta(x) \in C(\bar{\partial D})$ 满足所有 $x \in \partial D$ 有 $\eta(x) \geq \eta_0 > 0$, η_0 是一个正常数. 此外, 假设在 $\mathbb{R}^d \setminus B_R$ 中 $\mathbf{A} \equiv I$, $n \equiv 1$, 并且它与 D 中的介质具有相同的波数, 其中 B_R 是一个以原点为中心, 以 R 为半径的大球, 包含 \bar{D} .

定义 1 若传输特征值问题(1)有非平凡解 w 和 v , 那么 k 的值被称为外部传输特征值.

1.2 重建传输特征值的四阶公式

首先引入一个足够大的人工边界 B_R , 是一个以原点为中心, 以 R 为半径的球, 包含 \bar{D} , 将外部传输特征值问题重写为有界域 $B_R \setminus \bar{D}$ 中的等效问题. 即寻找 $w, v \in H^1(B_R \setminus \bar{D})$ 满足

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{A} \nabla w + k^2 n w = 0, & \text{在 } B_R \setminus \bar{D} \text{ 中,} \\ \Delta v + k^2 v = 0, & \text{在 } B_R \setminus \bar{D} \text{ 中,} \\ w - \left(v + i\eta \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} \right) = 0, & \text{在 } \partial D \text{ 上,} \\ \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}_A} - \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = 0, & \text{在 } \partial D \text{ 上,} \\ \frac{\partial w}{\partial \boldsymbol{\nu}} = T_k w, & \text{在 } \partial B_R \text{ 上,} \\ \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\nu}} = T_k v, & \text{在 } \partial B_R \text{ 上,} \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{\partial w}{\partial r} - i k w \right) = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{d-1}{2}} \left(\frac{\partial v}{\partial r} - i k v \right) = 0, \end{cases} \quad (2)$$

其中 $T_k: H^{\frac{1}{2}}(\partial B_R) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial B_R)$ 是外部 Dirichlet-to-Neumann 算子 (Cakoni et al., 2014a, 2014b), 且在上述文献中已经证明 Dirichlet-to-Neumann 算子是有界线性算子.

本文的核心思想是通过引入辅助变量, 然后将问题(2)改写为四阶微分方程的特征值问题. 取 $w, v \in H^1(B_R \setminus \bar{D})$ 满足问题(2), 对变量进行以下替换

$$\mathbf{W} = A \nabla w \in L^2(B_R \setminus \bar{D})^2, \quad \mathbf{V} = \nabla v \in L^2(B_R \setminus \bar{D})^2.$$

假设 A^{-1} 存在且有界, 那么 $\nabla w = A^{-1} \mathbf{W}$. 分别对问题(2)中第一个和第二个式子作用 ∇ , 可得

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{W}) + k^2 A^{-1} \mathbf{W} = 0, \quad \text{在 } B_R \setminus \bar{D} \text{ 中}, \quad (3)$$

$$\nabla(\nabla \cdot \mathbf{V}) + k^2 \mathbf{V} = 0, \quad \text{在 } B_R \setminus \bar{D} \text{ 中}. \quad (4)$$

引入辅助变量 $\tilde{\mathbf{u}} := A \nabla w - \nabla v$ 和 $\lambda = k^2$, 假设 $(A^{-1} - I)^{-1}$ 存在, 可得

$$(\nabla \nabla \cdot + k^2 A^{-1})(A^{-1} - I)^{-1}(\nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + k^2 \tilde{\mathbf{u}}) = 0, \quad \text{在 } B_R \setminus \bar{D} \text{ 中}.$$

由问题(2)中第一个边界条件可得

$$\nabla \cdot (\mathbf{W} - \mathbf{V}) = \nabla \cdot (A \nabla w) - \nabla \cdot (\nabla v) = -k^2 w + k^2 v = -k^2 i \eta \frac{\partial v}{\partial \nu}, \quad \text{在 } \partial D \text{ 上}.$$

由问题(2)中第二个边界条件可以得出在 ∂D 上有 $\nu \cdot \mathbf{W} = \nu \cdot \mathbf{V}$.

引入 Sobolev 空间 $H(\operatorname{div}, B_R \setminus \bar{D}) := \left\{ \mathbf{u} \in L^2(B_R \setminus \bar{D})^2 : \nabla \cdot \mathbf{u} \in L^2(B_R \setminus \bar{D}) \right\}$,

$$H_0(\operatorname{div}, B_R \setminus \bar{D}) := \left\{ \mathbf{u} \in H(\operatorname{div}, B_R \setminus \bar{D}) : \nu \cdot \mathbf{u} = 0 \text{ on } \partial D \right\}.$$

对于 $(\phi, \varphi) \in H^1(B_R \setminus \bar{D}) \times H(\operatorname{div}, B_R \setminus \bar{D})$ 有

$$\int_{B_R \setminus \bar{D}} \phi \operatorname{div} \varphi \, dx + \int_{B_R \setminus \bar{D}} \nabla \phi \cdot \varphi \, dx = \int_{\partial(B_R \setminus \bar{D})} \phi \varphi \cdot \nu \, ds.$$

由于 $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{W} - \mathbf{V}$, 可以将问题(2)改写为存在一个 $\tilde{\mathbf{u}} \in H_0(\operatorname{div}, B_R \setminus \bar{D})$ 且满足下面四阶方程的等价特征值问题:

$$\begin{cases} (\nabla \nabla \cdot + k^2 A^{-1})(A^{-1} - I)^{-1}(\nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + k^2 \tilde{\mathbf{u}}) = 0, & \text{在 } B_R \setminus \bar{D} \text{ 中}, \\ \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} = -k^2 i \eta \frac{\partial v}{\partial \nu}, & \text{在 } \partial D \text{ 上}. \end{cases} \quad (5)$$

用式(3)减去式(4)得

$$\mathbf{W} = -\frac{1}{k^2} (A^{-1} - I)^{-1} (\nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + k^2 \tilde{\mathbf{u}}), \quad \mathbf{V} = -\frac{1}{k^2} (A^{-1} - I)^{-1} (\nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + k^2 A^{-1} \tilde{\mathbf{u}}).$$

1.3 传输特征值的变分形式

用函数 $\bar{\varphi} \in H_0(\operatorname{div}, B_R \setminus \bar{D})$ 去乘四阶方程, 并利用问题(5)和边界条件 $\nu \cdot \bar{\varphi}|_{\partial D} = 0$ 可以推出

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{B_R \setminus \bar{D}} \left[(\nabla \nabla \cdot + k^2 A^{-1})(A^{-1} - I)^{-1} (\nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + k^2 \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\varphi} \right] dx \\ &= \int_{B_R \setminus \bar{D}} (A^{-1} - I)^{-1} (\nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + k^2 \tilde{\mathbf{u}}) \cdot (k^2 A^{-1} \bar{\varphi}) \, dx + \int_{B_R \setminus \bar{D}} \left[\nabla \nabla \cdot (A^{-1} - I)^{-1} (\nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + k^2 \tilde{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\varphi} \right] dx \\ &= \int_{B_R \setminus \bar{D}} (A^{-1} - I)^{-1} (\nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + k^2 \tilde{\mathbf{u}}) \cdot (k^2 A^{-1} \bar{\varphi}) \, dx - \int_{B_R \setminus \bar{D}} \left[\nabla \cdot (A^{-1} - I)^{-1} (\nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + k^2 \tilde{\mathbf{u}}) (\nabla \cdot \bar{\varphi}) \right] dx \\ &\quad + \int_{\partial B_R} \left[\nabla \cdot (A^{-1} - I)^{-1} (\nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + k^2 \tilde{\mathbf{u}}) \right] (\nu \cdot \bar{\varphi}) \, ds - \int_{\partial \bar{D}} \left[\nabla \cdot (A^{-1} - I)^{-1} (\nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + k^2 \tilde{\mathbf{u}}) \right] (\nu \cdot \bar{\varphi}) \, ds \\ &= \int_{B_R \setminus \bar{D}} (A^{-1} - I)^{-1} (\nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + k^2 \tilde{\mathbf{u}}) \cdot (\nabla \nabla \cdot \bar{\varphi}) \, dx + \int_{B_R \setminus \bar{D}} (A^{-1} - I)^{-1} (\nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + k^2 \tilde{\mathbf{u}}) \cdot (k^2 A^{-1} \bar{\varphi}) \, dx \\ &\quad - \int_{\partial B_R} \left[(A^{-1} - I)^{-1} (\nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + k^2 \tilde{\mathbf{u}}) (\nabla \cdot \bar{\varphi}) \right] \cdot \nu \, ds + \int_{\partial \bar{D}} \left[(A^{-1} - I)^{-1} (\nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + k^2 \tilde{\mathbf{u}}) (\nabla \cdot \bar{\varphi}) \right] \cdot \nu \, ds \\ &= \int_{B_R \setminus \bar{D}} (A^{-1} - I)^{-1} (\nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + k^2 \tilde{\mathbf{u}}) \cdot (k^2 A^{-1} \bar{\varphi} + \nabla \nabla \cdot \bar{\varphi}) \, dx + k^2 \int_{\partial B_R} (\nu \cdot \mathbf{W}) (\nabla \cdot \bar{\varphi}) \, ds - k^2 \int_{\partial \bar{D}} (\nu \cdot \mathbf{W}) (\nabla \cdot \bar{\varphi}) \, ds. \end{aligned}$$

根据 Sommerfeld 辐射条件可以得出

$$0 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left| \frac{\partial w}{\partial r} - ikw \right|^2 ds = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} \left(\left| \frac{\partial w}{\partial r} \right|^2 + k^2 |w|^2 - 2k \operatorname{Im} \left(\bar{w} \frac{\partial w}{\partial r} \right) \right) ds.$$

根据格林公式以及问题(2)中的第二个式子可以得出

$$\operatorname{Im} \int_{\partial B_R} \bar{w} \frac{\partial w}{\partial r} ds = 0.$$

由此可以推出

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\partial B_R} |w|^2 ds = 0.$$

所以应用 Rellich 定理可以得出 $w = 0$ 在 $\mathbb{R}^d \setminus \bar{D}$ 上.

由问题(5)中的第二个式子和第二个边界条件可得

$$\int_{\partial D} (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{W})(\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\varphi}}) ds = \int_{\partial D} (\boldsymbol{\nu} \cdot \mathbf{V})(\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\varphi}}) ds = \int_{\partial D} \left(\frac{i}{k^2 \boldsymbol{\eta}} \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} \right) (\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\varphi}}) ds.$$

因此,原问题的变分形式如下:找到 $\tilde{\mathbf{u}} \in H_0(\operatorname{div}, B_R \setminus \bar{D})$ 使

$$\int_{B_R \setminus \bar{D}} (\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I})^{-1} (\nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + k^2 \tilde{\mathbf{u}}) (\nabla \nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\varphi}} + k^2 \mathbf{A}^{-1} \bar{\boldsymbol{\varphi}}) dx - \frac{i}{\boldsymbol{\eta}} \int_{\partial D} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}) (\nabla \cdot \bar{\boldsymbol{\varphi}}) ds = 0. \quad (6)$$

设矩阵是 $\mathbf{A}(x) \in \mathbb{R}^{d \times d}$ 正定的,其矩阵范数定义为 $\|\mathbf{A}\| = \sup_{\boldsymbol{\xi} \neq 0} \|\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}\|_2 / \|\boldsymbol{\xi}\|_2$, 其中 $\|\cdot\|_2$ 表示向量的 l^2 范数.

相应地 \mathbf{A}^{-1} 的范数定义为

$$\|\mathbf{A}^{-1}\| = \frac{1}{\inf_{\boldsymbol{\xi} \neq 0} \frac{\|\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}\|_2}{\|\boldsymbol{\xi}\|_2}}.$$

引理 1 假设 $k_* := \inf_{x \in B_R \setminus \bar{D}} \inf_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \|\boldsymbol{\xi}\|_2 = 1} (\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{A}(x) \boldsymbol{\xi})$ 和 $k^* := \sup_{x \in B_R \setminus \bar{D}} \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, \|\boldsymbol{\xi}\|_2 = 1} (\boldsymbol{\xi}^T \mathbf{A}(x) \boldsymbol{\xi})$ 满足 $0 < k_* \leq k^* < 1$ 或 $1 < k_* \leq k^* < +\infty$, 由紧算子的谱理论,可以得到以下结论:

(i) 全涂层非均匀介质内部反散射传输特征值集是至多离散的且 0 不是它的聚点;

(ii) 若将 $\kappa_1(\Omega)$ 表示为 Ω 上 $-\Delta$ 的第一个狄利克雷特征值, 设 $k = \lambda^2$ 为实传输特征值, 则有下面结论成立:

$$\frac{\lambda}{\kappa_1(\Omega)} \geq \begin{cases} \|\mathbf{A}^{-1}\|^{-1}, & k^* < 1, \\ 1, & k_* > 1. \end{cases}$$

1.4 等价稳定线性特征值问题

在本节中,我们将四阶问题改写为等价稳定线性特征值问题. 分别在 $k_* < 1$ 或 $k^* > 1$ 这两种情况下考虑这个问题. 为简单起见,本文只考虑 $k_* < 1$, 因为 $k^* > 1$ 类似.

对于问题(6)的特征对 $(\lambda, \tilde{\mathbf{u}})$, 令 $\mathbf{P} = (\mathbf{A}^{-1} - \mathbf{I})^{-1}$, 引入辅助变量 $\tilde{\mathbf{y}} = \lambda \tilde{\mathbf{u}}$ 和 $\tilde{\mathbf{p}} = \mathbf{P} \nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}} + (\mathbf{I} + \mathbf{P}) \tilde{\mathbf{y}}$, 那么对于任意的 $\tilde{\mathbf{v}} \in H_0(\operatorname{div}, B_R \setminus \bar{D})$, $\tilde{\mathbf{z}} \in L^2(B_R \setminus \bar{D})^2$, $\tilde{\mathbf{q}} \in L^2(B_R \setminus \bar{D})^2$, 有

$$\begin{cases} (\mathbf{P} \nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) + (\mathbf{P} \tilde{\mathbf{y}}, \nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) - \frac{i}{\boldsymbol{\eta}} (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}})_{\partial D} = \lambda (\nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{v}}) - \lambda (\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{v}}), \\ (\mathbf{P} \nabla \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{z}}) + ((\mathbf{I} + \mathbf{P}) \tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{z}}) - (\tilde{\mathbf{p}}, \tilde{\mathbf{z}}) = 0, \\ -(\tilde{\mathbf{y}}, \tilde{\mathbf{q}}) = -\lambda (\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{q}}). \end{cases} \quad (7)$$

定义

$$\begin{aligned} \tilde{L}^2(B_R \setminus \bar{D}) &:= (L^2(B_R \setminus \bar{D}))^2, \quad L_2^0(B_R \setminus \bar{D}) := \{\tau \in L^2(B_R \setminus \bar{D}) : (\tau, 1) = 0\}, \quad \tilde{H}_0^1(B_R \setminus \bar{D}) := H_0^1(B_R \setminus \bar{D}) \cap L_2^0(B_R \setminus \bar{D}), \\ \tilde{H}^1(B_R \setminus \bar{D}) &:= H^1(B_R \setminus \bar{D}) \cap L_2^0(B_R \setminus \bar{D}), \quad \nabla \tilde{H}^1(B_R \setminus \bar{D}) := \{\nabla \tau : \tau \in \tilde{H}^1(B_R \setminus \bar{D})\}, \\ (\nabla \tilde{H}^1(B_R \setminus \bar{D}))^\perp &:= \{z \in \tilde{L}^2(B_R \setminus \bar{D}) : (\nabla w, z) = 0, \forall w \in \tilde{H}^1(B_R \setminus \bar{D})\}. \end{aligned}$$

因为 $\nabla\tilde{H}^1(B_R\setminus\bar{D})$ 在 $\tilde{L}^2(B_R\setminus\bar{D})$ 是闭的, 则 $\tilde{L}^2(B_R\setminus\bar{D}) = \nabla\tilde{H}^1(B_R\setminus\bar{D}) \oplus (\nabla\tilde{H}^1(B_R\setminus\bar{D}))^\perp$.

取

$$\nabla r \in \nabla\tilde{H}^1(B_R\setminus\bar{D}), \quad (\nabla r)^\perp \in (\nabla\tilde{H}^1(B_R\setminus\bar{D}))^\perp,$$

使得 $\tilde{p} = \nabla r + (\nabla r)^\perp$.

同理, 取

$$\nabla s \in \nabla\tilde{H}^1(B_R\setminus\bar{D}), \quad (\nabla s)^\perp \in (\nabla\tilde{H}^1(B_R\setminus\bar{D}))^\perp,$$

使得 $\tilde{p} = \nabla s + (\nabla s)^\perp$. 那么有

$$\begin{cases} (P\nabla\nabla \cdot \tilde{u}, \nabla\nabla \cdot \tilde{v}) + (P\tilde{y}, \nabla\nabla \cdot \tilde{v}) - \frac{i}{\eta}(\nabla \cdot \tilde{u}, \nabla \cdot \tilde{v})_{\partial D} = \lambda(\nabla \cdot \tilde{u}, \nabla \cdot \tilde{v}) - \lambda(\nabla r + (\nabla r)^\perp, \tilde{v}), \\ (P\nabla\nabla \cdot \tilde{u}, \tilde{z}) + ((I + P)\tilde{y}, \tilde{z}) - (\nabla r + (\nabla r)^\perp, \tilde{z}) = 0, \\ -(\tilde{y}, \nabla s + (\nabla s)^\perp) = -\lambda(\tilde{u}, \nabla s + (\nabla s)^\perp). \end{cases} \quad (8)$$

任意地选取 $\tilde{v} \in H_0(\text{div}, B_R\setminus\bar{D})$ 使得 $(\nabla r)^\perp, \tilde{v} = 0$.

$$\begin{cases} (P\nabla\nabla \cdot \tilde{u}, \nabla\nabla \cdot \tilde{v}) + (P\tilde{y}, \nabla\nabla \cdot \tilde{v}) - \frac{i}{\eta}(\nabla \cdot \tilde{u}, \nabla \cdot \tilde{v})_{\partial D} = \lambda(\nabla \cdot \tilde{u}, \nabla \cdot \tilde{v}) - \lambda(\nabla r, \tilde{v}), \\ (P\nabla\nabla \cdot \tilde{u}, \tilde{z}) + ((I + P)\tilde{y}, \tilde{z}) - (\nabla r, \tilde{z}) = 0, \\ -(\tilde{y}, \nabla s) = -\lambda(\tilde{u}, \nabla s). \end{cases}$$

引入 $\phi = \nabla \cdot \tilde{u}, \psi = \nabla \cdot \tilde{v}$, 将问题转化为线性特征值问题: 找到 $\lambda \in \mathbb{C}$ 和 $(\phi, \tilde{y}, r) \in V$, 使得对任意的 $(\psi, \tilde{z}, s) \in V$, 有

$$\begin{cases} (P\nabla\phi, \nabla\psi) + (P\tilde{y}, \nabla\psi) - \frac{i}{\eta}(\phi, \psi)_{\partial D} = \lambda(\phi, \psi) + \lambda(r, \psi), \\ (P\nabla\phi, \tilde{z}) + ((I + P)\tilde{y}, \tilde{z}) - (\nabla r, \tilde{z}) = 0, \\ -(\tilde{y}, \nabla s) = \lambda(\phi, s). \end{cases} \quad (9)$$

令

$$\|(\phi, \tilde{y})\|_D = \left(\|\phi\|_{1, B_R\setminus\bar{D}}^2 + \|\tilde{y}\|_{0, B_R\setminus\bar{D}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|(\phi, \tilde{y}, r)\|_V = \left(\|\phi\|_{1, B_R\setminus\bar{D}}^2 + \|\tilde{y}\|_{0, B_R\setminus\bar{D}}^2 + \|r\|_{1, B_R\setminus\bar{D}}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

其中 $D := \tilde{H}_0^1(B_R\setminus\bar{D}) \cap \tilde{L}^2(B_R\setminus\bar{D})$ 和 $V := \tilde{H}_0^1(B_R\setminus\bar{D}) \cap \tilde{L}^2(B_R\setminus\bar{D}) \cap \tilde{H}^1(B_R\setminus\bar{D})$ 都是希尔伯特空间,

$$\|\phi\|_{1, B_R\setminus\bar{D}} = \left(\|\phi\|_{L^2(B_R\setminus\bar{D})}^2 + \|\nabla\phi\|_{L^2(B_R\setminus\bar{D})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|\tilde{y}\|_{0, B_R\setminus\bar{D}} = \|\tilde{y}\|_{L^2(B_R\setminus\bar{D})}.$$

定义 4 种双线性型如下:

$$a((\phi, \tilde{y}), (\phi, \tilde{y})) := (P\nabla\phi, \nabla\phi) + (P\tilde{y}, \nabla\phi) + (P\nabla\phi, \tilde{y}) + ((I + P)\tilde{y}, \tilde{y}) - \frac{i}{\eta}(\phi, \phi)_{\partial D},$$

$$b((\phi, \tilde{y}), s) := -(\tilde{y}, s), \quad (\phi, \tilde{y}) \in D, \quad s \in \tilde{H}(B_R\setminus\bar{D}),$$

$$a_v((\phi, \tilde{y}, r), (\psi, \tilde{z}, s)) := (P\nabla\phi, \nabla\psi) + (P\tilde{y}, \nabla\psi) + (P\nabla\phi, \tilde{z}) + ((I + P)\tilde{y}, \tilde{z}) - \frac{i}{\eta}(\phi, \psi)_{\partial D} - (\nabla r, \tilde{z}) - (\tilde{y}, \nabla s),$$

$$b_v((\phi, \tilde{y}, r), (\psi, \tilde{z}, s)) := (\phi, \psi) + (r, \psi) + (\phi, s),$$

其中 $(\phi, \tilde{y}, r) \in V, (\psi, \tilde{z}, s) \in V$, 并且 a, b, a_v, b_v 是对称的、连续的和有界的.

定义算子 $T_v: V \rightarrow V$ 如下:

$$a_v(T_v(\phi, \tilde{y}, r), (\psi, \tilde{z}, s)) = b_v((\phi, \tilde{y}, r), (\psi, \tilde{z}, s)), \quad \forall (\psi, \tilde{z}, s) \in V.$$

引理 2 算子 $T_V: V \rightarrow V$ 是适定的且是 V 上的紧算子.

证明 设 $\hat{P} = P + k^* I$, 因此存在正常数 C ,

$$\begin{aligned} a((\phi, \tilde{y}), (\phi, \tilde{y})) &= (P\nabla\phi, \nabla\phi) + (P\tilde{y}, \nabla\phi) + (P\nabla\phi, \tilde{y}) + ((I + P)\tilde{y}, \tilde{y}) - \frac{i}{\eta}(\phi, \phi)_{\partial D} \\ &\geq (1 - k^*)\|\tilde{y}\|_{0, B_R \setminus \bar{D}}^2 + k_*(1 - k^*)/(1 - k_*)(2 - k^*)\|\nabla\phi\|_{0, B_R \setminus \bar{D}}^2 \\ &\geq C\left(\|\tilde{y}\|_{0, B_R \setminus \bar{D}}^2 + \|\phi\|_{1, B_R \setminus \bar{D}}^2\right). \end{aligned}$$

取 $s \in \tilde{H}^1(B_R \setminus \bar{D})$, 令 $\boldsymbol{y} = -\nabla s$, 有 $(\boldsymbol{y}, -\nabla s) = \|\tilde{y}\|_{0, B_R \setminus \bar{D}}\|\nabla s\|_{0, B_R \setminus \bar{D}} \geq C\|\tilde{y}\|_{0, B_R \setminus \bar{D}}\|s\|_{1, B_R \setminus \bar{D}}$.

极限上确界条件 $\inf_{s \in \tilde{H}^1} \sup_{(\phi, \tilde{y}) \in D} \frac{b((\phi, \tilde{y}), s)}{\|s\|_{1, B_R \setminus \bar{D}}(\|\tilde{y}\|_{0, B_R \setminus \bar{D}} + \|\phi\|_{1, B_R \setminus \bar{D}})} \geq C > 0$ 成立.

根据 Brezzi 理论, 存在唯一的 (ϕ, \tilde{y}, r) 使得

$$\begin{aligned} a((\phi, \tilde{y}), (\varphi, \tilde{z})) + b((\varphi, \tilde{z}), r) &= f(\varphi, \tilde{z}), \quad b((\phi, \tilde{y}), s) = g(s), \\ \|(\phi, \tilde{y})\|_D + \|r\|_{1, B_R \setminus \bar{D}}^2 &\leq C\left(\|f\|_{D', B_R \setminus \bar{D}} + \|g\|_{-1, B_R \setminus \bar{D}}\right), \end{aligned}$$

其中 $f \in D', g \in H^{-1}(B_R \setminus \bar{D})$, D' 和 $H^{-1}(B_R \setminus \bar{D})$ 分别为 D 和 $H_0^1(B_R \setminus \bar{D})$ 的对偶空间, 且范数

$$\|f\|_{D', B_R \setminus \bar{D}} = \sup_{\|(\phi, \tilde{y})\|_D = 1} |f(\phi, \tilde{y})|, \quad \|g\|_{-1, B_R \setminus \bar{D}} = \sup_{\|s\|_{1, B_R \setminus \bar{D}} = 1} |g(s)|.$$

因此, 给定 $(\phi, \tilde{y}, r) \in V$, $T_V(\phi, \tilde{y}, r)$ 是被唯一定义的, 且满足

$$\|T_V(\phi, \tilde{y}, r)\|_V \leq C\left(\|\phi\|_{-1, B_R \setminus \bar{D}} + \|r\|_{-1, B_R \setminus \bar{D}}\right).$$

设 $\{\phi_i, y_i, r_i\}$ 是 V 中的有界序列. 因为有界序列必有收敛的子序列, 则存在子序列 $\{\phi_{ij}, y_{ij}, r_{ij}\}$, 使得 $\{\phi_{ij}\}$, $\{r_{ij}\}$ 是 $L^2(B_R \setminus \bar{D})$ 中的两个收敛的柯西列. 因此根据算子的定义 $\{T_V(\phi_{ij}, y_{ij}, r_{ij})\}$ 是 V 中的柯西列, 并存在极限.

因此, $T_V: V \rightarrow V$ 是适定的且是 V 上的紧算子.

定义 2 引入符号 \leq 来表示复数的一个顺序. 令 $c_k = \rho_k e^{i\theta_k}$, $k = 1, 2$, 是两个复数, 且 $\rho_k \geq 0, 0 \leq \theta_k < 2\pi$. 那么 $c_1 \leq c_2$ 当且仅当以下任意一项成立:

- (i) $\rho_1 = \rho_2 = 0$;
- (ii) $\rho_1 < \rho_2$;
- (iii) $\rho_1 = \rho_2 \neq 0$ 且 $\theta_1 \geq \theta_2$.

显然, 若 $c_1 \leq c_2, c_2 \leq c_3$, 则 $c_1 \leq c_3$.

引理 3 根据代数重数计算算子 T_V 和问题 (7) 的特征值, 可以以有限或无限序列列出如下: $0 \leq \dots \leq u_2 \leq u_1$ 和 $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$. 此外, 对任意 $i \in \mathbb{N}^+$, 都使得若 $u_i \neq 0, \lambda_i u_i \neq 1$ 成立.

证明 根据紧算子的谱理论, 紧算子的特征值是可数的. 设 λ_i 是问题 (7) 的一个特征值, u_i 是 T_V 的一个非零特征值, 对应的特征向量为 x_i , 即 $T_V x_i = u_i x_i$.

由问题 (7) 及 (8) 得

$$u_i \left[\lambda_i ((\phi, \psi) + (r, \psi) + (\phi, s)) \right] = \lambda_i u_i ((\phi, \psi) + (r, \psi) + (\phi, s)) = (\phi, \psi) + (r, \psi) + (\phi, s).$$

因此, 对任意 $i \in \mathbb{N}^+$, 都使得若 $u_i \neq 0, \lambda_i u_i \neq 1$ 成立.

定理 1 特征值问题 (6) 与 (9) 等价.

证明 设 $(\lambda, (\phi, \tilde{y}, r))$ 是传输特征值问题 (9) 的特征对, 令 $\tilde{y} \in H_0^1(\text{div}, B_R \setminus \bar{D})$, $\phi = \nabla \cdot (\tilde{y}/\lambda)$ 和 $\nabla r = P\nabla\phi + (I + P)\tilde{y}$, 设 $\tilde{u} = \tilde{y}/\lambda$, 则易得 $(\lambda, \tilde{y}/r)$ 是传输特征值问题 (6) 的特征对.

另一方面, 如果 (λ, \tilde{u}) 是问题 (6) 的特征对, 那么选择唯一的 $r \in \tilde{H}^1(B_R \setminus \bar{D})$ 使得 $\nabla r = P\nabla\tilde{u} + \lambda(I + P)\tilde{u}$, $(\nabla \cdot \tilde{u}, \lambda\tilde{u}, r) \in V$ 且 $(\lambda, (\nabla \cdot \tilde{u}, \lambda\tilde{u}, r))$ 是问题 (9) 的解.

2 传输特征值问题的离散化方案

设 $\{\mathbf{T}_h\}$ 为 2 维中形状为规则三角形网格或 3 维中的四面体, 使得 $\overline{B_R \setminus \overline{D}} = \bigcup_{K \in \mathbf{T}_h} \overline{K}$. 据此, 将有限元空间定义

如下:

Γ_h 表示为 $B_R \setminus \overline{D}$ 上的线性元素空间, 进一步定义

$$\tilde{\Gamma}_h := \Gamma_h \cap L_0^2(B_R \setminus \overline{D}), \quad \Gamma_{h_0} := \Gamma_h \cap H_0^1(B_R \setminus \overline{D}), \quad \tilde{\Gamma}_{h_0} := \Gamma_{h_0} \cap L_0^2(B_R \setminus \overline{D}),$$

$\tilde{C}_h := (C_h)^d$ 是 $B_R \setminus \overline{D}$ 上向量分段常数有限元空间.

离散化混合特征值问题采用如下形式: 找到 $\lambda_h \in \mathbb{C}$ 和 $(\phi_h, \tilde{\mathbf{y}}_h, r_h) \in V_h := \tilde{\Gamma}_{h_0} \times \tilde{C}_h \times \tilde{\Gamma}_h$, 使得对任意的 $(\psi_h, \tilde{\mathbf{z}}_h, s_h) \in V_h$,

$$\begin{cases} (P\nabla\phi_h, \nabla\psi_h) + (P\tilde{\mathbf{y}}_h, \nabla\psi_h) - \frac{i}{\eta}(\phi_h, \psi_h)_{\partial D} = \lambda(\phi_h, \psi_h) + \lambda(r_h, \psi_h), \\ (P\nabla\phi_h, \tilde{\mathbf{z}}_h) + ((I + P)\tilde{\mathbf{y}}_h, \tilde{\mathbf{z}}_h) - (\nabla r_h, \tilde{\mathbf{z}}_h) = 0, \\ -(\tilde{\mathbf{y}}_h, \nabla s_h) = \lambda(\phi_h, s_h). \end{cases} \quad (10)$$

对于离散化问题(10)的适定性, 我们提出以下引理:

引理 4 存在一个常数 C , 对于 V_h 一致的成立

$$\inf_{(\phi_h, \tilde{\mathbf{y}}_h, r_h) \in V_h} \sup_{(\psi_h, \tilde{\mathbf{z}}_h, s_h) \in V_h} \frac{a_V((\phi_h, \tilde{\mathbf{y}}_h, r_h), (\psi_h, \tilde{\mathbf{z}}_h, s_h))}{\|(\phi_h, \tilde{\mathbf{y}}_h, r_h)\|_V \|(\psi_h, \tilde{\mathbf{z}}_h, s_h)\|_V} \geq C > 0. \quad (11)$$

定义算子 $T_{V_h}: V \rightarrow V_h$ 如下:

$$a_V(T_{V_h}(\phi, \tilde{\mathbf{y}}, r), (\psi_h, \tilde{\mathbf{z}}_h, s_h)) = b_V((\phi, \tilde{\mathbf{y}}, r), (\psi_h, \tilde{\mathbf{z}}_h, s_h)), \quad \forall (\psi_h, \tilde{\mathbf{z}}_h, s_h) \in V_h.$$

和算子 $S_{V_h}: V \rightarrow V_h$ 如下:

$$a_V(S_{V_h}(\phi, \tilde{\mathbf{y}}, r), (\psi_h, \tilde{\mathbf{z}}_h, s_h)) = a_V((\phi, \tilde{\mathbf{y}}, r), (\psi_h, \tilde{\mathbf{z}}_h, s_h)), \quad \forall (\psi_h, \tilde{\mathbf{z}}_h, s_h) \in V_h.$$

根据有限元标准理论, 我们可以得出关于紧算子的近似的基本结果.

引理 5 在稳定条件(11)下,

- (i) S_{V_h} 是从 $V \rightarrow V_h$ 的适定的幂等算子;
- (ii) 近似值保持 $\|S_{V_h}(\phi, \tilde{\mathbf{y}}, r) - (\phi, \tilde{\mathbf{y}}, r)\|_V \leq C \inf_{(\psi_h, \tilde{\mathbf{z}}_h, s_h)} \|(\phi, \tilde{\mathbf{y}}, r) - (\psi_h, \tilde{\mathbf{z}}_h, s_h)\|_V$;
- (iii) 如果 $\forall (\phi, \tilde{\mathbf{y}}, r) \in V$, 当 $h \rightarrow 0$ 时有 $\|S_{V_h}(\phi, \tilde{\mathbf{y}}, r) - (\phi, \tilde{\mathbf{y}}, r)\|_V \rightarrow 0$, 那么 $\|T_{V_h} - T_V\|_V \rightarrow 0, h \rightarrow 0$;
- (iv) 算子 T_{V_h} 是适定的且在 $V_h \subset V$ 中是紧的.

引理 6 设 $\{T_{V_h}\}$ 是 V 上一系列紧算子, 使得当 $h \rightarrow 0$ 时, $\|T_{V_h} - T_V\|_V \rightarrow 0$. 对任意 $i \in \mathbb{N}^+$, T_{V_h} 的特征值可以被排序为 $0 \leq \dots \leq u_{2,h} \leq u_{1,h}$, 且 $\lim_{h \rightarrow 0} u_{i,h} = u_i$, 问题(10)的特征值可以被排序为 $0 \leq \lambda_{1,h} \leq \lambda_{2,h} \leq \dots$ 且 $\lim_{h \rightarrow 0} \lambda_{i,h} = \lambda_i$. 更多地, 若 $u_{i,h} \neq 0$, $\lambda_{i,h} u_{i,h} \neq 1$.

定义 3 $W := L^2(B_R \setminus \overline{D}) \times L^2(B_R \setminus \overline{D}) \times L^2(B_R \setminus \overline{D})$, $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ 是问题(6)的特征值, $0 \leq \lambda_{1,h} \leq \lambda_{2,h} \leq \dots$ 是问题(10)的特征值, 对应地, 我们定义 $N(\lambda_i)$ 和 $N(\lambda_{i,h})$ 分别为问题(6)和(10)的特征值 λ_i 和 $\lambda_{i,h}$ 对应的特征空间. $N(\lambda_i)$ 和 $N(\lambda_{i,h})$ 之间的差距定义为

$$\hat{\delta}(N(\lambda_i), N(\lambda_{i,h})) := \max(\hat{\delta}(N(\lambda_i), N(\lambda_{i,h})), \hat{\delta}(N(\lambda_{i,h}), N(\lambda_i))),$$

其中 $\delta(N(\lambda_i), N(\lambda_{i,h})) := \sup_{\mathbf{s} \in N(\lambda_i), \|\mathbf{s}\|_W = 1} \text{dist}(\mathbf{s}, N(\lambda_{i,h}))$, 且对任意 $\mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) \in W$, $\|\mathbf{s}\|_W := \left(\sum_{i=1}^3 \|s_i\|_{L^2(B_R \setminus \overline{D})}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

引理 7 对于任意的 $i \in \mathbb{N}^+$, 存在于一个独立于 h 的常数 C , 使得对于足够小的 h , 有 $\hat{\delta}(N(\lambda_i), N(\lambda_{i,h})) \leq$

$C \left\| (I_V - S_V) \Big|_{N(\lambda_i)} \right\|_{\mathbf{w}}$, 其中 I_V 是 V 上的恒等算子.

离散化问题(10)可以用 V_h 执行.

定理 2 对于任意的 $i \in \mathbb{N}^+$, 如果 $N(\lambda_i) \subset \left(H^2(B_R \setminus \bar{D}) \times H^1(B_R \setminus \bar{D})^d \times H^2(B_R \setminus \bar{D}) \right) \cap V$, 那么 $\hat{\delta}(N(\lambda_i), N(\lambda_{i,h})) \leq C(N(\lambda_i))h$ 和 $|\lambda_i - \lambda_{i,h}| \leq Ch^2$.

证明 由于 $N(\lambda_i)$ 是有限维的, 在它上面的任意两个范数都是等价的.

令 n_{e_0}, n_i, n_e 分别为 $\Gamma_{h_0}, \tilde{C}_h, \Gamma_h$ 的维数, 对应地, $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n_{e_0}}\}, \{\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_{n_i}\}, \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n_e}\}$ 是其对应的有限元基. 因此有

$$\phi_h = \sum_{i=1}^{n_{e_0}} w_i \varphi_i, \quad \tilde{\mathbf{y}}_h = \sum_{i=1}^{n_i} \eta_i \tilde{\chi}_i, \quad r_h = \sum_{i=1}^{n_e} \gamma_i \varphi_i. \quad (12)$$

且 $\mathbf{w} = [w_1, w_2, \dots, w_{n_{e_0}}]^T, \boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{n_i}]^T, \boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n_e}]^T$. 我们进一步得出刚度、质量和对流矩阵如表 1 所示.

此外, 在离散设置中, ϕ_h 和 r_h 的零平均值意味着

$$(\phi_h, 1) = \sum_{i=1}^{n_{e_0}} w_i (\varphi_i, 1) = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{w} = 0, \quad (r_h, 1) = \sum_{i=1}^{n_e} \gamma_i (\varphi_i, 1) = \boldsymbol{\beta}^T \boldsymbol{\gamma} = 0, \quad (13)$$

其中 $\boldsymbol{\alpha} = [(\varphi_1, 1), (\varphi_2, 1), \dots, (\varphi_{n_{e_0}}, 1)]^T, \boldsymbol{\beta} = [(\varphi_1, 1), (\varphi_2, 1), \dots, (\varphi_{n_e}, 1)]^T$.

通过引入拉格朗日乘数 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 \mathbf{s} 来考虑约束条件(13), 将条件(12)和(13)分别乘以 $\boldsymbol{\sigma}$ 和 \mathbf{s} , 代入问题(10), 离散化得到广义特征值问题

$$\mathbf{K} \mathbf{z} = \lambda \mathbf{M} \mathbf{z}, \quad (14)$$

其中

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_p + \mathbf{C} & \mathbf{F}_p & \mathbf{0} & \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0} \\ \mathbf{F}_p^T & \mathbf{M}_p & -\mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{G} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{0} & \mathbf{Y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\eta} \\ \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\sigma} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix}.$$

在本文中, 仅要求 GEP(14) 的几个最小实特征值作为近似传输特征值.

表 1 刚度、质量和对流矩阵

Table 1 Stiffness, mass and convection matrices

矩阵	维数	(i, j) 元的定义
\mathbf{K}_p	$n_{e_0} \times n_{e_0}$	$(\mathbf{P} \nabla \varphi_j, \nabla \varphi_i)$
\mathbf{F}_p	$n_{e_0} \times n_i$	$(\mathbf{P} \tilde{\chi}_j, \nabla \varphi_i)$
\mathbf{M}_p	$n_i \times n_i$	$((\mathbf{I} + \mathbf{P}) \tilde{\chi}_j, \tilde{\chi}_i)$
\mathbf{G}	$n_i \times n_e$	$(\nabla \varphi_i, \tilde{\chi}_j)$
\mathbf{X}	$n_{e_0} \times n_{e_0}$	(φ_j, φ_i)
\mathbf{Y}	$n_{e_0} \times n_e$	(φ_j, φ_i)
\mathbf{C}	$n_{e_0} \times n_{e_0}$	$-\frac{i}{\eta} (\varphi_j, \varphi_i)_{\partial D}$

3 预处理 GEP

令 $\hat{n}_i = n_i/d$, 定义 $\mathbf{M}_p = (\mathbf{I} + \mathbf{P}) \otimes \mathbf{I}_{\hat{n}_i}$ 是一个块对角矩阵, 且 $\mathbf{M}_p^{-1} = (\mathbf{I} + \mathbf{P})^{-1} \otimes \mathbf{I}_{\hat{n}_i}$. 定义以下可逆矩阵

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{F}_p \mathbf{M}_p^{-1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{G}^T \mathbf{M}_p^{-1} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

GEP(14)等价于

$$(\mathbf{W}\mathbf{K}\mathbf{W}^T)(\mathbf{W}^{-T}\mathbf{z}) = \lambda(\mathbf{W}\mathbf{M}\mathbf{W}^T)(\mathbf{W}^{-T}\mathbf{z}), \quad (15)$$

$$\text{其中 } \mathbf{W}\mathbf{K}\mathbf{W}^T = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}} & \hat{\mathbf{F}} & \boldsymbol{\alpha} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hat{\mathbf{F}}^T & \hat{\mathbf{G}} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta} & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\alpha}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\beta}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_p \end{bmatrix} := \hat{\mathbf{K}} \oplus \mathbf{M}_p, \quad \mathbf{W}\mathbf{M}\mathbf{W}^T = \begin{bmatrix} \mathbf{X} & \mathbf{Y} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{Y}^T & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} := \hat{\mathbf{M}} \oplus \mathbf{0},$$

$$\hat{\mathbf{K}} = \mathbf{K}_p + \mathbf{C} - \mathbf{F}_p \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{F}_p^T, \quad \hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F}_p \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{G}, \quad \hat{\mathbf{G}} = -\mathbf{G}^T \mathbf{M}_p^{-1} \mathbf{G}. \quad (16)$$

接下来, 我们考虑以下广义特征值问题

$$\hat{\mathbf{K}}\hat{\mathbf{z}} = \lambda\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{z}}, \quad (17)$$

其中 $\hat{\mathbf{z}} = [\mathbf{w}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{s}]^T$.

基于以上的分析, 我们有以下的结论:

定理 3 GEP(14) 和 GEP(17) 有相同的非无限特征值, 且 $\text{Spec}(\hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{M}}) = \text{Spec}(\mathbf{K}, \mathbf{M}) \setminus \{\infty\}_{k=1}^{n_e}$, 其中 $\text{Spec}(\hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{M}})$ 表示线性束 $\hat{\mathbf{K}} - \lambda\hat{\mathbf{M}}$ 的特征值的集.

证明 根据上述预处理过程可以得出 GEP(14) 和 GEP(17) 有相同的特征值. 根据 GEP(15) 的块结构和 GEP(17) 的定义, 该定理明显成立.

定理 4 式(16)中矩阵项 $\hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{F}}, \hat{\mathbf{G}}$ 的显式给出如下

$$\begin{aligned} (\hat{\mathbf{K}})_{ij} &= (\mathbf{P}\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_i) - (\mathbf{P}(\mathbf{I} + \mathbf{P})^{-1}\mathbf{P}\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_i) - \frac{i}{\eta}(\varphi_j, \varphi_i)_{\text{ad}} = (\mathbf{A}\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_i), \quad i, j = 1, 2, \dots, n_e, \\ (\hat{\mathbf{F}})_{ij} &= (\mathbf{P}(\mathbf{I} + \mathbf{P})^{-1}\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_i) = (\mathbf{A}\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n_e, \quad j = 1, 2, \dots, n_e, \\ (\hat{\mathbf{G}})_{ij} &= -((\mathbf{I} + \mathbf{P})^{-1}\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_i) = ((\mathbf{A} - \mathbf{I})\nabla\varphi_j, \nabla\varphi_i), \quad i, j = 1, 2, \dots, n_e. \end{aligned}$$

上述的过程明显减少了 GEP 的规模, 降低了计算的难度, 且定理 5 表示式(16)中的 $\hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{F}}, \hat{\mathbf{G}}$ 可以直接组装, 无需在其形式中进行任何矩阵乘法. $\hat{\mathbf{K}}, \hat{\mathbf{F}}, \hat{\mathbf{G}}$ 的稀疏性与 \mathbf{K}_p 相似, 这意味着 GEP(17) 除了矩阵大小显著减小外, 仍然是稀疏的. 这一特性使得在实际计算中所需的内存和时间要减少很多.

4 结论

本文主要讨论了非均匀介质内部反散射的传输特征值问题, 并且利用混合有限元将其离散化, 为解决传输特征值问题提供了一种高效的计算方法. 本文的关键理论结果是, 所提出的混合公式等价于原问题而不引入任何伪特征值, 通过理论分析证明了解算子的有界性与紧性, 确保了离散特征值的收敛性. 所提出的离散化方案易于实现且有坚实的理论基础, 预处理技术显著降低了计算复杂度, 为三维非凸域的实际应用提供了可行方案. 在未来计划将该方案推广到其他类型的传输特征值问题, 比如弹性波和 Maxwell 方程中的传输特征值问题.

参考文献:

- AN J, SHEN J, 2014. Efficient spectral methods for transmission eigenvalues and estimation of the index of refraction[J]. *J Math Study*, 47(1): 1–20.
- CAKONI F, COLTON D, 2014a. A qualitative approach to inverse scattering theory[M]. Cham: Springer.
- CAKONI F, COLTON D, MENG S X, 2014b. The inverse scattering problem for a penetrable cavity with internal measurements [M]//STEFANOV P, et al. *Inverse problems and applications*, Providence: American Mathematical Society.
- CAKONI F, COLTON D, MONK P, 2001. The direct and inverse scattering problems for partially coated obstacles[J]. *Inverse Probl*, 17(6): 1997–2015.
- CAKONI F, GINTIDES D, HADDAR H, 2010. The existence of an infinite discrete set of transmission eigenvalues[J]. *SIAM J Math Anal*, 42(1): 237–255.
- COLTON D, MONK P, SUN J G, 2010. Analytical and computational methods for transmission eigenvalues[J]. *Inverse Probl*, 26(4): 045011.
- COLTON D, PÄIVÄRINTA L, SYLVESTER J, 2007. The interior transmission problem[J]. *Inverse Probl Imag*, 1(1): 13–28. [LinkOut]
- GIORGI G, HADDAR H, 2012. Computing estimates of material properties from transmission eigenvalues[J]. *Inverse Probl*, 28(5): 055009.
- GONG B, SUN J G, TURNER T, et al, 2020. Finite element approximation of transmission eigenvalues for anisotropic media [EB/OL]. arXiv: 2001.05340v1.
- HARRIS I, 2021. Analysis of two transmission eigenvalue problems with a coated boundary condition[J]. *Appl Anal*, 100(9): 1996–2019.
- KLEEFELD A, PIERONEK L, 2018. Computing interior transmission eigenvalues for homogeneous and anisotropic media[J]. *Inverse Probl*, 34(10): 105007.
- LECHLEITER A, PETERS S, 2015. Determining transmission eigenvalues of anisotropic inhomogeneous media from far field data [J]. *Commun Math Sci*, 13(7): 1803–1827.
- LI Y J, YANG Y D, BI H, 2023. The a priori and a posteriori error estimates for modified interior transmission eigenvalue problem in inverse scattering[J]. *Commun Comput Phys*, 34(2): 503–529.
- LIU Q, LI T X, ZHANG S, 2023. A mixed element scheme for the Helmholtz transmission eigenvalue problem for anisotropic media[J]. *Inverse Probl*, 39(5): 055005.
- PETERS S, KLEEFELD A, 2016. Numerical computations of interior transmission eigenvalues for scattering objects with cavities [J]. *Inverse Probl*, 32(4): 045001.
- XIE H H, WU X M, 2017. A multilevel correction method for interior transmission eigenvalue problem[J]. *J Sci Comput*, 72(2): 586–604.

(责任编辑 冯兆永)